QVADRATVRAE CIRCVLI

TOMVS SECVNDVS.

AVCTORE

R. P. GREGORIO A SANCTO VINCENTIO SOCIETATIS IESV.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI



ANTVERPIÆ,
Apud IOANNEM ET IACOBVM MEVRSIOS.
ANNO M. DC. XLVII.
Cum Gratia & Priuilegio.

Digitized by Google

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER SEXTVS

DE

HYPERBOLA.

ARGVMENTVM.

DIuiditur liber hic in ſeptem Partes, velut claſſes totidem, quibus aptè, eleganterque hyperbolæ ſectio pulcherrimæque illius proprietates, ſuo loco ſingulæ & ordine continentur.

Prima quidem hyperbolam, ſectioneſque tam oppoſitas quàm coniugatas, dein aſymptotos è cono educit: primaſque ac fundamentales hyperbolæ proprietates exhibet.

Secunda, ſectionum oppoſitarum ac coniugatarum affectiones conſiderat.

Tertia aſymptotos & concauam contemplatur hyperbolam: ac linearum præcipuè aſymptotis æquidiſtantium indagat proportionem.

Quarta, ſegmenta tam conuexa quàm concaua, dein ſectiones ipſas inter ſe confert.

Quinta, hyperbolam à parabola interſectam expendit: in qua hic etiam ordo ſeruatur, vt primò linearum aſymptotis æquidiſtantium, ſegmentorum dein rationes conſiderentur.

Sexta, varia ſoluit problemata.

Septima, varias geneſes proponit, quæ tum ex lineis & circulis, tum ex ellipſi & parabola, denique ex ipſa oriuntur hyperbola. Secundò hyperbolas reducit ad ſectiones è quibus ortæ. Tertiò reliquas ex hyperbola educit ſectiones.

Reliquis coni ſectionibus vti nobilior eſt hyperbola, ſic affectionum illius contemplatio, moroſiorem requirit attentionem; noſtri autem inſtituti ſcopus eſt, ſectionem hanc, vti & præcedentes duas, non minùs planam facere, quàm ſint ipſa Euclidis elementa. quia verò ex cono ſuam habet originem, hinc cum Apollonio ab eius ortu ordiemur, oſtenſuri eius quam author prop. 12. lib. primi explicat, primariam affectionem.

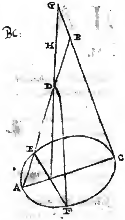
DEFINITIONES.

I.

HYperbolam voco coni ſectionem cuius planum latera trianguli per axem ſectione factâ emergentis ita interſecat, vt alteri illorum denuo extra conum occurrat.

II.

Diameter hyperbolæ eſt recta linea quæ omnes rectas, cuidam æquidiſtantes bifariam diuidit. quænam verò in hyperbola diameter vocetur recta, quæ tranſuerſa, ex appoſito cognoſces ſcemate.



COnus ABC diuiſus triangulo per axem ABC, ſecetur iterum plano DEF occurrente vtrique laterum trianguli per axem, extra conum: lateri ~~AB~~ quidem in G, lateri verò AB in D: recta DG diameter dicitur tranſuerſa hyperbolæ DEF: hyperbolę verò coniugatæ ipſi DEF, recta vocatur & viciſſim quę coniugatæ tranſuerſa eſt, huius dicitur recta. de quibus in defin. 5. huius.

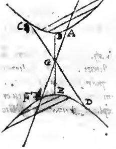
III.

Centrum hyperbolæ punctum eſt, quod tranſuerſam diametrum bifariam diuidit.

Si DG bifariam ſecetur in H. punctum H centrum dicetur hyperbolę EDF ex quo patet centrum hyperbolæ eſſe extra ſectionem. quod verò omnis linea per centrum ducta & hyperbolę occurrens, diameter ſit: ſuo loco patebit.

IV.

Sectiones oppoſitæ, ſunt hyperbolæ, quarum omnes diametri tranſuerſæ cõmunes ſunt.



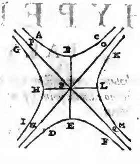
Sint ABC, DEF ſectiones oppoſitæ: & ABC hyperbolæ centrum G, ponantur per G lineæ quorcunque BE, DC, FA, occurrentes ſectionibus in A, B, C, D, E, F: rectæ illę communes dicuntur diametri ſectionum oppoſitarum, eò quod ſi poſitis in hyperbola ABC ordinatim ad diametrum AG, æquidiſtantes ponantur in hyperbola DEF, illæ quoque ab eadem diametro bifariam ſecentur, adeoq; ad eandem diametrum ordinatim applicatæ ſint:

Quod verò diametri oppoſitis ſectionibus interceptæ, in centro biſſecentur, ſuo loco patebit.

V.

Sectiones coniugatas appello duas hyperbolarum oppoſitiones quæ diametros tranſuerſas habent, quarum altera, alterius recta eſt, & viciſſim recta, alterius eſt tranſuerſa: ſiue ſunt hyperbolæ quæ coniugatas habent diametros.

Sint



Sint binæ hyperbolarum oppoſitiones, vna ABC, DEF, altera GHI, KLM: & huius diameter ſit tranſuerſa BE, illius HL. & BE quidem biſſecet æquidiſtantes HL, & illa bifariam diuidat parallelas BE, HL diameter eſt recta, ad tranſuerſam BE hyperbolarum ABC, DEF, & BE recta ad tranſuerſã HL hyperbolarum GHI, KLM. & quia poſitæ ſunt, vt altera alterius parallelas, intra ſectiones poſitas biſecet, diametri dicuntur coniugatæ. & hyperbolę quarum tranſuerſæ diametri, altera alterius æquidiſtantes biſſecat, coniugatæ vocantur.

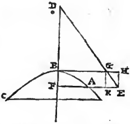
V I.

Aſymptotos voco lineas quæ in plano hyperbolæ, è centro eductæ ſectioni quidem magis ac magis accedunt, nunquam tamen occurrunt.

Illas in figura deſignant lineæ NS, SQ, PS, SO: quarum inuentionem & demonſtrationem vide propoſ. 12. & 16. huius: vnum hîc notari debet, aſymptotorũ aliquas, angulum ad centrum, formare rectum, alias acutum, vel obtuſum, quarum ſuppoſitiones, varias ac diuerſas inferunt proprietates, vt ſuis locis apparebit.

V I I.

Latus rectum eſt linea iuxta quam poſſunt ordinatim ad diametrum applicatæ, ſiue latus rectum, menſura eſt iuxta quam comparantur potentiæ linearum ordinatim ad diametrum applicatarum.



Sit ABC hyperbolæ diameter tranſuerſa BD & ad illam ordinatim FA: fiant autem proportionales BF, FA, FE & ex D per E recta ducatur DE, occurrens BG lineæ parallelæ FE, in G. erit BG latus rectum vti propoſ. 32. huius demonſtrabimus.

Porro in hyperbola latus rectum hanc ſibi proprietatem poſtulat vt quadrata ordinatim applicatarum ſuperent rectangula quæ fiunt ſub latere recto & partibus diametrorum verticem inter & punctum quo ab ordinatim poſitis interſecantur interceptis, figura ſimili ei quæ fit ſub latere recto & tranſuerſo: v. g. perficiantur rectangula BE, GF. quoniam igitur per hypotheſim, rectæ BF, FA, FE proportionales ſunt, quadratum FA æquale eſt rectangulo BE, quod ſuperat FG rectangulum, figura HK, quę ſimilis eſt illi quæ fit ſub BG & BD in angulo GBD: vti propoſ. 32 huius oſtenditur.

Illud quoque hîc obſeruandum eſt quod alibi monui: non opus eſſe vt latus rectũ normaliter ad diametrum applicetur, ſed ordinatim applicatis poſſe æquidiſtare. Secundò ſingulis diametris, diuerſa conuenire latera recta, cùm ſingularum potentiæ diuerſæ ſint.

V I I I.

Hyperbolas æquales voco, quarum triangula quæ contingentibus & aſſymptotis continentur, æqualia ſunt.

I X.

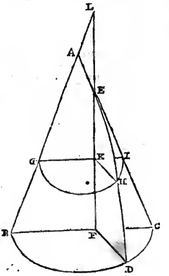
Hyperbolæ ſimiles dicuntur quarum triangula quæ contingentibus & aſymptotis æquales angulos habentibus continentur, ſimilia ſunt.

HYPERBOLÆ

PARS PRIMA

Hyperbolam, ſectioneſq́; oppoſitas, & coniugatas, denique & aſymptotos è cono educit, primaſq́; ac fundamentales hyperbolæ paſſiones demonſtrat.

PROPOSITIO PRIMA.



Conus ABC plano per axem ſecetur BAC, ſecetur autem & altero plano, ſecante baſim coni, ſecundùm rectam lineam FD, ad BC baſim trianguli ABC normalem, quod ſectionem in ſuperficie coni faciat lineam DHE: ſectionis autem diameter FE producta, cùm AB latere trianguli per axem, extra coni verticem conueniat in puncto L, deinde aſſumpto in FE diametro puncto quouis K, ponatur in plano trianguli ABC, recta GKI, æquidiſtans BC. & ſecundum GI, planum ducatur GHI, æquidiſtans plano baſeos, exhibens in plano DFE, communem interſectionem HK:

Dico eſſe vt quadratum KH ad quadratum FD, ſic LKE rectangulum ad rectangulum LFE.

Demonſtratio.

a 16. prolog. huius. b 16. undecimi. c 35. tertij.

Qvoniam planum GHI, æquidiſtat plano baſeos BDC, circulus a eſt GHI, & HK, FD b communes interſectiones parallelæ, & quia FD normalis eſt ad BC, recta quoque HK ad IG parallelam BC normalis eſt; rectangulũ igitur GKI, æquale eſt quadrato c HK: rectangulũ autem BFC, æquale eſt quadrato FD: quadratum igitur HK ad DF, quadratum, eſt vt GKI rectangulum ad rectangulum BFC: quia verò ratio GKI rectanguli, ad rectangulum BFC compoſita eſt ex ratione GK, ad BF, id eſt LK ad LF, & ex ratione KI ad FC, id eſt EK ad EF; ſit autem ex iiſdem quoque ratio compoſita rectanguli LKE ad LFE, rectangulum: vt GKI rectangulum ad rectangulum BFC, id eſt quadratum HK, ad quadratum FD, ſic LKE rectangulum eſt ad rectangulum LFE. Quod erat demonſtrandum.

Vocetur

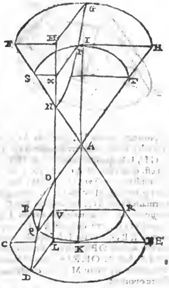
Vocetur autem ſectio huiuſmodi hyperbola: cuius diameter tranſuerſa LE, & ordinatim ad illam applicatæ, HK, FD.

PROPOSITIO II.

Sint ad verticem ſuperficies duæ conicæ quarum vertex A punctum: habeant autem circulos æquales CDE, FGH, & parallelos, quorum centra K, I; diametri CE, FH: poſitaque LD normali ad diametrum CE; ducatur ſecundum LD, planum non per verticem quod ſectiones faciat in vtraque ſuperficie, lineas DLO, GMN.

Dico vtramque ſectionem hyperbolam eſſe.

Demonſtratio.



Puncta N, O, vertices ſint ſectionum DLO, GMN: ſumptiſque quibuſuis diſtantijs NX, OV, per V & X ducantur BR, ST æquidiſtantes CE, FH: & per BR, ST lineas, plana agantur BQR, SPT, parallela circulis CDE, FGH, exhibentia in planis DLO, GMN, communes interſectiones XP, QV: quoniam igitur plana BQR, CDE æquidiſtant, communes interſectiones QV, DL, in plano DLO a parallelæ ſunt: & quia DL ad CE diametrum normalis eſt, recta quoque QV ad BR normalis eſt: igitur vt NVO rectangulum b ad rectangulum NLO, ſic quadratum VQ ad quadratum LD, hyperbola eſt igitur ſectio DLO.

a 16. vndecimi.

b Ex 1. huius.

Deinde quia circuli CDE, FGH æquidiſtant, c communes quoque interſectiones DL, MG parallelæ ſunt: & cùm LD normalis ſit ad diametrum CE, recta quoque MG normalis eſt ad FH, vnde & XP normalis ad ST: quadratum d igitur XP ad MG, quadratum eſt vt NXO rectangulum eſt ad rectangulum NMO. quare & ſectio GMN hyperbola eſt.

c 16. vndecimi.

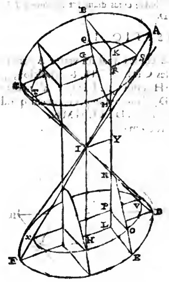
d Ex 1. huius.

Vocentur autem hyperbolæ GMN, DLO ſectiones oppoſitæ: quarum communis diameter eſt tranſuerſa NO.

PROPOSITIO III.

Circulorum æqualium ABC, DEF in planis æquidiſtantibus deſcriptorum centra coniungat recta GH, bifariam diuiſa in I, per quam poſito plano ACFD ſignante diametros AC, DF parallelas, ductoque AF, quæ occurret GH in I, circumagatur hæc eadem, manente puncto I, per circulorum perimetros ABC, DEF, donec in eundem locum redierit à quo cœpit circumduci: erecta deinde KB orthogona

ad



ad diametrum A C, ponatur K L quæ æquidiſtet G H; & ſecundùm lineas K B, K L planum agatur exhibens ſectiones M K B, N E L.

Dico illas eſſe ſimiles; hoc eſt ordinatim applicatas ad vnius diametrum, æquales eſſe ijs, quæ ad diametrum alterius applicantur, ſi à diſtantijs æqualiter à punctis M & N remotis, ad æquales angulos conſtituantur.

Demonſtratio.

ASſumatur quodlibet punctum P, in linea N L; deinde rectæ N P, fiat æqualis M R: ponantur quoque P O, R Q æquidiſtantes K B, hoc eſt E L, quæ communes interſectiones ſunt plani B K L, & planorum A B C, D E F æquidiſtantium, ac proinde parallelæ inter ſe; ponatur deinde I Y parallela A C. quoniam A B C, D E F circuli æquales & paralleli ſunt, diametri quoque A C, D F æquales ſunt & æquidiſtant: ſunt autem G H, L K quoque parallelæ, & H G in I biſſecta, recta quoque L K in Y biſſecta eſt. quia verò eſt A G ad A K, hoc eſt D H ad D L, (ob A G, D H æquales ſemidiametros) vt G I ad K M. hoc eſt I H ad N L; ſunt autem G I, I H æquales; igitur & K M & N L, vti ex conſtructione lineæ M R, N P; rurſum, cùm B K normalis ſit ad A C, rectangulo A K C æquale eſt quadratum K B; ſimiliter & rectangulo D L F æquale quadratum L E; igitur cùm A C ſit æqualis D F, & A K æqualis D L, erit quoque A K C, æquale D L F rectangulo; adeoque & quadratum K B, quadrato L E æquale. eodem prorſus modo conſtat R Q quadratum eſſe æquale O P quadrato. ſimiles igitur ſunt hæ ſectiones & ordinatim applicatas E L, K B, & O P, R Q æquales habent, quæ à diſtantijs K M, L N, & R M, P N æqualibus, à punctis M & N, conſtitutæ ſunt ad eoſdem angulos. Quod demonſtrare oportuit.

Corollarium.

HInc colligitur iiſdem poſitis, quotieſcunque K B, L E rectæ parallelæ inuicem æquales fuerint, etiam diametrorum partes ab eiſdem abſciſſas æquales eſſe, ſcilicet M K & N L, vel M R & N P. & ſi K B ordinatim poſita fuerit, factaque N L æquali M R, ponatur L E æquidiſtans B K, quod L E ordinatim quoque applicata ſit ad L Y diametrum.

Scholion.

PRæcedenti propoſitione videmur eas ſolas hyperbolas voluiſſe complecti quæ fiunt ſectione facta per planum aliquod quod cum axe coni non poteſt conuenire; verum id ſtudio factum eſt quo minùs turbetur imaginatio ſeſe ad plura extendentis; nam eadem propoſitio cuicunque tandem ſectioni ebuenit: & eius conſtructio atque demonſtratio ſiue axi planum hyperbolæ continens occurrat, ſiue non: ſi enim ſectio facta per K B *tranſeat per lineam* K L *quæ in plano per axem facto, ſcilicet* A C F, *axi parallela non ſit quæ per centra circulorum tranſit, circa quos linea conos formans circumacta fuit, diuiſa nihilominus* M N *bifariam in* Y, *ex* Y *ad* I *poſita linea* Y I, *planum fiat ſecundùm lineas* K L Y I. *ſumptis deinde rectis* K Y *&* Y L *æqua-*

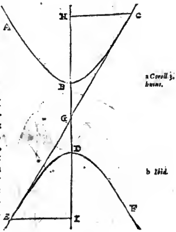
qualibus agantur plana parallela recta Y I *exhibentia communes interſectiones* A C, D F, *recta deniq.* G H *per* I *qua ſit parallela* K L, Y L *aquales inter ſe, ſi* G I, H I *aquales fue- int: imò &* A C, D F *biſariam diuiſa in* H *&* G, *& ellipſes* A B C, D E F *aquales ac ſimi- les: vnde cum rectangula* D L F, A K C *aqualia exiſtant vti & rectangula* V P X, S R T, *etiam quadrata* E L, K B, & O P, R Q *aqualia erunt inter ſe, vt ex ijs qua libro de Ellipſi di- cta ſunt manifeſtè colligitur. & conſequenter etiam hyperbola in hoc caſu ſimiles erunt habe- buntq. latera* K B, E L, & R Q, O P *aqualibus internallis à punctis* M, *&* N *diſtantibus, a- qualia prorſus, vt in priore ſchemate quod habebat ſectionem axi parallelam fieri oſtenſum eſt.*

PROPOSITIO IV.

Oppoſitarum ſectionum A B C, E D F diameter ſit B D; quâ biſa- riam diuiſâ in G ponatur per G linea occurrens A B C hyperbolæ in C.

Dico quod C G producta oppoſitæ quoque occurret ſectioni in E.

Demonſtratio.



Poſitâ ex C ordinatìm linea C H ad diame- trum B D; fiat H G æqualis G I, & ex I or- dinatim ponatur I E ad diametrum B D. occur- rens C G lineæ in E: quoniam igitur H C, I E lineæ in oppoſitis ſectionibus ad eandem diame- trum ordinatim poſitæ ſunt, æquidiſtant a H C, E I adeoque anguli C H G, G I E æquantur. ſunt autem anguli ad G, oppoſiti & H G, G I lineæ quoque æquales, æqualia igitur ſunt trian- gula G H C, G E I: & H C, E I lineæ æquales: quia verò B G, G D æquales ſunt ex hypotheſi, & G H, G I per conſtructionem reliquæ H B, D I quoque æquales ſunt: quare I E lineæ prout hyperbolæ occurrit, b æqualis eſt H C: eadem igitur eſt I E ordinatim poſita, prout occurrit hyperbolæ, & prout C G lineę occurrit: vnde punctum E in perimetro eſt hyperbolæ, & C G producta oppoſitæ occurrit ſectioni in E. Quod erat demonſtrandum.

a Coroll. 3. huius.

b Ibid.

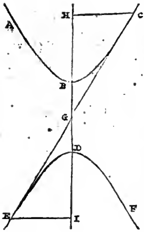
Corollarium.

Hinc ſequitur ſi per G punctum quo B D diameter biſſecatur, alia ducatur, hy- perbolis occurrens in C & E, & ex C & E, ordinatim ad diametrum B D po- nantur C H, E I: illas, vti etiam D I, B H eſſe inter ſe æquales: manifeſtum eſt ex priori demonſtratione.

PROPOSITIO V.

Eadem poſitâ figurâ: ſi B D vna diametrorum biſecetur in G,

Dico rectas omnes per G ductas & hyperbolis occurrentes, in G biſariam ſecari.



a Coroll. præcedens.
b Coroll. 5. huius.

Demonſtratio.

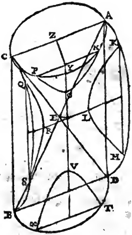
POſitâ per G, linea CE, hyperbolis occurrat in C & E punctis, ex quibus ordinatim ponantur lineæ CH, IL: quoniam BD diameter in G biſſecta eſt & CE oppoſitis occurrit ſectionibus, rectæ HC, EI ordinatim ad communem diametrum BD [a] poſitæ æquales ſunt: quare & ID, BH quoque [b] æquales ſunt: ſed ex hypotheſi rectæ GD, GB æquantur, æquales igitur ſunt GI, GH, vnde reliqua CG quoque reliquæ GE æqualis eſt.

Vocetur autem punctum G centrum hyperbolarum: rectę verò BD, CE earundem diametri tranſuerſæ quæ in G centro bifariam diuiduntur.

PROPOSITIO VI.

SInt ABCD parallelogrammi diametri duæ AB, CD, deſcriptis autem ſuper ſingulis parallelogrammi lateribus, circulis, ferantur circa illos lineæ, AB, CD, formantes quatuor oppoſitos conos quorum axes FG, HI. factaq́ per axes ſectione, parallelogrammum emergat, ACBD cui æquidiſtans fiat ſectio, exhibens in conicis ſuperficiebus lineas NOP, TVX, KLM, QRS.

Dico illas eſſe hyperbolas.



Demonſtratio.

PLana NOP, TVX, KLM, QRS exhibeant in baſibus oppoſitorum conorum lineas NP, QS, TX, KM quæ (cùm ſectiones illæ æquidiſtẽt parallelogrammo ABCC quod efformatur ſectione facta per axes conorum oppoſitorum) æquidiſtant diametris AC, CB, BD, DA: adeoque & inter ſe: diuiſis igitur AC, NP bifariam in Z & Y, ducatur ZY, per quam, vti & E verticem conorum planum ducatur, exhibebit illud triangulum per axem, cuius lateribus, extra conum occurrent ſectiones NOP, TVX: [c] hyperbolæ igitur ſunt NOP, TVX. ſimiliter oſtenduntur hyperbolę KLM, QRS.

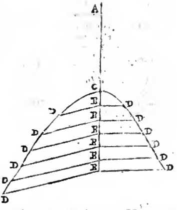
c 1. huius.

PRO-

PROPOSITIO VII.

REctâ A B diuiſâ vtcunque in C ita tamen vt rectangulum A B C ad A B C, rectangulum eam obtineat rationem quam quadratum B D ad B D quadratum, ad æquales angulos applicatum ad rectam A B.

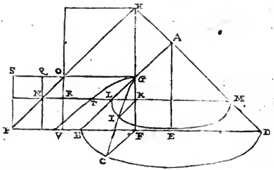
Dico C D B eſſe hyperbolam.



DEmonſtratio manifeſta eſt ex prima propoſitione huius.

Scholion.

OPeræ pretium duxi hanc propoſitionem hoc loco collocare, non quod aliquid à dictis diuerſum contineat, ſed vt nanſciſcerer occaſionem ea quæ huc vſque in medium adducta ſunt explicandi, & ea explanandi quæ Apollonius libro primo propoſit. 12. nobis de natura hyperbolæ reliquit; cum ea tyrones potiùs à ſtudio Conicarum ſectionum arcere ſoleant quàm inuitare, conabor hoc loco per dilucidationem ſcematum, quæ hic apparent, rem ita manifeſtam reddere, vt arexim mouere cuiq; valeat ipſa facilitas. nam vt nonnulli autumant, affectata authoris obſcuritas horrorem & auerſionem parere nata eſt, quæ nihilominùs viris intelligentibus admirationem mouet.



1. Figura.

Conus A B CD *iſoſcelius rectanguli cuius baſis circularis* B C D *ſecetur per centrum* E *diametra* B D: *per quam & verticem coni* A *agatur planum* A B D, *deinde aſſumpto in diametro* B D, *quouis puncto* F *erigatur ex hoc normaliter ad diametrum* B D, *recta* F C; *fiatq; planum* H F C *occurrens rectæ* D A *productæ in* H. *Deinde per punctum quodlibet* K *lineæ* F G *ſtatuatur* L K M *æquidiſtans diametro* B D: *ſecundùm quam parallelum planum collocetur* L I M *baſi* B C D: *& ſit* K I *communis ſectio plani* H F C *& ſuperficiei* L I M. *Fiat denique quadrato* K I *æquale rectangulum* G K *hoc eſt* L K M. *ex puncta tandem* H *demiſſa linea ad punctum* N, *ducatur* G O *æquidiſtans* K N: *&* F B *producta concurrat cum* H O *in puncta* P. *Dicit igitur Apollonius ſectionem* G I C, *quam nomine hyperbolæ indigetat, habere has proprietates.*

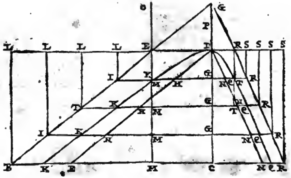
Primò.

Primò vt quæuis applicata ad rectam GF æquidiſtans in plano GIC, poſſit rectangulum GKN, hoc eſt æquetur eidem; quod rectangulum ita determinat vt habeat nimirum altitudinem GK quantitatem interceptam inter G terminum diametri hyperbolici, & K punctum ex quo eſt educta KI æquidiſtans CF, quam vocat ordinatim poſitam ad diametrum GF.

Secundò vt rectangulum QR ſimile ſit illi quod ſit ex OG, in GH ducto.

Latus autem GO appellat latus rectum hyperbolæ ex eo quod normaliter ducta linea ex H termino rectæ GH (quam nominat latus tranſuerſum eiuſdem hyperbolæ GIC;) ad punctum O lineæ GO: (quæ perpendiculariter eſt erecta ad diametrum HF.) rectangula quæcunque orta ex altitudine GK, & longitudine KN, vel ex altitudine GF & longitudine FP, ſint æqualia quadratis linearum KI, FC: excedunt autem rectangula GKN, GFP parallelogramma ſub latere recto GO, & GK, vel GO & GF, figuris QR, SB, quæ ſimiles exiſtunt figuræ conſtitutæ ex latere recto GO, & tranſuerſo GH: quod manifeſtum eſt ex producta diametro HO. quæ ſimilia triangula HOG & OQN, OSP, producit. quocirca ſi rectis KI, FC ponantur æquales KT, FV, erit GTV, eadem hyperbola quæ in cono ABCD per ſectionem GICF producta fuit.

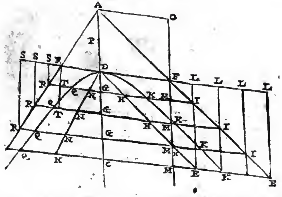
3. Figura.



Quod vt plenius intelligatur, conuertamus nos ad conſiderandum ſcema 3. & 4. & reperiemus ea prorſus conuenire cum præcedenti figura ex cono erutâ; nam ad rectam AD productã applicantur lineæ GI æquidiſtantes inter ſe: & AB conſtitutâ cum rectâ AC ad quemlibet angulum, ponitur DE æquidiſtans AB. rectangulis inſuper HGI quadrata GK æqualia conſtituantur: & ex vi diſcurſus Apollonici patet GK hyperbolam eſſe; nam quadrata GK poſſunt rectangula ſub DF latere recto & DG constructa, excedentia figurâ ML ſimili figuræ DO, prout vult Apollonius, cùm rectangula GL altitudinem habeant DG, & ſint applicata ad FD latus rectum excedendo figura LM, quæ ſimilis planè eſt illi quæ ſub latere recto FD, & AD tranſuerſo conſtructa eſt; in tertia figura in qua ordinatim applicantur rectæ GK, ad angulos rectos, linea AC axis eſt hyperbolæ; in quarta autem recta eadem AC tantum eſt, vna ex ſecundarijs diametris; quia ad obliquos angulos ordinatim poſitas diſpeſcit. Recta quoque AD tranſuerſa diameter & latus tranſuerſum nihilominùs ab Apollonio appellatur, & DF rectum latus, ſecundum quod poſſunt omnes lineæ GK quæ ordinatim applicantur ad diametrum AC. punctum quoque P quod diuidit AD bifariam, centrum figuræ nuncupat.

Sed priuſquam vlterius pergamus, reſtat hoc loco elucidanda quæſtiuncula cuius ſolutio luminis non parum ſecum adducet ſi benè percipiatur: cùm in præſenti propoſitione quam exponimus, vniuerſaliter pronuntiatum ſit ſecundùm primum ſcema. Recta AB diuiſâ vtcunque in C, vt rectangulum ABC ad ABC, rectangulum eam rationem obtineat quam quadratum BD, ad BD quadratum, exſurget CDB hyperbola, quare ab Apollonij videmur placito diſcedere qui videtur poſtulare vt rectangula ABC æqualia ſint quadratis BD:

an


4. Figura.

an ſcilicet ſi rectangulis NGI, *fiant æqualia quadrata* GQ, *figura* DGQ *non ſit futura hyperboles, ex mente Apollonij, quod ex ſenſu noſtræ propoſitionis concedi debet.*

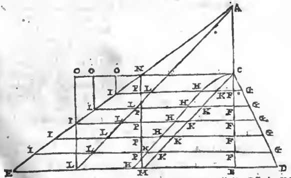
Ad ſoluendum hunc nodum nullam praxim commodiorem inuenio quàm eam ipſam conſtructionem accõmodandi Apollonico diſcurſui, quod proxima propoſitione conabimur præſtare.

PROPOSITIO VIII.

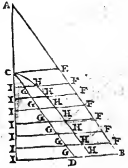
REcta AB diuiſa ſit vtcunque in C; ex quo ductâ quauis CD, ponatur quæcunque AL quam interſecent æquidiſtantes GL. Denique fiant rectangulis GFL æqualia quadrata FH.

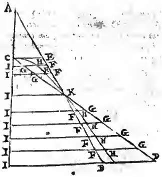
Dico CHB eſſe hyperbolam.

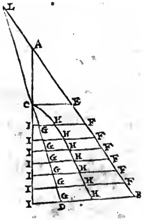
Demonſtratiò.



FIat rectæ CB æqualis BM, & poſita CM occurrat parallelis GL in KK: erunt igitur rectis CF æquales FK, tandem rectangulis GFL ſtatuantur æqualia KFI, patet AIE lineam rectam eſſe & GF ad FL, eam rationem continere FL.
quam FK ad FI, ob æqualitatem rectangulorum: igitur rectangula KFI hoc eſt CFI, æqualia erunt quadratis FH. quare rectangulum CFI cùm ſit applicatum ad rectam CN habens latitudinem CF excedat quoque rectangulum NCF figura OP ſimili figuræ ſub NC, & CA, patet figuram CHH, eam ipſam eſſe quæ ab Apollonio deſcripta fuit: hinc igitur patet dubij expeditio: quod præcedens ſcholion in medium attulerat ſub finem dilucidandum. lineam AC, diametrum nominat & ſimul latus tranſuerſum lineæ CN, quam latus rectum dicit: punctum autem quod AC bifariam ſecat figuræ centrũ indigetat: quia omnes diametros bifariam diuidit.







Scholion.

Vides ingenue Lector varios eſſe caſus præcedentium propoſitionum quæ de conſtructione hyperbolæ tractant per interpoſitionem rectarum HI quæ mediæ ſint inter rectas FI, GI: primo etenim ſcemate æquidiſtantes ſunt AB & CD. ſecundo verò eædem rectæ ſibi inuicem occurrunt in puncto K. quod ipſi etiam ſectioni commune eſt. in tertio denique fit concurſus earundem linearum in L puncto per quod ſectio nulla ratione, licet in infinitum producatur, tranſire poteſt. nihilominùs vera ſunt & genuina hyperbolæ: ex eo ſolo capite quod rectangula FIG, æqualia ſint quadratis IH. quod ex iis quæ præmiſſa ſunt liquidò conſtat: rectangulum namq; FIG ad FIG rectangulum, proportionem habet compoſitam ex ratione GI, ad GI, & ex ratione IF ad IF. quare ſimiliter quadratum HI ad HI quadratum, rationem habet ex iiſdem compoſitam: verum etiam rectangulum AIC, ad AIC rectangulum rationem habet compoſitam ex ratione CI, ad CI hoc eſt ex ratione IG ad IG, & ex ratione AI ad AI, hoc eſt IF ad IF: igitur & quadratum IH, ad IH quadratum proportionem eandem habet quæ inuenitur inter rectangula AIC & AIC. Vnde manifeſtò conſtat, ex iis quæ præmiſimus, ſectiones IH eſſe hyperbolicas; in quouis caſu hic expoſito: qui commodiſſimè inſeruire poterit ad cuiuſuis hyperbolæ conſtructionem.

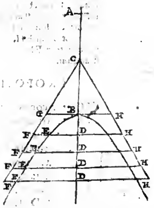
PRO-

PROPOSITIO IX.

Diuiſà AB bifariam in C fiat vt rectangulum ADB ad ADB, ita DE quadratum ad quadratum DE. fiat deinde vt ADB rectangulum ad rectangulum ADB vnà cum CB quadrato, ita quadratum DE DF quadratum.

Dico CGF eſſe rectam lineam.

Demonſtratio.



Quoniam rectangulum ADB ad ADB, cum quadrato BC eam ponatur continere rationem quam habet quadratum DE ad DF quadratum, igitur vt rectangulum ADB ad quadratum DE, ita rectangulum ADB vnà cum quadrato CB. hoc eſt ita quadratum CD ad quadratum DF. quare vt CD quadratum ad CD quadratum, ita DF quadratum ad quadratum DF. hoc eſt CF quadratum ad quadratum CF. Patet igitur CGF eſſe in directum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

Iſdem poſitis:

Dico nunquam punctum E fore commune cum puncto F.

Demonſtratio.

Quoniam eſt quadratum CD ad CD quadratum vt DF ad DF quadratum, & ADB rectangulum, ad ADB rectangulum, vt quadratum DE ad DE, quadratum; igitur erit rectangulum ADB ad quadratum DE, vt quadratum CB, ad rectangulum FEH. ergo vt CB quadratum ad CB quadratum, ita rectangulum FEH ad FEH, rectangulum; igitur FEH rectangula inter ſe æqualia ſunt: igitur FD quadratum cùm excedat quadratum ED, rectangulo FED, erit linea FD maior linea ED: non igitur erit vmquam commune punctum E cum puncto D. Quod fuit demonſtrandum.

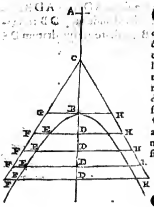
PROPOSITIO XI.

Iſdem poſitis:

Dico quo remotius erit D à puncto B, eo FE recta remotior à linea GB minor erit FE, viciniore rectæ GB.

Demon-

Demonſtratio.

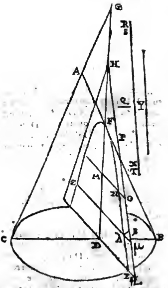


CVm rectangulum ADB ad ADB, rectangulum ſit vt quadrarum DE ad DE, quadratum; igitur quoremotius D diſtat à B, puncto, eo maius erit latus DE, latere DE quod vicinius eſt rectæ GB. & conſequenter erit FD latus maius latere FD quo punctum D, remotius abeſt à puncto B; ac proinde idem aſſerendum de recta EH; quæ maiore interuallo diſtat à B, puncto; vnde cum FEH rectangula ſint inter ſe æqualia; igitur remotior FE eſt ad viciniorem lineam FE ſicut vicinior EH, eſt ad remotiorem EH, igitur FE; remotius minus eſt latere FE viciniore. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

SEcetur conus ABC plano per axem ABC triangulum exhibens in quo ducatur quæuis recta DF concurrens cum CA producta in G extra conum: erectâ denique DE normaliter ad CB, fiat ſectio ſecundùm rectas GD, DE. tandem diuiſâ GF in H bifariam, fiat vt rectangulum GMF ad rectangulum GMF vnà cum quadrato HF ita quadratum MN ad MO quadratum, & ducatur HO.

Dico HL lineam ſectioni FDE nunquam occurſuram.



Demonſtratio.

a 1.huius.

POnatur MO æquidiſtans DL: oſtenſum eſt rectangulum GMF ad. GDF rectangulum eam habere rationem quam MN quadratum ad quadratum DE, ſed vt GMF rectangulum ad rectangulum GMF vnà cum quadrato HF, hoc eſt vt rectangulum GMF ad HM quadratum, ita eſt ex conſtructione MN quadratum ad MO quadratum: igitur vt GMF rectangulum ad MN quadratum ita eſt quadratum HM, ad MO quadratum hoc eſt HD quadratum ad DL quadratum ſed per præcedentem propoſitionem oſtenſum eſt punctum E nunquam fore commune cum puncto L; ergo HL ſectioni non occurret. Quod demonſtrandum fuit.

Corolla-

Corollarium.

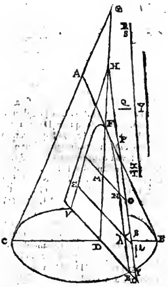
Iſdem poſitis ſequitur lineam HL, quo magis producetur, eo ſectioni propinquiorem fieri. Oſtenſum eſt enim penultima propoſitione punctum L quo maiori interuallo diſtabit à puncto H, eo vicinius futurum ſectioni FNE. Igitur linea HL eo magis protrahetur, eo ſectioni propinquior fiet.

PROPOSITIO XIII.

Iſdem poſitis:

Dico hyperbolam productam ad aſymptoton productam ita vicinam fieri vt quouis interuallo dato diſtantia inter hæc minor ſit futura.

Demonſtratio.



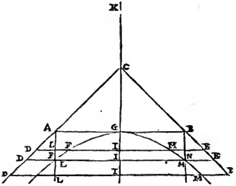
Atum ſit interuallum Q, ponatur FP in termino diametri DF contingens ctionem FNE: erit hæc parallela O. fiat autem rectangulum ſub RS iæ ſit minor Q & alia ST æquale quaato FP. & applicetur ad diametrum D ordinatim pars eius SX, quæ XT ſiduum habeat æquale RS. Sitque il- EDV. igitur EL æqualis eſt XT, im ELV rectangulum, hoc eſt RST t æquale quadrato FP. Quod ſi fiat reangulum ſuper Q, & Y, æquale quaato FP, erit SX maior Y, nam Q aior eſt quàm ſit RS. quare ſi ponatur ordinatim ad diametrum FD, cadet per rectam VE. ſit igitur illa Zλ, Q æqualis λμ. quod ſi itaque λμ EL normales ſint ad aſymptotos atet propoſitio, cùm λμ poſita ſit æquas Q, & nihilominus EL oſtenſa ſit il- minor: à normalibus enim ad aſymptoos ductis à ſectione, deſumitur aſymptoorum à ſectione diſtantia. Quod ſi λμ, L non ſint normales ad HL, ex λ & E ucantur normales λβ, EY. cùm itaque μ & EL, item λβ, & EY parallelæ int, & anguli λμβ, ELY æquales, & tamen latus λμ oſtenſum ſit maius eſſe latere EL, etiam reliqua latera reliquis lateribus, & λβ, latere EY maius erit, ergo diſtantia EY minor eſt data Q. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

Angulum ACB ſubtendat linea AB, qua bifariam in G diuiſa, ponantur AB æquidiſtantes DE, quæ in F ſecentur, vt DFE rectangula æqualia ſint quadrato AG.

Dico GFF ad eandem eſſe hyperbolam.

Demonſtratio.



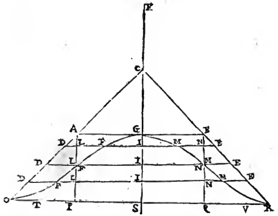
PRoductâ GC in K, vt CK, ſit æqualis CG, ponantur AL, BN æquidiſtantes GI: cùm AB, DE æquidiſtent, & AB in G diuiſa ſit bifariam, erit & DE
a Per elementa. in I bifariam diuiſa; quare DI quadrata, æqualia ſunt quadratis LI vnà cum [a] rectangulis DLE. ſed & DI quadrata, æquantur etiam FI quadratis, vnà cum rectangulis DFE; æqualia igitur ſunt quadrata LI, vnà cum rectangulis DLE, quadratis FI, vnà cum rectangulis DFE: ſunt autem per hypotheſim quadrata LI id eſt, AG, rectangulis DFE æqualia, reliqua igitur DLE æqualia ſunt quadratis FI. quia verò AL ipſi CG & DL ipſi AG æquidiſtat, vt DL ad LA, ſic AG eſt ad GC, & vt DL ad AG, id eſt LI, ſic AL hoc eſt GI, ad GC; ergo etiam vt DL ad LN, ſic AL ſiue IG, ad GK; & vt DL ad LE, ſic IG ad IK: rectangula igitur DLE proportionalia ſunt rectangulis GIK: ſunt autem DLE rectangula oſtenſa æqualia quadraris FI, igitur GIK rectangula proportionalia
b 7. huius. ſunt quadratis FI: quare GFF ad [b] eandem ſunt hyperbolam ſimili modo ſi quadrato GB æqualia fiant rectangula DME, oſtendentur puncta MMG eſſe ad hyperbolam: & quia quadrata AG, GB, adeoque & rectangula DFE, DME æqualia ſunt, rectæ FD, ME æquales quoque ſunt: vnde & reſiduæ FM in L biſſectæ ſunt, & FGM ad eandem hyperbolam.

PROPOSITIO XV.

IIſdem poſitis:
Dico AC, CB eſſe aſymptotos.

Demon-

Demonſtratio.



OCcurrant enim ſi fieri poteſt hyperbolæ in punctis O & R. & fiat quadrato A G, æquale rectangulum O T R. erit itaque punctum T, in ipſa ſectione GFF, adeoque & in recta A O. Idem igitur eſt punctum O & T, cùm vtrumque uarum linearum O T, A O, communis ſit interſectio: quod eſt contra conſtrutionem, quâ O T R, rectangulum æquale ſit quadrato A G: eodem modo oſtenletur punctum R commune non eſſe rectæ C R, & ſectioni: igitur F G M hyperbola rectis A C, C B, nuſquam occurrit. Quod verò ſemper magis ac magis ad hyperbolam accedant, ſic oſtendo: cùm D F E rectangula per hypotheſim æqualia int quadrato A G adeoque & inter ſe, vt D F ad D F, ſic F E ad F E, reciproè: ſed F E quæ remotior eſt à vertice G maior eſt, F E viciniore, igitur & F D, ectæ A G vicinior, maior eſt F D, remotiore ab A G: ſimiliter oſtendetur rectas M E eò magis decreſcere quo remotiores ſunt à vertice G: rectæ igitur A C, C B magis ſemper magiſque ad ſectionem accedunt; & nuſquam occurrunt. aſymptoti ſunt igitur, hyperbolę G F F. Quod erat demonſtrandum.

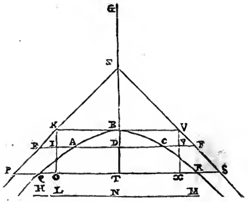
Corollarium.

HInc ſequitur rectas, inter aſymptotos & hyperbolam interceptas æquales eſſe: oſtenſæ ſunt enim in propoſ. 14. huius rectæ D F, M E æquales. vnde cùm per 15. huius puncta D & E ad aſymptotos ſint, patet veritas Corollarij.

PROPOSITIO XVI.

DAtæ hyperbolæ aſymptotos ponere.

Conſtructio & demonſtratio.



SIt A B C hyperbola cuius aſymptotos exhibere oportet: diameter ſectionis ſit GB, quâ in Z bifariam diuiſa ordinatim ad illam poſitæ ſint A D C: deinde fiat rectangulo GDB, aliud ſimile HLM. quod æquale quoque ſit quadrato DA, tum HM, diuiſâ bifariam in N, fiant DE, DF, æquales NH dimidiæ HM. ponanturque ex centro lineę ZE, ZF. Dico illas eſſe aſymptotos hyperbolæ A B C. Poſitâ enim BK, quæ æquidiſtet DE, ponatur KO, parallela BD, & PS æquidiſtans KB. Erit ergo vt EI ad IK, id eſt BD, ſic KB ad BZ, ſiue KV, id eſt IY dupla KB ad GB duplam ZB, & permutando vt EI ad IY, ſic BD ad BG, & EI ad IF, vt BD ad DG: vnde EIF rectangulum ſimile eſt rectangulo GDB adeoque & ſimile rectangulo HLM; & cum ED, HN ex conſtructione æquales ſint, æqualia quoque ſunt rectangula EIF, HLM: quare & EIF, rectangulum æquale quoque eſt quadrato AD. eodem modo oſtenditur POS rectangulum ſimile rectangulo GTB & æquale quadrato QT. Rurſum cùm quadratum ED, tam
a Ex 14. huius. æquale ſit[a] quadrato AD, vnà cum rectangulo EAF, quàm EIF rectangulo cum quadrato ID, quadratum AD vnà cum rectangulo EAF æquale eſt quadrato ID vnà cum rectangulo EIF: demptis igitur æqualibus, AD quadrato & rectangulo EIF, manet EAF rectangulum æquale quadrato ID, id eſt KB: eodem modo oſtenditur PQS rectangulum æquari quadrato KB; æqualia igitur ſunt rectangu-
b 15. huius. la EAF, PQS: vnde ZE, ZF aſymptoti[b] ſunt hyperbolæ ABC. Exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

Corollarium.

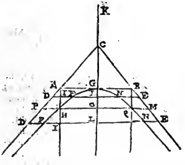
HInc ſequitur, poſitis aſymptotis EZ, ZF: hyperbolæ, A B C, & EAF ordinatim ad diametrum GB, &c. vt antè rectangula GDB ſimilia eſſe rectangulis EIF: manifeſta eſt demonſtratio, ex diſcurſu in priori demonſtratione adhibito.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

REcta AB inter aſymptotos AC, CB, hyperbolæ FGN conſtituta, in G vertice diametri KG diuiſa ſit bifariam; & AB quidem, æquidiſtent DFE; quas in I ſecet recta AH, æquidiſtans CG diametro. Dico LF quadratis æquari rectangula DIE.

Demonſtratio.



ASſumpto in AI puncto quodam H, per quod ducta PHM; æquidiſtans AB, rectangulum PHM æquale faciat quadrato AG; patet H punctum eſſe in a perimetro ſectionis, & quia DIE, PHM rectangula, ſimilia b ſunt rectangulis KLG, KOG, rectangula DIE PHM proportionalia ſunt quadratis FL, HO: & DIE rectangulum ad quadratum FL, vt PHM rectangulum ad quadratum HO: æqualia autẽ ſunt ex conſtruct. quadratum HO id eſt AG, & rectangulum PHM; æquantur igitur DIE rectangula quadratis FL. Quod erat demonſtrandum.

a 14. huius.

b Coroll. 16. huius.

PROPOSITIO XVIII.

IIſdem poſitis;

Dico rectangula DFE inter ſe æqualia eſſe, vel quadrato AG.

Demonſtratio.

QVadratis DL æqualia ſunt rectangula DIE vnà cum quadratis LI; ſed LD quadrata quoque æqualia ſunt quadratis FL, vnà cum rectangulis DFE, quadrata igitur LF vnà cum rectangulis DFE, æqualia ſunt quadratis LI vnà cum rectangulis DIE; ſed FL quadratis, per præcedentem æqualia ſunt rectangula DIE; igitur & DFE rectangula reliqua, æqualia ſunt quadratis IL id eſt AG quadrato: vnde & inter ſe quoque ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.

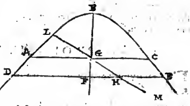
Corollarium.

HInc patet, rectas DF, eo fieri minores, quo remotiores ſunt à contingente ſibi parallela. patet ex antè dictis.

PROPOSITIO XIX.

CViuſuis lineæ quæ in duobus punctis hyperbolæ occurrit diametrum aſſignare.

Conſtructio & demonſtratio.



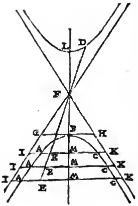
HYperbolam ABC ſecet recta quæuis AC, oportet illius aſſignare diametrum, poſita AC æquidiſtante DE, biſecentur AC, DE in G & F punctis, per quæ recta agatur BF. dico illam eſſe diametrum quæſitam: ſin verò ſit alia quæuis linea LH diameter, occurratque DE rectæ in H: quia igitur LH diameter eſt æquidiſtantium AC, DE, biſecat

a Deſin. 2. huius.

biſecat [a] eaſdem in G & H. ponebatur autem DE biſecta in F; puncta igitur F & H, vnum idemque ſunt: & LH linea eadem cum BF: diameter igitur quæſita eſt BF.

PROPOSITIO XX.

Diametri omnes hyperbolæ, in vno eodemq; conueniunt puncto.



Demonſtratio.

b 16. huius.

c Coroll. 15. huius.

d Deſin. 2. huius.

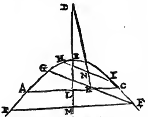
SIt ABC hyperbolæ diameter DE, quâ diuisâ bifariam in F; ponantur [b] aſymptoti FG, FH: & per F ducatur FB occurrens hyperbolę in B: ponatur autem per B linea GH quæ in B biſſecta ſit, illique æquidiſtantes ponantur IAK, occurrentes FB lineę in M: quoniam igitur HG in B diuiſa eſt bifariam, rectæ IK illi æquidiſtantes in M quoque biſſecantur: æquales autem ſunt [c] IA, CK, reſiduæ igitur AM, MC æquales quoque ſunt; diameter igitur [d] ſectionis eſt FB: occurrit autem ED diametro in F. conſtat ergo veritas propoſitionis.

Corollarium.

OStenſum eſt propoſition. 3. huius, rectas omnes, per F ductas, & oppoſitis ſectionibus interceptas, in F bifariam diuidi; punctum verò illud, centrum cum Apollonio apellamus; quod diametros omnes bifariam diuidit.

PROPOSITIO XXI.

DAtæ hyperbolæ centrum aſſignare.



Conſtructio & demonſtratio.

e 19. huius.

f Ex elementis.

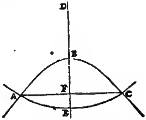
SIt ABC hyperbola cuius centrum oportet aſſignare: ponantur AC, EF duę quæuis parallelę, [e] quarum diameter ducatur DB, ponantur autem & aliæ binæ æquidiſtantes CG, FH; quibus, in N & K biſſectis, ponatur diameter NK, quæ producta [f] occurret DB diametro in puncto quodam D; manifeſtum eſt ex præcedenti propoſitione punctum D, ſectionis centrum eſſe. exhibuimus ergo, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

DAtæ hyperbolæ axem aſsignare.

Conſtru-

Conſtructio & demonſtratio.



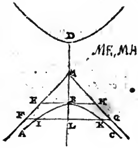
DAta ſit hyperbola ABC cuius axem oportet exhibere: inuento centro D deſcribatur interuallo quouis, circulus AEC occurrens hyperbolæ in A & C punctis, quibus iunctis, ſecetur AC bifariam in F, ducaturque DBF: dico DF axem eſſe hyperbolæ: cùm enim DE ſemidiameter circuli AEC, bifariam diuidat rectam AC, in circulo applicatam, ad angulos illam ſecat rectos, adeoque & omnes illi parallelas; igitur cùm è centro hyperbolæ, quoque educta ſit, recta DB axis eſt hyperbolæ ABC. fecimus igitur quod erat poſtulatum. a 21. huius.

Puncta interſectionum A & C Geometrice exhibebimus parte huius libri ſexta.

PROPOSITIO XXIII.

AD datam diametrum in hyperbola ordinatim lineam ponere.

Conſtructio & demonſtratio.



DAta ſit hyperbola ABC, cuius diameter data ſit DB, oportet illi ordinatim applicare lineam IK: diuiſa DB bifariam in M, ponantur hyperbolæ aſymptoti [b] DE, DH: actâque per B verticem diametri, rectâ EH, quæ in B diuiſa ſit bifariam, ponatur EH, æquidiſtans FG, occurrens ſectioni in I & K. dico IK lineam omneſque illi æquidiſtantes bifariam diuidi à diametro DB: cùm enim EH in B diuiſa ſit bifariam, ipſique EH æquidiſter FG, erit & illa in L bifariam diuiſa: Sunt autem & FI, [c] KG æquales; igitur & reliquæ LI, LK inter ſe æquales ſunt; igitur IK lineę omneſq; illi æquidiſtantes à DB diametro biſſecantur. Applicuimus igitur ad diametrum DB ordinatim lineam IK. Quod erat faciendum.

b 16. huius.

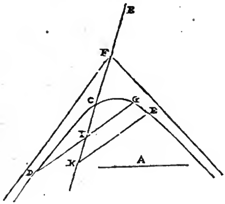
c Coroll. 15. huius.

PROPOSITIO XXIV.

DAtâ hyperbolâ & diametro, applicare datam rectam ordinatim ad eandem diametrum.

Conſtru-

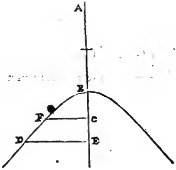
Conſtructio & demonſtratio.



DAta ſit A recta quam ad diametrum datam BC hyperbolæ DCE, ordinatim oporteat applicare: ponatur per præcedentem recta quæuis DG, ordinatim ad diametrum BC: quæ eidem occurrat in puncto I: & fiat vt quadratum IG ad quadratũ A ita BIC rectangulum ad BKC rectangulum; & per K ponatur KE parallela IG. Dico illam ſatisfacere petitioni; eſt enim rectangulum BIC ad quadratum ordinatim poſitæ IG, vt [a] rectangulum BKC ad ordinatim poſitam in puncto K: ſed ex conſtructione vt rectangulum BIC ad rectangulum BKC, ita eſt IG quadratum ad A quadratũ. Quadratum igitur KE, æquale eſt A quadrato: quia verò KE æquidiſtat IG ordinatim poſitę, recta quoque KE ordinatim ad BC applicata eſt, perfecimus igitur quod poſtulatur.

a 21 huius.

PROPOSITIO XXV.



OPorteat ex dato in diametro hyperbolæ puncto ordinatim lineam applicare.

Conſtructio & demonſtratio.

DAtum ſit in diametro AB, punctum C, ex quo oporteat rectam ad eamdem diametrum ordinatim applicare: ponatur quæuis [b] ordinatim DE, cui ex C æquidiſtans ducatur CF. patet CF ſatisfacere petitioni.

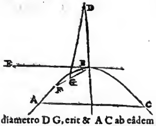
b 23. huius.

PROPOSITIO XXVI.

OMnis linea per verticem diametri hyperbolæ ducta, & ordinatim ad eamdem diametrum poſitæ æquidiſtans, ſectionem contingit.

Demon-

Demonſtratio.



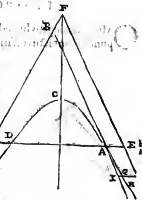
SIt ad ABC hyperbolæ diametrum DB, ordinatim applicata AC, cùi per B verticem diametri æquidiſtans ponatur EB, dico illam contingere ſectionem. ſi enim non contingat, occurrat denuò hyperbolæ in quòdam puncto F: diuiſaque FB biſariam in G, ponatur diameter GD: cùm igitur FB æquidiſtans AC, biſariam ſecetur à diametro DG, erit & AC ab eâdem diametro [a] biſariam quoque diuiſa: quod fieri non poteſt, cùm ad DB diametrum ordinatim ponatur applicata: igitur EB hyperbolam non ſecat, ſed contingit. Quod erat demonſtrandum.

[a] Deffin. 21 huius.

PROPOSITIO XXVII.

OMnis contingens hyperbolam, vtrique aſymptotorum occurrit.

Demonſtratio.



REcta AB contingat hyperbolam ACD in A. dico AB productam vtrique aſymptotorum occurrere. Sin vero, æquidiſtet AB aſymptoto EF; poſitaque per A quauis linea EAD, ducatur æquidiſtans HI, quæ AB lineæ occurrat in I, hyperbolæ in G: quoniam igitur tam AI, EH lineæ quàm EA, HI æquidiſtant, rectæ EA, HI æquales ſunt: eſt autem EA [b] maior HG, igitur & HI maior eſt HG. punctum igitur I cadit intra ſectionem, adeoque AB, recta hyperbolam non contingit: non igitur AB æquidiſtat aſymptoto EF: ſed vtrique occurrit.

[b] Corell. 18. huius.

Corollarium.

HInc ſequitur primò ordinatim poſitas, vtrimque ad aſymptotos pertingere, cum tangenti æquidiſtent.

Sequitur ſecundò rectas omnes intra aſymptotos poſitas, quę diametri non ſunt, eiſque non æquidiſtant, eiſdem occurrere.

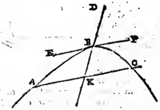
Sequitur tertiò lineas omnes quæ diametri non ſunt, ſectioni in duobus tantum punctis occurrere: quod patet, cùm demonſtratum ſit, rectam omnem occurrentem ſectioni quę nec contingit nec aſymptoto æquidiſtat, ita à ſectione diuiſam eſſe, vt partes inter [c] ſectionem & aſymptotos interceptę, ſint inter ſe æquales, nec poſſet diuidi vlla linea in quatuor punctis vt rectangula quatuor æqualia exſurgant ſub partibus lineæ diuiſæ.

[c] Coroll. 15. huius.

PROPOSITIO XXVIII.

PEr datum in perimetro ſectionis punctum contingentem ducere.

Conſtructio & demonſtratio.

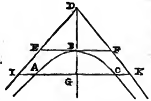


SIt in ABC hyperbolæ perimetro datum punctum B, per quod oportet contingentem ducere. Inuento centro D, ponatur DB diameter, & ad illam ordinatim linea AC, cui per B parallela ponatur EF. conſtat ex præcedenti propoſitione EF contingere hyperbolam in B.

PROPOSITIO XXIX.

OMnis contingens hyperbolam, & cum aſymptotis conueniens, in puncto contactus bifariam ſecatur.

Demonſtratio.



a Coroll. 15. huius.

OCcurrat EBF, contingens hyperbolam ABC in B; vtrique aſymptotorum in E & F; dico EF in B diuidi bifariam. Ducta diametro DB ponatur ad illã ordinatim AGC, vtrique aſymptotorum occurrens in I & K: erit igitur AC in G bifariam diuiſa: oſtenſæ autem ſunt IA, CK a quoque æquales, tota igitur IK in G, adeoque EF illi æquidiſtans, in B ſecta eſt bifariam. Quod demonſtrare oportebat.

PROPOSITIO XXX.

NVlla linea, contingens hyperbolam per centrum tranſibit.

Demonſtratio.

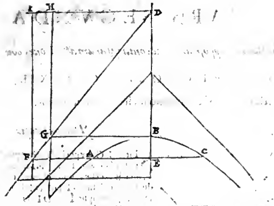
b 17. huius. PAtet, cùm omnis contingens vtrique aſymptotorum oſtenſa b ſit occurrere in diuerſis punctis.

PROPOSITIO XXXI.

IN data hyperbola datæ diametri latus rectum aſſignare.

Con-

Conſtructio & demonſtratio.



SIt datæ hyperbolæ A B C aſſignata diameter D B, cuius latus rectum oporteat exhibere. Ponatur contingens hyperbolam recta B G, in termino datæ diametri D B. Cui ponatur æquidiſtans A C, diametro occurrens in E: & fiant tres lineæ B E, E A, E F proportionales, iuncta deinde recta D F occurrat B G in G quodam puncto: Dico rectam B G eſſe latus rectum quod inſeruit diametro B D: perficiantur enim parallelogramma B H, E I circa diametrum D F: quadratum igitur A E poteſt rectangulum F B, ſuperatque rectangulum G E, rectangulo F G ſimili rectangulo G D, quod lineis D B G continetur: linea igitur B G latus rectum eſt ex mente Apollonij.

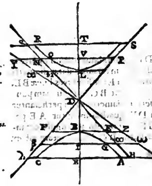
HYPERBOLÆ
PARS SECVNDA

Sectionum oppoſitarum ac coniugatarum affectiones conſiderat.

PROPOSITIO XXXII.

SEctiones oppoſitæ communes habent aſymptotos.

Demonſtratio.



SInt ABC hyperbolæ aſymptoti DE, DF: poſitoque axe DB, ducantur contingenti per B, ductæ, æquidiſtantes GI, AK: productis deinde lineis ED, FD, BD, fiant DL, DV, DT æquales ipſis DB, DI, DK; ponanturque per L, V, T lineæ ML, NP, QS parallelę lineis EB, IG, HK: quoniam igitur æquales ſunt lineæ DL, DB, & anguli DLM, [a] DBE ad axem recti; triangula DLM, DBE adeoque & latera LM, BE æqualia ſunt: ſimiliter oſtenduntur latera VN, TQ æqualia lateribus αι, HK: igitur ſi fiant LM quadrato æqualia rectangula NOP, QRS; puncta L, O, R [b] ad hyperbolam ſunt, cuius aſymptoti DM, DP: & NOP, QRS rectangula æqualia ſunt rectangulis αGβ, HAλ quia EB, LM quadrata æquantur; æqualia autem ſunt quadrata NV, QT quadratis αι, HK; reliqua igitur quadrata OV, RT æqualia ſunt reliquis GI, AK; ſunt autem per conſtructionem diſtantiæ DL, DV, DT æquales diſtantiis DB, DI, DK, [c] oppoſitę igitur ſectiones ſunt LOR, BGA; quę communibus gaudent aſymptotis. Quod erat demonſtrandum.

a Ex defin. ordinatim poſitarum.

b 14. huius.

c Ex 3. huius.

PROPOSITIO XXXIII.

SEctiones oppoſitæ latera recta habent æqualia, quæ communi inſeruiunt diametro.

Demonſtratio.

EAdem aſſumatur figura; ſitque BZ latus rectum hyperbolę ABC, & per Z & D centrum, recta ducatur, occurrens LM lineæ in X: patet LX æquari ZB (cùm DB, DL lineæ æquales ſint, & anguli DLM, DBE æquales, ob LM, BE parallelas.) dico autem LX latus rectum eſſe hyperbolę ROL: recta ZX producta, occurrat NV, αι lineis in Y & ω: quoniam igitur ZB latus rectum eſt, & GI ordinatim poſita ad diametrum DB, proportionales ſunt [d] lineæ BI, GI, ιω; eſt autem BI æqualis LV, per hypotheſim, & ex demonſtratione præcedenti, rectæ IG, ιω æquales VO, VY: rectę quoque LV, VO, VY proportionales ſunt: quare LX latus [e] rectum eſt hyperbolę LOR. ſectiones igitur oppoſitę, &c. Quod erat demonſtrandum.

d Ex 31. huius.

e Ibid.

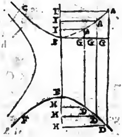
PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

SInt ABC, DEF oppoſitæ ſectiones, quarum communis eſt diameter BE: cui æquidiſtantes ponantur quæuis AD, occurrentes contingenti per B actæ in G; ponanturq; ordinatim AI:

Dico AGD rectangula æquari rectangulis BIE.

Demonſtratio.



POnantur ex D ordinatim DH ad diametrum BE. cùm igitur tam AD, IH, quàm AI, GB, [a]DH lineæ æquidiſtent, erunt AI æquales DH: & [b]HE æquales IB; rectangula igitur HBI id eſt DGA, æqualia ſunt rectangulis EIB. Quod erat demonſtrandum.

a Coroll. 5. huius.
b Ibid.

PROPOSITIO XXXV.

EAdem manente figurâ:

Dico AGD rectangula proportionalia eſſe quadratis GB.

Demonſtratio.

EST enim BIE rectangulum ad rectangulum BHE, vt [c] AI quadratum ad quadratum AI, id eſt BG ad quadratum BG: ſed AGD [d] rectangula æqualia ſunt rectangulis BIE: quadratis igitur BG, proportionalia quoque ſunt rectangula AGD: quod erat demonſtrandum.

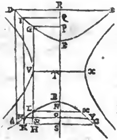
c Ex 1 huius.
d 34. huius.

PROPOSITIO XXXVI.

SInt ſectiones oppoſitæ ABC, DEF, & diametro cuiuis EB, ponantur parallelæ GH, IK; occurrentes AC ordinatim poſitæ ad EB, in punctis K & H.

Dico GHL rectangulum ad rectangulum IKM, eandem habere rationem, quam rectangulum AHC ad AKC rectangulum.

Demonſtratio.

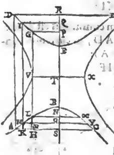


POſitâ AD æquidiſtante EB, conſtituantur ordinatim IQ, GP, LN, MO, DR ad diametrũ EB: erit ergo [e] RES rectangulum, æquale rectangulis RQS, vnà cum rectangulo QEO. Similiter rectangulum QEO æquale rectangulis QPO, PEN: quadratum autem AS æquale eſt rectangulo AKC, vnà cum KS quadrato; quemadmodum etiam quadratum MO æquale eſt rectangulo MZY, vnà cum ZO quadrato: eſt autem rectangulum RES ad quadratum AS, [f] vt QEO rectangulum ad quadratum MO id eſt KS. Igitur & reliquum rectangulum RQS eſt ad reliquum AKC, vt QEO rectangulum ad quadratum KS; & permutando RQS rectangulum ad rectangulũ QEO, eſt vt rectangulum AKC, ad KS quadratum hoc eſt

e Per elementa.
f Ex 1 huius.

 MO.

a Ex 34. huius.



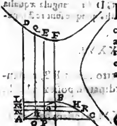
MO. eſt autem RQS a rectangulum æquale IKM rectangulo: igitur & IKM rectangulum, eſt ad rectangulum QEO, vt rectangulum AKC ad KS quadratum, erat autem RES rectangulum ad quadratum AS, vt rectangulum QEO ad quadratum MO. Igitur vt QEO rectangulum hoc eſt EOB ad quadratum MO, ita eſt RQS rectangulum hoc eſt IKM, ad AKC rectangulum. eodem diſcurſu demonſtratur rectangulum GHL ad AHC, eamdem rationem habere quam ENB rectangulum ad quadratum NL, hoc eſt quam rectangulum EOB ad quadratum MO. Igitur rectangulum AKC ad IKM, eamdem habet rationem, quam AHC, ad rectangulum GHL, & GHL rectangulum ad rectangulum IKM eamdem habet rationem, quam rectangulum AHC ad AKC rectangulum. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

POnantur iterum oppoſitæ ſectiones ABC, DEF, & ad diametrum FB collocentur ordinatim GH, IK, AC. Ponaturq; BL contingens & AD, IQ, GE æquidiſtent FB: denique GH, IK protractæ cum AD concurrant in M & N.

Dico rectangulum GMH ad INK, eamdem rationem obtinere, quam GPE rectangulum ad rectangulum IOQ.

Demonſtratio.



PEr præcedentem, rectangulum EPG ad QOI rectangulum, eam habet rationem, quam APC rectangulum ad rectangulū AOC: ſed rectangulo APC, æquatur GMH rectangulum, & rectangulum AOC, rectangulo INK. rectangulum igitur GMH ad INK eamdem rationem obtinet, quam IOQ rectangulum ad rectangulum GPE. Quod fuerat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

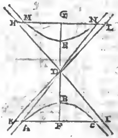
SIt hyperbola ABC, oporteat illi oppoſitam conſtituere.

Conſtructio & demonſtratio.

b Per 21. huius.

c Ex 32. huius.

d Ex eadem.



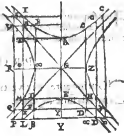
INuento centro [b] hyperbolæ ABC, ſimirum D, erit hoc commune etiam alteri [c] hyperbolę, quæ inquiritur: vlterius, ſi aſymptoti DK, DI ponantur hyperbolæ ABC, illæ ſimiliter productæ, non minus quam diametri [d] communes erunt. Diuiſâ inſuper AC ordinatim poſitâ, ad quamlibet diametrū DB, bifariam in F, ſi fiat DB æqualis DE, & DF æqualis DG, & per G collocetur MGN æquidiſtans AC: fiant autem & MG, GN lineæ æquales lineis AF, FC, & per M, E, N hyperbola deſcribatur, patet illam ſatisfacere petitioni: erit enim rectangulum EFB æquale BGE rectangulo, & quadratū AF, ęquale GM quadrato: quare ſimilis erit & æqualis hyperbola ABC hyperbolæ

læ MEN, & ad diametros communes conſtituta adeoque & a oppoſita hyperbolæ ABC; conſtituimus igitur datæ hyperbolæ alteram oppoſitam, quod fuerat requiſitum. a Ex 3. huius.

PROPOSITIO XXXIX.

SIt ABC, DEF oppoſitarum ſectionum diameter tranſuerſa AE, centrum G: actaque per E contingente HI, quæ HG, GI aſymptotis occurrat in H & I, ponantur per I & H parallelæ diametro AE, quæ DEF hyperbolæ occurrant in D & F, & per G ponatur ZG æquidiſtans HI, deinde FD occurrat aſymptoto IG in K: & per K ducatur LMN æquidiſtans AE, occurrens DEF hyperbolæ in L puncto, per quod acta ordinatim LD occurrat IG in P, ex quo AE æquidiſtans ponatur PRS: productæ autem EI, DF, FI occurrant lineis GO, KN, PR in XMQ.

Dico puncta illa eſſe ad hyperbolam coniugatam ipſi DEF, quam in X contingat XI.



Demonſtratio.

FIant MK, PQ lineis æquales NT, SV. quoniam IG, KG, PG parallelogramma ſunt, quadratum YF ad quadratum YL, id eſt quadratum EI ad quadratum YK, eſt vt quadratum XI ad quadratum OK, id eſt OM quadratum ad quadratum RQ. ſed vt quadratum YF ad quadratum YL, ſic b AYE rectangulum eſt ad rectangulum AYE in FD, LD contingenti æquidiſtent, id eſt TKM rectangulum ad rectangulum TLM, id eſt FKD rectangulum ad rectangulum FQD, id eſt rectangulum ZOX ad rectangulum ZRX, quadratum igitur MO ad quadratum RQ eſt vt rectangulum ZOX ad rectangulum ZRX, puncta igitur c QMX ad hyperbolam ſunt, cuius diameter ZX & ordinatim applicatæ MO, RQ, quibus cùm æquidiſtet XI, erit XI d contingens & quia diametri AE, ZX, ſibi mutuo parallelas biſecant, coniugatæ ſunt diametri AE, ZX, & DEF, QMX e ſectiones quoque coniugatæ.

b 1 huius. c Ibid. d 17. huius. e Defin. 5. huius.

Corollarium primum.

HInc patet contingentes per vertices diametrorum coniugatarum ductas aſymptotis occurrere in vno eodemque puncto.

Corollarium ſecundum.

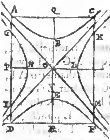
EX dictis quoque ſequitur coniugatas ſectiones, communes habere aſymptotos.

PROPOSITIO XL.

SEctiones coniugatæ ſint ABC, DEF, GHI, KLM, quarum centrum O: per quod ducta ſit diameter BE, ad quam ordinatim applicetur AC:

Dico

Dico diametrum quæ AC lineæ æquidiſtat, coniugatam eſſe diametro BE.



Demonſtratio.

Ponatur AD parallela BE, occurrens DEF hyperbolæ in D puncto, ex quo ordinatim ponatur DF, ad BE diametrum: & per O centrum ducatur LH, æquidiſtans AC, occurrens AD lineæ in P. quoniam AC, DF in oppoſitis ſectionibus, ad eandem diametrum ordinatim poſitę ſunt, æquidiſtant^a AC, DF: ſed & AD, QR ex conſtructione parallelę ſunt, parallelogrammum igitur eſt DQ: & quadrata ordinatim poſitarū AQ, DR æqualia ſunt: igitur & OQ, OR ^b lineæ æquales; & quia PO æquidiſtat AC, recta quoque AD in P biſariam eſt diuiſa: ſimiliter cum idem de reliquis, ipſi BE parallelis oſtendatur: patet LH ^c diametrum eſſe coniugatam ipſi BE.

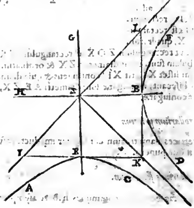
a 5. huius.
b Coroll. 3.
c Defin. 5. huius.

Corollarium.

Hinc ſequitur contingentes per vertices coniugatarum diametrorum ductas, iiſdem æquidiſtare. patet, cùm tam contingentes illæ quàm diametri coniugatæ, ordinatim poſitis æquidiſtent.

PROPOSITIO XLI.

Contingentes per vertices diametrorum coniugatarum ductæ, diametris ſunt æquales.



Demonſtratio.

Sint HE, GB diametri coniugatæ, hyperbolarū ABC, DEF & per B & E diametrorum terminos contingentes actæ, pertingant ad aſymptotos, dico IK, LK lineas æquari ipſis HE, GB: rectæ IK, LK contingentes per vertices diametrorum coniugatarum ductæ, iiſdem ^d æquidiſtant: & conueniunt cū vna aſymptotorum in ^e eodem puncto K. æquales igitur ſunt BK, ZE; & KE, ZB, adeoque & illarum duplæ IK, KL æquales GB, HE. Quod erat demonſtrandum.

d Coroll. 40. huius.
e Coroll. 39. huius.

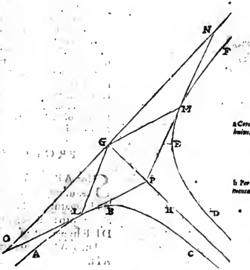
PRO-

PROPOSITIO XLII.

Diametri coniugatæ, ſectionum coniugatarum quarum aſymptoti rectum conſtituunt angulum, æquales ſunt.

Demonſtratio.

Habeant ABC, DEF coniugatæ hyperbolæ, aſymptotos OGQ, GP angulum formantes rectum. ponantur autem diametri quæuis coniugatę LG,GM, dico illas inter ſe æquari. ducantur per L & M contingentes OP,QP, conuenient illæ cum vna aſymptotorum in eodem [a] puncto P. quoniam igitur angulus OGP, per hypotheſim rectus eſt, & OP contingens in L biſariam diuiſa; puncta [b] O, G, P ad circulum ſunt, & rectæ LG, PL æquales. eſt autem LP æqualis GM per præcedentem, æquales igitur ſunt LG, GM adeoque & illarum duplæ. Quod erat demonſtrandum.



a Coroll. 39. huius.

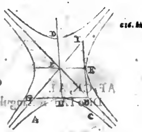
b Per elementa.

PROPOSITIO XLIII.

Datæ hyperbolæ diametro, illius coniugatam exhibere diametrum.

Conſtructio & demonſtratio.

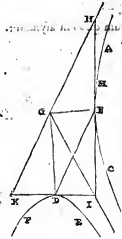
Sit ABC hyperbolæ diameter DB, qua biſariam diuiſa in E, ponantur [c] aſymptoti GE, EH, & per B contingens GH, peruenientes ad ſymptotos in G & H. poſitaque ex H lineâ HI, parallela DB, ducatur per E recta EF æquidiſtans GH, occurrens HI lineæ in F. dico EF ſatisfacere petitioni; demonſtratio manifeſta eſt ex præcedenti propoſitione vel ex 40. huius.



c 16. huius.

PROPOSITIO XLIV.

Linea coniungens diametrorum coniugatarum terminos, aſymptoto æquidiſtat.



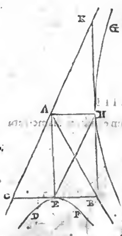
Demonſtratio.

SInt A B C, D E F ſectiones coniugatæ inter aſymptotos G H, G I conſtitutæ, ponantur autem diametri coniugatæ G B, G D. dico iunctam D B æquidiſtare aſymptoto K G: & ſi D B quæcunq; æquidiſtans ponatur aſymptoto G H, dico rectas ex B & D ad G centrum ductas, diametros eſſe coniugatas. agantur per B & D contingentes I H, I K occurrent illæ aſymptoto G I in a vno eodemque puncto I; eruntque in D b & B. bifariam diuiſæ: igitur vt K D ad D I, ſic H B ad B I, ergo & D B æquidiſtat K G aſymptoto, quod erat primum. ſit iam D B parallela K G, & ex B & D rectæ ducantur B G, D G ad centrum G. dico G B, G D diametros eſſe coniugatas. ſin verò, ponatur G M diameter coniugata D G. iuncta igitur D M, æquidiſtat K H, adeoque & ipſi D B. quod abſurdum: non igitur M G diameter coniugata eſt ipſi D G, ſed ſola B G.

a Coroll. 39. huius.
b 29. huius.

PROPOSITIO XLV.

SInt A B, A C aſymptoti coniugatarum ſectionum D E F, G H I. poſitaque diametro A H, agatur per H contingens K B occurrens aſymptoto in B. ponatur autem ex B contingens, D E F hyperbolam in E.



Dico A E diametrum eſſe coniugatam ipſi A H.

Demonſtratio.

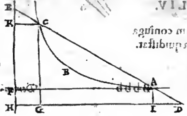
IVngantur H E. Quoniam B K, C B contingentes ſunt, erunt in H & E bifariam c diuiſæ. Vnde H E æquidiſtat K C: & A E, A H diametri d ſunt coniugatæ. Quod erat demonſtrandum.

c 29. huius.
d 44. huius.

PROPOSITIO XLVI.

HYperbolam A B C inter aſymptotos conſtitutam, ſecet recta E D, in punctis A, & C. cum aſymptotis ponantur æquidiſtantes C G, A F; C K, A I.

Dico I A F rectangulum æquari rectangulo K C G.



Demonſtratio.

QVoniam A I, C G, lineæ æquidiſtant; C D eſt ad D A, vt C G ad A I. ſed vt C D ad D A; ſic A E ad E C, (quia A D, C E e lineæ æquales ſunt) igitur & A E ad C E eſt, vt C G ad A I. eſt autem vt A E ad C E, ſic A F ad C K: igitur vt C G ad A I, ſic A F ad C K:

e Coroll. 35. huius.

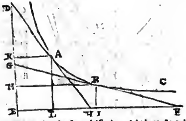
CK: æqualia igitur ſunt rectangula CGHK, & AIHF: Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVII.

Hyperbolam ABC inter aſymptotos ED, EF conſtitutam contingant duæ quæuis lineæ DAH, FBG quæ triangula conſtituant HED, FEG.

Dico illa eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.



Ex punctis contactuum A & B, ducantur rectæ AK, AL, BM, BI parallelæ aſymptotis, & AK, BM quidem ipſi FE, BI verò & AL aſymptoto DE. erunt igitur LK, [a] MI parallelogramma inter ſe æqualia: ſed HDE triangulum duplum eſt parallelogrammi LK, & FGE [b] duplum ipſius MI, (quia FG, DH lineę in A & B diuiſæ ſunt bifariam) igitur & triangula HDE, FGE inter ſe æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

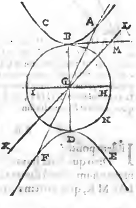
[a] 43. huius.

[b] Ex demonſt.

PROPOSITIO XLVIII.

Axes minimi ſunt omnium diametrorum coniugatarum.

Demonſtratio.



Sint ABC, DEF oppoſitæ ſectiones: axes coniugati ſint BD, HI: ponatur autem alia quæuis diametrorum coniugatio AF, LK: dico BD, HI lineas minores eſſe lineis AF, LK. centrum hyperbolæ ſit G: ponaturque per B contingens BM, erit illa ad angulos rectos axi BD, cum ordinatim ad axem poſitis æquidiſtet: deſcribatur deinde centro G, interuallo GB, circulus BND: quia igitur BM normalis eſt ad ſemidiametrum BG, recta MB [c] circulum contingit & tota extra illum cadit: quia verò eadem MB, hyperbolam quoque in eodem contingit puncto, tota etiam extra hyperbolam cadit, adeoque inter illam & circulum ſita eſt: ergo circulus BND, in vno tantum puncto B hyperbolæ occurrit, & ſui reliquo extra ſectionem cadit. ergo AG per G centrum tranſiens, & hyperbolæ ABC occurrens in A, priùs circulo, & tangenti occurrit, quàm hyperbolæ, ergo AG maior eſt BG. adeoque AF illius dupla maior eſt BD. ſimiliter oſtendam LK lineam maiorem eſſe HI: quod erat demonſtrandum.

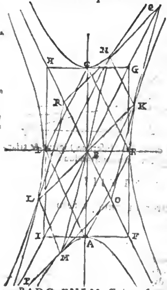
[c] 16. Tertij.

Hinc ſequitur quadrata quoque axium ſimul ſumpta minora eſſe quadratis cuiuſuis coniugationis.

PROPOSITIO XLIX.

SI fuerint binæ hyperbolarum coniugationes A, B, C, D: ponantur autem per E centrum duæ quoque diametrorum coniugationes per quarum vertices contingentes actæ conſtituant duo quadrilatera F G H I, O P Q R.

Dico illa eſſe æqualia inter ſe.



a 47. huius.

Demonſtratio.

SVnt enim a F E I, O E P triangula æqualia inter ſe, ſed F E I triangulum quarta pars eſt quadrilateri F G H I, & O E P triangulũ quarta pars eſt quadrilateri O P Q R, tota igitur quadrilatera O P Q R, F G H I inter ſe æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO L.

REctangulum quod fit à lineis extrema axium coniugatorum coniungentibus, æquale eſt illi quod fit à lineis extrema alterius coniugationis iungentibus parallelogrammo.

Demonſtratio.

REctæ BC, C D, D A, A B extrema iungant axium coniugatorum: & N K, N L, L M, M K lineæ extrema iungant alterius coniugationis. dico parallelogramma B A D C, K N L M eſſe inter ſe æqualia: triangulum B C D dimidium eſt rectanguli b B G H D, ſimiliter B A D triangulum dimidium eſt rectanguli B F I D: totum igitur rectangulum B C D A, dimidium eſt rectanguli F G H I, quod fit à contingentibus per extrema axium coniugatorũ ductis: ſimiliter oſtenditur K N L M parallelogrammum dimidium parallelogrammi O P Q R: æqualia autem ſunt oſtenſa c quadrilatera F G H I, O P Q R; igitur & illorum dimidia B C D A, K N L M quoque inter ſe æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

b Ex elementis.

c [illegible]

PROPOSITIO LI.

IIſdem poſitis:

Dico quadrata linearum B C, C D, D A, A B extrema axium coniungentium, ſimul ſumpta, minora eſſe quadratis linearum K N, N L, L M, M K, quæ extrema alterius coniugationis coniungunt.

Demonſtratio.

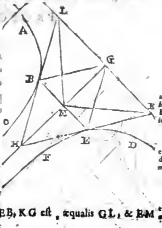
QVadrata B C, C D, D A, A B æqualia ſunt d quadratis A C, B D; ſimiliter quadrata K N, N L, L M, M K æqualia ſunt quadratis N M, K L: ſed A C, B D quadrata e minora ſunt quadratis N M, K B; quadrata igitur B C, D C, D A, A B ſimul ſumpta minora ſunt quadratis K N, N L, L M, M K. Quod erat demonſtrandum.

d 17. De potentiis linearum.
e Ex 48. huius.

PROPOSITIO LII.

Sint A B C, D E F ſectiones coniugatæ, quarum aſymptoti G H, G I: ponatur autem quæuis B E parallela aſymptoto G I.

Dico B E in M diuiſam eſſe bifariam.



Demonſtratio.

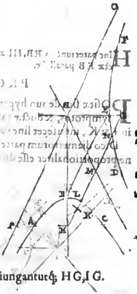
Ponantur contingentes B L, E K, occurrent illę [a] aſymptoto G H in H: eruntque diuiſę [b] biſariam in E & B. igitur vt K G ad E M; ſic K H ad E H; recta igitur G K dupla eſt E M. ſimili ratione oſtendetur G L duplam eſſe M B: tota igitur K L dupla eſt E B. eſt autem triangulum G L H [c] æquale triangulo G K H: triangulo igitur G E H, (quod [d] dimidium eſt K G H) æquale eſt triangulum G B H, dimidium trianguli G L H: reliqua igitur triangula G B L, G E K ſunt inter ſe æqualia; & cùm ſint inter eaſdem parallelas K L, E B, K G eſt [e] æqualis G L, & E M ipſi M B. Quod erat demonſtrandum.

a Coroll. 39. huius. b 29. huius. c 47. huius. d Ex elementis. e Ex elementis.

PROPOSITIO LIII.

Poſitæ ſint coniugatæ ſectiones A B C, D E F inter aſymptotos, eductis autem diametris coniugatis G H, G I ponatur quæuis H I, aſymptoto æquidiſtans; quæ diametris occurrat coniugatis in H & I, & hyperbolis in L & M.

Dico H L, N I, rectas æquales eſſe.



Demonſtratio.

Iungantur B E: quoniam G B, G E diametri ſunt coniugatę, iuncta B E [f] æquidiſtat aſymptoto G O: ſed & G O æquidiſtat H I; parallelæ igitur ſunt B E, H I: quare vt G E ad E I, ſic G B ad B H: ſed E B [g] biſecatur à G M, igitur & I H in M quoque biſſecta eſt: eſt autem & L M, æquidiſtans G O, in N [h] bifariam diuiſa; reſiduæ igitur L H, M I æquales ſunt.

f 44 huius. g 37. huius. h Ibid.

PROPOSITIO LIV.

Iiſdem poſitis ſi H I æquidiſtet aſymptoto O G, occurrens ſectionibus in L & M: ſumantur autem partes æquales N I, L H, iunganturque H G, I G.

Dico H G, I G diametros eſſe coniugatas.

Demon-

Demonſtratio.

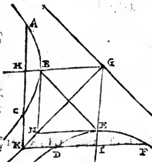
SIn verò : ponatur EG diametro, coniugata KG. æqualis igitur eſt LK, ipſi [e] MI, id eſt ex hypotheſi HL: pars toti, quod abſurdum. non igitur KG, diameter coniugata eſt EG, ſed ſola HG: quod erat demonſtrandum.

e 53. huius.

PROPOSITIO LV.

SInt ABC, DEF coniugatæ ſectiones quarum aſymptoti GN, GO, diametri verò coniugatæ GB, GE. ad quas ex aſſumpto quouis in aſymptoto, puncto K, ordinatim ponantur KF, KA occurrentes diametris in I & H.

Dico eſſe GB ad BH, vt GE ad EI.



Demonſtratio.

POnantur per B & E contingentes BN, EN, occurrent illæ aſymptoto GK, in [b] vno eodemque puncto N: & quia KF, KA ordinatim poſitæ ſunt ad diametros GB, GE, æquidiſtabunt BN, HK, EN, IK: ſed iiſdem æquidiſtant diametri [c] coniugatæ GB, GE: parallelogramma igitur ſunt NG, KG ad eandem diametrum GK conſtituta: quare vt GB, [d] ad BH, ſic GE ad IE. Quod erat demonſtrandum.

b Coroll. 39. huius.

c Coroll. 40. huius.

d Ex elementis.

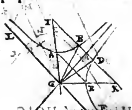
Corollarium.

HInc patet iunctas EB, HI æquidiſtare inter ſe, adeoque & aſymptoto OG, rectæ EB parallelæ.

PROPOSITIO LVI.

POſitæ ſint denuo hyperbolæ duæ coniugatæ ABC, DEF, inter aſymptotos, & ductæ inſuper duæ coniugatæ diametri GA, GE, quas in I & K, interſecet linea aſymptoto parallela.

Dico diametrorum partes inter centrum & parallelam poſitas, à ſectione proportionaliter eſſe diuiſas.



Demonſtratio.

IVngantur puncta AE, quoniam GA, GE diametri ſunt coniugatæ, AE iuncta [e] æquidiſtabit aſymptoto GL, ideoque & ipſi IK. Quare GA ad AI, vt GE ad EK. Patet igitur veritas propoſitionis.

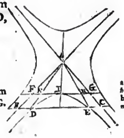
e 44. huius.

PRO.

PROPOSITIO LVII.

Sint aſymptoti AB, AC, hyperbolæ DIE: & binæ æquidiſtantes FG, BC, & BC quidem hyperbolæ occurrat D & E; ponanturq; AD, AE occurrentes in K, H, rectæ FG.

Dico FK, HG æquales eſſe lineas.



Demonſtratio.

Oſtendimus enim BD, [a]EB æquales eſſe; igitur cùm FG æquidiſtet BC, etiam ſunt [b] æquales FK, HG.

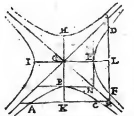
a Coroll. 35. huius.
b Per elementa.

PROPOSITIO LVIII.

Sint hyperbolæ coniugatæ ABC, DEF, quarum centrum G, & diametri coniugatę HB, IE; ad quas ſint ordinatim poſitæ AC, DF, occurrentes aſymptoto communi, in M.

Dico rectangulo HKB, æquari quadratum LF: rectangulo verò ILE æquari quadratum AK.

Demonſtratio.



Quadratum GK æquale eſt quadratis GB, BK, vnà [c] cum GBK rectangulo bis ſumpto: id eſt GK quadratum, æquatur HKB rectangulo, vnà cum quadrato GB id eſt EN: id eſt [d] MFO rectangulo: Sed & GK, id; eſt LM quadratum, æquale eſt rectangulo MFO vnà cum [e] quadrato LF; æqualia igitur ſunt, quadratum GB vnà cùm rectangulo HKB, & LF quadratum, vnà cum rectangulo MFO: demptis ergo æqualibus MFO rectangulo & quadrato GB, æqualia remanent HKB rectangulum, & quadratum LF. Similiter oſtendetur ILE rectangulum, æquari quadrato AK: Quod fuit demonſtrandum.

c Ex elementis.
d 18. huius.
e Ex elementis.

PROPOSITIO LIX.

Iiſdem poſitis;

Dico HKB rectangulum eſſe ad rectangulum ILE, vt quadratum HB, ad quadratum IE.

Demonſtratio.

Rectangulum ILE vnà cum quadrato GE, æquale eſt [f] quadrato GL; & HKB rectangulum, cum GB quadrato, æquale eſt quadrato GK. eſt autem vt GL quadratum [g] ad quadratum GK, ſic GE quadratum ad quadratum GB: igitur & ILE rectangulum eſt ad rectangulum HKB (reſiduum ad reſiduum) vt GE quadratum ad quadratum GB, id eſt vt IE quadratum ad quadratum HB: Quod erat demonſtrandum.

f Per elementa.
g Ex 55. huius.

Corolla-

Corollarium primum.

HInc ſequitur: eſſe quadratum AK ad LD, vt quadratum GE ad GB. eſt enim vt quadratum HB ad quadratum IE, ſic HKB rectangulum ad rectangulum ILE, id eſt (per 58. huius) quadratum LD ad quadratum AK.

Corollarium ſecundum.

a Ex 42. huius.

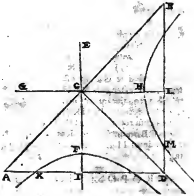
HInc ſequitur ſi OG, GN aſymptoti, exhibeant angulum rectum; quod HKB, ILE rectangula ſint inter ſe æqualia: oſtendimus enim HB, IE [a] quadrata eſſe æqualia in hyperbolis quæ inter aſymptotos ſtatuuntur quæ ad rectos angulos ſe decuſſant.

PROPOSITIO LX.

SInt AB, CD aſymptoti angulum rectum continentes, & duæ diametri coniugatæ ſint EF, GH, ad quas rectæ DL, DI (aſſumpto quouis D puncto in aſymptoto) conſtitutæ ſint ordinatim.

Dico rectangulum EIF quadrato IK, & quadratum LM æquari HLG rectangulo.

Demonſtratio.



b Ex 59. huius & Corollario c 42. huius. d 58. huius.

VT EF quadratum ad quadratum GH, ſic EIF rectangulum [b] eſt ad rectangulum GLH: ſed EF, GH [c] quadrata ſunt æqualia, rectangulum igitur EIF, etiam GLH rectangulo æquale eſt: eſt autem EIF rectangulo æquale [d] quadratum LM, & IK quadratum æquale rectangulo GLH; rectangulum igitur EIF, quadrato IK, & GLH rectangulo æquale eſt quadratum LM. Quod erat demonſtrandum.

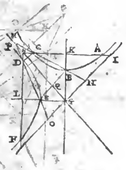
PROPOSITIO LXI.

HYperbolæ ABC, DEF coniugatæ inter aſymptotos GH, GI poſitæ, ſecentur ab ordinatim poſitis HA, HF ad diametros GK, GL, aſſumpto puncto H in aſymptoto GH:

Dico

Dico KG ad CH eamdem rationem habere, quam habet LD ad DH lineam.

Demonſtratio.



VT quadratum GB ad quadratum GE, ſic quadratum GK [a] ad quadratum GL, id eſt HL ad KH; quadratum; ſed vt GB quadratum ad quadratum GE, ſic LD quadratum ad [b] quadratum KC: igitur vt quadratum LH ad quadratum HK; ſic LD quadratum ad quadratum CK, & LH linea ad HK lineam, vt LD ad CK: quare permutando, diuidendo vt LD ad HD, ſic KC ad CH. Quod erat demonſtrandum.

a Ex 55. huius.
b Ex 58. & 59. huius.

Corollarium primum.

HInc ſequitur iunctam CD, æquidiſtare aſymptoto IG; cùm enim HK, HL ex eodem puncto eductæ ordinatim ponantur ad diametros coniugatas GK, GL, iuncta KL [c] æquidiſtat IG: ſed oſtenſum eſt, eſſe KC ad CH, vt LD [d] eſt ad DH, æquidiſtat igitur ED ipſi KL, adeoque & aſymptoto IG.

c Coroll. 55. huius.
d 61. huius.

Corollarium ſecundum.

DIco ſecundò iunctam AF æquidiſtare IG: eſt enim vt HC ad CK, ſic HD ad DL & componendo vt HK ad CK, id eſt AK, ſic HL ad LD, id eſt LF: æquidiſtant igitur LK, AF: ſed LK [e] æquidiſtat IG, ergo & FA parallela eſt ad IG.

e Coroll 55.

Corollarium tertium:

DIco tertiò BC, ED lineas productas aſymptoto GH in vno eodemque puncto occurrere: occurrat enim CB aſymptotis in N & M. & ED ijſdem occurrat in O, P: quoniam EB, NO [f] æquidiſtant & EB in g Q biſſecta eſt, NO quoque in G biſſecatur: vnde vt NG ad BQ, ſic GO ad QE. ſed vt NG ad BQ, ſic GM ad QM, igitur vt GO ad QE, ſic GM ad QM: quare puncta P & M vnum idemque ſunt: & BC, ED in eodem aſymptoton decuſſant puncto.

f 44. huius.
g 51. huius.

PROPOSITIO LXII.

IIſdem poſitis, iungantur BA, BC, & ED, EF.
Dico triangula ABC, DEF eſſe inter ſe æqualia.

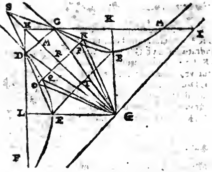
Demonſtratio.

VT GB ad BK, ſic GE ad EL, & permutando vt GB ad GE, ſic BK ad EL, ſed vt GB ad GE, ſic DL ad KC: igitur vt BK ad EL, ita eſt LD ad KC, ſunt autem anguli BKC, DLE in parallelogrammo KL oppoſiti æquales; igitur triangula BKC, DLE æqualia ſunt.

PROPOSITIO LXIII.

IIſdem poſitis ducantur GC, GD.
Dico triangula GKC, GDL æqualia exiſtere.

Demonſtratio.



QVoniam per propoſitionem 55. G B ad B K, eandem rationem obtinet, cum ratione G E ad E L, igitur & triangulum G C B ad B C K, eſt vt triangulum G E D ad E D L. ſunt autem B K C, E D L triangula oſtenſa [a] æqualia; igitur B C G triangulum triangulo G D E eſt æquale. ac proinde totum triangulum G K C toti triangulo D G L. Quod erat demonſtrandum.

a 62. huius.

PROPOSITIO LXIV.

Iisdem poſitis ducatur CD occurrens G H aſymptoto in M. Dico trapezia G B C M, G E D M eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.

VT HK ad HL, [b] ſic HC ad HD: igitur iuncta CD æquidiſtat LK ſiue [c] BE, ſiue aſymptoto GI. vnde CD [d] in M biſariam eſt diuiſa; & GCM, GDM triangula æqualia; oſtenſa ſunt autem in priori propoſitione æqualia triangula BCG, GDE; trapezia igitur GBCM, GEDM inter ſe æquantur.

b 61. huius. c Coroll. 61. huius. d Ex 52. huius.

Corollarium.

HInc patet & TBCM, ETMD trapezia eſſe inter ſe æqualia: eſt enim BE [e] æquidiſtans aſymptoto GI, adeoque in T biſariam diuiſa, vnde GBT, GTE triangula æqualia ſunt, quibus ablatis manent BTMC, ETMD trapezia æqualia.

e 44. huius.

PROPOSITIO LXV.

Iisdem poſitis biſecentur E D, B C in N & O, iunganturque G O, G N. Dico illas diametros eſſe coniugatas.

Demonſtratio.

IVncta N O occurrat ſectionibus in P & Q, aſymptoto G H in R. quoniam EB, CD, lineæ [f] æquidiſtant, & ED, BC productæ, [g] occurrant HG aſymptoto in vno eodemque puncto, recta N O biſſecans B C, E D lineas etiam æquidiſtat ipſi E B: vnde N R, R O lineæ æquales; ſunt autem & P R, [h] R Q æquales, reſiduę igitur N P, Q O quoque æquales ſunt: quare G N, G O [i] diametri ſunt coniugatæ. Quod erat demonſtrandum.

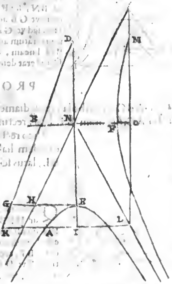
f Coroll. 61. huius. g Coroll. tertio 61. huius h 52. huius. i 54. huius.

PRO-

PROPOSITIO LXVI.

IN omni hyperbola diameter tranſuerſa eiuſque coniugata & rectum figuræ latus ſunt in continua analogia.

Demonſtratio.



SIt hyperbolæ ABC diameter tranſuerſa DB; eiuſque coniugata EF, & latus rectum BG: oportet demonſtrare tria hęc eſſe in continua proportione, aſſumpto in aſymptoto NL quouis puncto L ducantur LA, LM ordinatim ad diametros DB, EF; producta deinde LA, occurrat cum recta DG, in K: rectangulũ igitur DIB ad EOF rectangulum eſt, vt DB [a] quadratum ad quadratum EF: ſed EOF rectangulo [b] æquale eſt quadratum AI, id eſt rectangulum BIK (quia cùm BG latus rectum eſt, tres BI, IA, IK [c] proportionales ſunt) igitur & DIB ad BIK rectangulum eſt, vt DB quadratum ad quadratum EF: eſt autem vt DIB rectangulum ad rectangulum BIK ſic DI linea [d] ad lineam IK, id eſt DB ad BG, igitur vt quadratum DB ad quadratum EF, ſic DB linea ad lineam BG: ſed ratio quadrati DB ad EF, duplicata eſt rationis lineæ DB ad EF; igitur ratio lineæ DB ad BG, duplicata eſt rationis DB lineæ ad lineam EF: ſunt itaque DE, EF, BG continuæ proportionales. Quod erat demonſtrandum.

[a] 59. huius.
[b] 58. huius.
[c] Ex conuerſa 31. huius.
[d] 1. Sexti.

Corollarium.

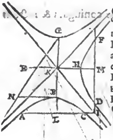
HInc manifeſtè colligitur, ſi erigatur latus rectum ad punctum diametri EF, quę eſt coniugata diametri DB, quod exſurgent lineæ quatuor in continua analogia, ſcilicet latus rectum ad punctum F erectum, cum reliquis tribus, de quibus præſenti propoſitione mentio facta eſt.

PROPOSITIO LXVII.

ERigantur à quouis puncto in aſymptoto aſſumpto, ordinatim ad diametros coniugatas.

Dico ordinatim poſitarum quadrata eam rationem continere, quæ reperitur inter latus rectum & tranſuerſum diametrorum coniugatarum.

Demonſtratio.



SInt ABC, DHF coniugatæ hyperbolæ, & punctum I aſſumptum in aſymptoto KI, ex quo poſitæ ſint ordinatim IF, IA ad diametros coniugatas HE, GB, & ſit BN latus rectum tranſuerſi lateris GB. Dico vt eſt GB ad BN, ſic FD quadratum eſſe ad quadratum AC: eſt enim vt GB ad BN, ſic a quadratum GB ad quadratum HE: ſed vt GB quadratum ad quadratum HE, ſic FD b quadratum ad quadratum AC: igitur vt linea GB ad BN lineam, ſic FD quadratum ad quadratum AC. Quod erat demonſtrandum.

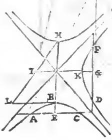
a 66. huius.

b Ex 59. & 58. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

SIt ABC hyperbola, cuius diameter HB & ordinatim ad illam poſita AC, ſit autem BL latus rectum diametro HB, ſeruiens.

Dico rectangulum HEB ad AE quadratum, eamdem habere rationem quam linea HB ad BL; latus ſcilicet tranſuerſum ad rectum.



Demonſtratio.

QVadrato AE æquale eſt rectangulum c IGK, igitur HEB rectangulum ad quadratum AE eſt vt FG quadratum ad quadratum AE: ſed FG quadratū eſt ad quadratum d AE vt HB tranſuerſum ad latus rectum BL, rectangulum igitur HEB ad AE quadratum eſt vt HB linea ad lineam BL. Quod erat demonſtrandum.

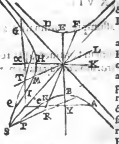
c 38. huius.

d 67. huius.

PROPOSITIO LXIX.

OMnes diametri coniugatæ ſunt axibus proportionales in quibuſuis hyperbolis coniugatis.

Demonſtratio.



POnantur ABC, DEF oppoſitæ ſectiones, quarum GHI eſt coniugata; ſintque axes earum EB, KH: & alia quæuis aſſumatur diametrorum coniugatio FN, LM.

Dico FN ad LM eam proportionem habere, quā axis EB ad HK. Poſitis enim AC, IG ad axes HK, EB ordinatim, quæ cum aſymptoto in eodem puncto conueniant; fiat FN ad NR, vt EB ad BY; & vt KH ad HX, ſic LM ad MT: & per R & T ordinatim ponantur RP, TQ. igitur erit EYB rectangulum ad rectangulum FRN, vt KXH rectangulum ad rectangulum LTM, & permutando vt EYB ad KXH, ſic FRN ad LTN rectangulum: ſed EYB, KXH rectangula e proportionalia ſunt quadratis EB, HK, & FN, LM quadratis proportionalia ſunt rectangula FRN, LTM: quadrata igitur FN, LM proportionalia ſunt quadratis axium EB, KH:

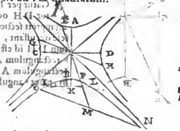
e 59. huius.

KH: adeoque & diametri FN, LM, diametris EB, KH proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXX.

SInt axes AB, CD, & altera coniugatio diametrorum EF, GH: poſitâ deinde quâuis ordinatim ad axem AB recta IK; ſtatuatur ſimiliter ordinatim quæuis OM, ad diametrum EF:

Dico EMF rectangulum eam rationem habere ad rectangulum AKB, quam habet quadratum OM ad IK quadratum.



Demonſtratio.

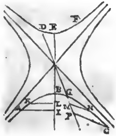
EST enim rectanguli AKB ad quadratum KI ratio eadem cum ratione lineæ AB [a] lateris tranſuerſi ad latus rectum, id eſt eadem cum illa quæ [b] eſt quadrati AB ad quadratum CD. ſimiliter ratio rectanguli EMF ad quadratum OM eadem eſt cum ratione EF lateris tranſuerſi, ad latus ſuum rectum, hoc eſt quadrati EF ad GH quadratum: ſed ratio quadrati AB, ad CD eadem eſt cum [c] ratione quadrati EF ad GH. Igitur etiam ratio rectanguli AKB ad quadratum KI eadem eſt cum ratione rectanguli EMF ad MO quadratum: vnde permutando conſtat veritas propoſitionis.

a 6. huius.
b Ex 66. huius.
c 69. huius.

PROPOSITIO LXXI.

SInt oppoſitæ ſectiones DEF & diametri quæcunque EB, DG. Deinde ad alteram quæuis duæ applicentur ordinatim, AI, KL; & fiat vt EB ad BL, ita DG ad GM, & vt BL ad BI, ita GM ad GP: denique ponantur MN, PC ordinatim ad diametrum DG.

Dico KL ad AI eandem rationem habere quam MN ad PC.



Demonſtratio.

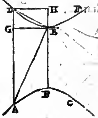
QVoniam EI, DP lineæ proportionaliter in I, L, B, item P, M, G diuiſę ſunt, rectangulum ELB ad EIB, eſt vt DMG ad DPG, hoc eſt quadratum KL, ad AI quadratum, vt MN ad PC quadratum. vnde patet veritas propoſitionis.

PROPOSITIO LXXII.

Sint A B C, D E F oppoſitæ ſectiones, quarum aſymptoti ad angulos rectos ſe decuſſant, ponatur autem A D æquidiſtans axi E B, iunganturque A E, E D.

Dico angulum A E D rectum eſſe.

Demonſtratio.



Agatur per E contingens E G, cui æquidiſtans ponatur D H occurrens E B productæ in H. Quoniam aſymptoti ſectionum oppoſitarum A B C, D E F ad rectos ſeſe decuſſant, erit E H B rectangulo æquale [a] quadratum D H id eſt E G: ſed E H B rectangulo æquale eſt [b] rectangulum A G D, quadrato igitur E G æquale eſt rectangulum A G D: vnde cùm E G ad A D, ſit normalis, patet [c] angulum A E D rectum eſſe.

a 60. huius.

b 34. huius.

c Ex elementis.

H Y-

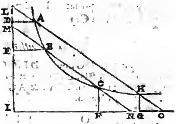
HYPERBOLÆ
PARS TERTIA

Aſymptotos & concauam contemplatur hyperbolam ac linearum præcipuè aſymptotis æquidiſtantium exhibet proportionem.

PROPOSITIO LXXIII.

HYperbolam ABC inter aſymptotos DI, FI conſtitutam, ſecent duæ quæuis parallelæ AH, BC, occurrentes aſymptotis in L, M, N, O: illis autem æquidiſtantes ponantur AD, BE, CF, HG. Dico AD ad BE eam habere rationem quàm HG ad CF.

Demonſtratio.



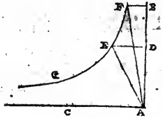
CVm HG, LI æquidiſtent, æquales ſunt anguli OHG, OLD, item OGH, LDA: oſtenſæ ſunt a autem LA, HO lineæ æquales, ſimilia igitur & æqualia ſunt triangula LAD, HOG, vti & latera AD, GO. eadem ratione ſimilia ſunt inter ſe & æqualia triangula MEB, CFN; quia verò æquidiſtant LO, MN, DA, EB ſimilia quoque erunt triangula LAD, MEB, item HGO, CFN. Vnde & lateribus conſtant proportionalibus, & AD eſt ad BE, id eſt GO ad FN, vt HG ad CF. Quod erat demonſtrandum.

a Coroll. 15. huius.

PROPOSITIO LXXIV.

HYperbolæ FEG, aſymptoti ponantur AB, AC. & AC quidem æquidiſtent DE, BF.
Dico ED ad FB eandem habere rationem quam AB ad AD.

Demonſtratio.

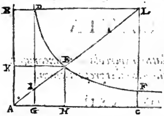


IVngantur AE, AF: Quoniam ED, FB æquidiſtant aſymptoto AC, æqualia erunt b triangula ADE, ABF: quare & AD, AB latera c proportionalia ſunt lateribus BF, DE: Quod erat demonſtrandum.

b Ex 48. huius.

c 15. Sexti.

PROPOSITIO LXXV.



Sint AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF, poſitiſq́; DG, EH, aſymptotorum vni parallelis, ducatur AE occurrens DG lineæ in I. Dico IG, EH, DG in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.

Qvoniam IG, EH æquidiſtant, IG eſt ad EH, vt AG ad AH: [a] ſed vt AG ad AH, ſic EH eſt ad DG, igitur vt IG ad EH, ſic EH eſt ad DG. Quod erat demonſtrandum.

a 74. huius.

PROPOSITIO LXXVI.

Iiſdem poſitis, ducatur per D, æquidiſtans AC, occurrens AE productæ in L, & ex L ponatur LFC parallela AB.

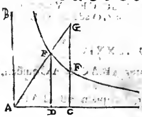
Dico AG, AH, AC, in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.

Qvoniam tam LC, DG, quàm DL, GC æquidiſtant, CL æqualis eſt DG; ſunt autem [b] IG, EH, DG proportionales, igitur & IG, EH, LC eandem quoque continuant rationem: quare & AG, AH, AC in continua ſunt analogia. Quod erat demonſtrandum.

b 75. huius.

PROPOSITIO LXXVII.



Sint denuo AB, AC aſymptoti hyperbolæ EF, & ED, FC æquidiſtent AB; poſitaque AE occurrat CF in G.

Dico CF, DE, CG eſſe proportionales.

Demonſtratio.

Est GC ad ED, vt AC ad AD: ſed vt AC ad AD, ſic ED eſt [c] ad CF, igitur vt GC ad ED, ſic ED eſt ad CF. Quod erat demonſtrandum.

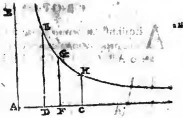
c 47. huius.

PROPOSITIO LXXVIII.

Poſitis denuo aſymptotis AC, AB hyperbolæ EGH. Fiant AD, AF, AC proportionales, ducanturq́; DE, FG, CH æquidiſtantes AB. Dico ED, GF, HC in continua eſſe analogia & contra.

Demon-

Demonſtratio.



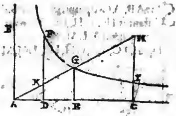
VT AD ad AF, ſic a FG ad DE, & vt AF ad AC, ſic HC ad GF: ſed AD, AF, AC proportionales ſunt, igitur & HC, GF, ED eandem quoque continuant rationem. ſimiliter oſtendetur ſi ED, GF, HC aſymptoto æquidiſtantes proportionales ſint, eſſe AD, AF, AC quoque in continua analogia. Quod erant demonſtrandum. a ibid.

PROPOSITIO LXXIX.

INter aſymptotos AB, AC conſtituta ſit hyperbola FGI: ponantur autem proportionales AD, AE, AC, tum ex punctis D, E, C, aſymptoto AB parallelæ ducantur DF, EG, CI, iunctaq́; AG occurrat FD, CI in K & H.

Dico CH lineam æquari FD, & CI, rectæ DK.

Demonſtratio.



QVoniam proportionales ſunt AD, AE, AC, rectæ IC, GE, FD in b continua quoque ſunt analogia; ſed & IC, GE, HC quoque ſunt c proportionales, æquales igitur ſunt HC, FD. ſimiliter quia tam KD, GE, FD quàm KD, GE, HC d ſunt proportionales, patet IC, KD lineas æquales eſſe. Quod erat demonſtrandum.

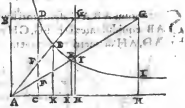
b 78. huius.
c 77. huius.
d 75. huius.

PROPOSITIO LXXX.

SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ DE; poſitâque BDG parallela AC, ducatur DC æquidiſtans AB, & quæcunque AG, occurrens ſectioni in E, & DC, DG lineis in F & G.

Dico AF, AE, AG in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.



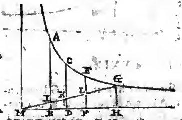
POnantur EK, GH æquidiſtantes AB: Quoniam GH, DC, item DG, HC æquidiſtant, GH æqualis eſt DC; ac proinde FC, EK, GH e proportionales ſunt, patet igitur & AF, AE, AG eandem continuare rationem. Quod erat demonſtrandum.

e 75. huius.

PROPOSITIO LXXXI.

AEquidiſtent denuo aſymptotorum alteri, A B, C D, E F, G H continuæ proportionales, quibus in I, K, L diameter occurrat M G. Dico A B, C D, E F, G H, L F, K D, I B in continua eſſe analogia.

a 78. huius.
b 75. huius.



Demonſtratio.

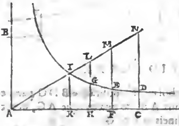
CVm A B, C D, E F, G H proportionales ſint, etiam M B, M D, M F, M H [a] eandem continuant rationem. vnde & I B, K D, L F, G G in eadem ſunt ratione, quam habent G H, E F, C D, A B. quia verò & L F, G H, E F ſunt [b] proportionales, patet omnes A B, C D, E F, G H, L F, K D, I B eandem continuare rationem. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXII.

SInt A B, A C aſymptoti hyperbolæ D E, ponantur autem A B æquidiſtantes I K, G H, E F, D C continuæ proportionales, quibus A I diameter occurrat in L M, N.

Dico D C, E F, G H, I K, L H, M F, N C in continua eſſe analogia.

c 78. huius.
d 77. huius.



Demonſtratio.

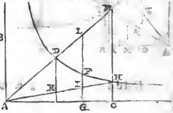
QVoniam I K, G H, E F, D C proportionales ſunt, [c] erunt & A C, A F, A H, A K ac proinde & N C, M F, L H, I K in continua analogia eiuſdem rationis; cum I K, G H, E F, &c. ſunt autem L H, I K, G H [d] quoque proportionales, eandem igitur continuant rationem D C, E F, G H, I K, L H, M F, N C.

Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIII.

SInt iterum A B, A C aſymptoti hyperbolæ D F H, ponantur autem & A B æquidiſtantes D E, F G, C H eandem continentes rationem; quibus A D, A H diametri occurrant in K I, L M.

e 81. huius.
f 81. huius.



Dico E K, G I, C H, F G, D E, L G, M C eandem continuare rationem.

Demonſtratio.

CVm D E, F G, H C ponantur continuæ, rectæ K E, I G, H C eandem continuant rationem [e] cum H C, F G, D E. ſed hæc quoque cum D E, L G, M C [f] eandem continuant rationem, proportionales

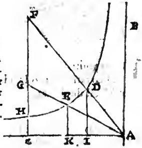
rionales

tionales ſunt igitur continuæ EK, GI, HC, FG, DE, LG, MC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIV.

INter aſymptotos AB, AC conſtituta ſit hyperbola DEH, & factis FC, DI parallelis AB, ductaq; ADF, ponatur media EK inter DI, HC & ducatur AEG.

Dico rationem AF ad AD, duplicatam eſſe eius quam habet AG ad AE.



Demonſtratio.

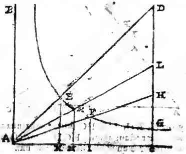
Eſt AF ad AD, vt AC ad AI: & AG ad AE, vt eſt AC ad AK. ſunt autem ex conſtructione proportionales DI, EK, HC: igitur[a] etiam ſunt proportionales AC, AK, AI. Igitur ratio AC ad AI, hoc eſt AF ad AD, duplicata eſt rationis AC ad AK, hoc eſt AG ad AE. Quod fuit demonſtrandum.

a 78. huius.

PROPOSITIO LXXXV.

POſita denuo hyperbola vt prius, & DC, EK parallelis aſymptoto, ponatur FI vt ratio EK ad FI, duplicata ſit rationis FI ad GC. ponaturq; AFH.

Dico AFH in F diuiſam eſſe vt ratio AD ad AE, ſit triplicata eius quam continet AH ad AF.



Demonſtratio.

RAtio AD ad AE, eadem eſt cum ratione AC ad AK: & ratio AH ad AF, eadem cum ratione quæ eſt inter AC & AI: eſt autem ex conſtructione ratio EK ad FI, duplicata rationis FI ad GC: igitur ratio AI ad AK, duplicata eſt rationis AC ad AI, vnde cùm ratio AC ad AK, triplicata ſit eius quam habet AC ad AI, etiam ratio AD ad AE, triplicata erit eius quæ eſt inter AH & AF. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXVI.

MAnentibus iiſdem, ſint EK, MN, FI, GC in continuata analogia, & poſitæ ſint AED, AML, AFH.

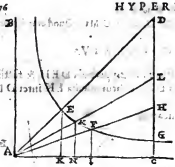
Dico GC, HC, LC, DC lineas eandem continuare rationem.

Demonſtratio.

SVnt enim proportionales [b] GC, IF, HC: item GC,[c] NM, LC. Igitur ratio tertiæ LC ad tertiam HC [d] duplicata eſt eius quam habet ſecunda MN ad FI: ſed

b 77. huius.
c Ibid.
d 17. De progreſſionibus.

a 77. huius.



ſed etiam ſunt a proportionales G C, EK, CD : igitur ratio DC ad LC, duplicata eſt rationis EK ad MN, hoc eſt MN ad FI. ſed ratio LC ad HC duplicata erat rationis MN ad FI, igitur ratio DC ad LC, eadem eſt cum ratione LC ad HE. quocirca DC, LC, HC, GC lineæ ſunt in continua proportione. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXVII.

IIſdem poſitis:

Dico rationem AD ad AE, eſſe triplicatam eius, cuius ratio AL ad AM eſt duplicata.

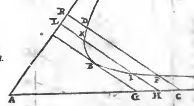
Demonſtratio.

b 85. huius. c 84. huius. RAtio AD ad AE, eſt triplicata b rationis AH ad AF. ſed ratio AL c ad LM eſt duplicata rationis AH ad AF, igitur patet veritas propoſitionis.

PROPOSITIO LXXXVIII.

INter aſymptotos AB, AC poſita ſit hyperbola DEF. deinde ponantur CD, HK æquidiſtantes contingenti EG, vt ſint in continua analogia FC, IH, EG.

Dico ſimiliter FC, IH, EG, KH, DC eandem continuare rationem.



Demonſtratio.

PRoductæ HK, CD ſecent aſymptoton AB in L & B. Quoniam EG contingit ſectionem, & rectæ EG æquidiſtat HK, quadrato GE, æquatur HIL, hoc d eſt IHK rectangulum. vnde ſunt in continua proportione KH, EG, IH : ſed vt EG ad IH, ita ponitur eſſe IH ad FC, ergo KH, EH, IH, FC ſunt in continua analogia. & quia ſimiliter quadrato EG æquatur rectangulum e FCD, manifeſtum eſt omnes quinque eamdem rationem continuare quod erat demonſtrandum.

d Ex Coroll. 15. huius.

e Ibid.

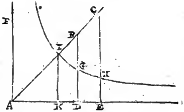
PROPOSITIO LXXXIX.

EX A centro hyperbolæ, ducta ſit quæuis ABC, quam interſecent BD, CE, aſymptoto AF, æquidiſtantes.

Dico rectangula BDG, CEH inter ſe eſſe æqualia.

Demon-

Demonſtratio.

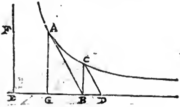


POnatur ex I recta IK æquidiſtans AF. quoniam tam BD, IK, GD, quàm CE, IK, IH [a] ſunt continuę, tã GDB rectangulum æquatur quadrato IK, quàm CEH rectangulum; patet ergo BDG, CEH rectangula eſſe inter ſe æqualia. a 77. huius.

PROPOSITIO XC.

HYperbolam AC inter aſymptotos EF, EB conſtitutam, contingat AB; poſitiſq; BC, AG parallelis EF, ducatur CD æquidiſtans AB. Dico rectangulo EGB æquale eſſe rectangulum EBD.

Demonſtratio.

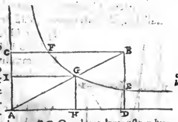


QVoniam æquidiſtant tam AG, CB, quàm AB, CD; ſimilia ſunt triangula AGB, CBD. quare vt AG ad CB, ita GB ad BD: ſed vt AG ad CB; ita quoque [b] eſt BE ad GE: igitur vt GB ad BD, ita eſt EB ad EG. Vnde rectangula GBEG, & BDEB æqualia ſunt. Quod fuit demonſtrandum. b 74. huius.

PROPOSITIO XCI.

POſita hyperbola inter aſymptotos AC, AD ponantur inſuper aſymptotis æquidiſtantes BC, BD occurrentes hyperbolæ in F & E. Dico rectangulum BDE ad BCF rectangulum, eamdem rationem habere, quam quadratum BD ad BC quadratum.

Demonſtratio.



DVcta diametro AB quę ſectioni occurrat in G. ponantur ex G puncto interſectionis lineæ GH, GI æquidiſtantes aſymptotis; erit igitur quadrato HG æquale rectangulum [c] BDE; & BCF rectangulum æquale quadrato IG: igitur rectangulum BDE eſt ad rectangulum BCF vt GH, quadratum ad quadratum IG, id eſt BD quadratum ad quadratum BC. Quod erat demonſtrandum. c Ex 77 huius.

Corollarium.

HInc manifeſtum eſt rectam BC in F diuiſam eſſe, quemadmodum BD ſecta eſt in E. quadratum enim BC ad BD quadratum, in duplicata eſt ratione BC lineæ ad lineam BD: rectangulum verò BCF ad BDE rectangulum, rationem habet compoſitam ex ratione BC ad BD, & CF ad DE. igitur ratio CF ad DE, eadem eſt cum ratione BC ad BD.

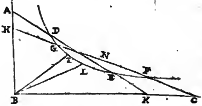
Aliter Corollarium hoc demonſtratur.

a Ex eadem. VT CF [a] ad IG, ita ED ad GH, ergo vt IG ad GH, hoc eſt CB ad BD, ita CF ad DE.

PROPOSITIO XCII.

SInt AB, BC aſymptoti hyperbolæ DEF angulum rectum conſtituentes; & quæuis duæ DE, FG ponantur, quæ obuient ſectioni in D, G, E, F, aſſumptis autem in hyperbolę perimetro punctis quibuſdam I & L, per quæ actæ contingentes æquidiſtant rectis AK, HC, ponantur diametri BI, BL.

Dico rectangulum ADK ad HGC rectangulum, eamdem rationem continere, quam habet quadratum BI ad BL quadratum.



Demonſtratio.

QVoniam angulus aſymptotorum ABC rectus eſt, contingentes per I & L ductę duplæ ſunt [b] rectarum BI, BL, illarumque dimidia iiſdem æqualia: ſed oſtenſum eſt rectangulum ADK contingentis in I [c] quadrati, dimidio eſſe æquale, vti & rectangulum HGC contingentis in L, dimidio quadrati. Igitur rectangulum ADK ad HGC, rectangulum eſt, vt quadratum BI ad BL quadratum. Quod fuit demonſtrandum.

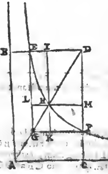
b Ex 61. huius.

c 18. huius.

PROPOSITIO XCIII.

SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ EHF: aſſumpto deinde puncto quodam intra illam D, ponantur DB, DC aſymptotis æquidiſtantes, occurrentes ſectioni in punctis E & F; ex quibus ducantur EG, FG parallelæ iiſdem aſymptotis, actâ denique DA quæ occurrat ſectioni in H, per H ſint LM, IK parallelæ aſymptotis.

Dico IM parallelogrammum ad LK parallelogrammum, eam rationem continere quæ eſt inter lineas DB, BE.



Demonſtratio.

VT DB eſt ad DC hoc eſt AC ad AB [d] ita eſt BE ad CF; igitur vt DB ad DC, ita eſt DE ad DF, hoc eſt FG ad GE: igitur AC ad AB, eſt vt FG ad GE; & AC ad GF, vt AB ad GE. Igitur AGD ſunt in directum, & IM, IK parallelogramma ad communem diametrum IK, LM conſtituta ſunt: vnde ſimilia ſunt inter ſe, adeoque in duplicata ratione DI ad IE. quia verò DB, BI, BE [e] proportionales ſunt, vt DI ad IE, ſic [f] DB eſt ad BI: igitur parallelogramma IM, LK duplicatam habent inter ſe rationem rectę DB ad BI, id eſt ſunt vt DB ad BE. Quod erat demonſtrandũ.

d Coroll. 91. huius.

e 79. huius.

f 1. De proportionibus.

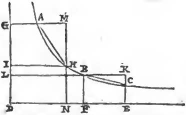
PRO-

PROPOSITIO XCIV.

CONſtituta ſit hyperbola ABC inter aſymptotos DG, DF quibus æquidiſtantes ponantur quatuor lineæ inter ſe proportionales, AG, HI, CE, BF, ducanturque AH, BC.

Dico figuram quadrilateram AGIH, quadrilateræ BFEC, æqualem exiſtere.

Demonſtratio.



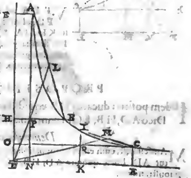
POnantur per H & B lineæ HN, BL. æquidiſtantes. aſymptotis quæ AG, CE lineis occurrant in M & K. vt AG ad HI, ſic CE eſt ad BF ex ſuppoſito; ſed vt AG ad HI, ſic ID [a] eſt ad DG; & vt CE ad BF, ſic DF ad DE. proportionales ſunt igitur DI, DG, DF, DE. a 74. huius.
Igitur vt DH rectangulum ad rectangulum DM, ſic DB rectangulum ad rectangulum DK, & permutando, vt DH ad DB rectangulum, ſic DM ad DK rectangulum. æqualia autem ſunt rectangula [b] DH. DB, igitur & rectangula DM, DK æqualia ſunt; adeoque & reſidua IM, FK. quia verò eſt vt GA ad GM, ſic EC ad EK, erit quoque vt GM ad MA, ſic EK ad CK. ſed vt GM ad MA, ſic GH rectangulum ad rectangulum AH, cuius dimidium eſt triangulum AMH; & vt EK ad CK, ſic EB rectangulum ad rectangulum CB, cuius dimidium eſt triangulum CKB; igitur vt HG rectangulum ad triangulum AMH, ſic EB rectangulum ad triangulum CKB; & permutando, vt GH rectangulum ad rectangulum FK, ſic AMH triangulum ad triangulum CKB: vnde cùm HG, BE rectangula oſtenſa ſint æqualia, triangula quoque AMH, BKC, adeóque reliqua quadrilatera, ſunt inter ſe æqualia. Quod erat demonſtrandum. b 44. huius.

PROPOSITIO XCV.

POnatur ABC hyperbola inter aſymptotos DE, DF. & ratio AE, BH eadem eum ratione CF ad IK parallelarum aſymptotis, iunctæ autem AB, IC diuiſæ ſint bifariam per diametros DL, DM. & ductæ ſint AN, CO, quæ æquidiſtent aſymptotis.

Dico P & Q eſſe communes interſectiones rectarum NA, BH, DL, & OC, IK, DM.

Demonſtratio.

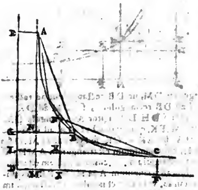


OCcurrant ſibi NA, HB lineæ in P. igitur vt EA ad HB, id eſt HP ad HB, ſic HD [c] eſt ad DE, id eſt NP ad NA; & diuidendo, vt HP ad PB, ſic NP ad PA; ſimilia igitur ſunt parallelogramma HDN, APB, & iuncta DP, [d] diametrum AB bifariam ſecat in L, quare AN, HB, DL linearum communis interſectio eſt P; Eodem modo oſtendetur Q communem eſſe interſectionem linearum IK, DM, OC, quæ fuerunt demonſtranda. c 74. huius. d Ex elementis.

PROPOSITIO XCVI.

ASymptotis hyperbolæ A B C, æquidiſtantes, & inter ſe proportionales ponantur lineæ A E, G B, C F, H I: iunctiſq; A B, C H; ponantur aſymptotis parallelæ A M, C L: rectarum verò M A, G B communis interſectio ſit N, & K communis interſectio linearum C L, H I.

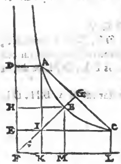
Dico A N B, H K C, triangula eſſe inter ſe æqualia.



Demonſtratio.

OStendimus in prioris propoſitionis demonſtratione eſſe G N ad N B, vt M N ad N A, adeóque eſſe vt G N ad N M, ſic N B ad N A, & ob eandem rationem vt I K ad K L, ſic H K ad C K: quia verò eſt ex poſitione vt E A hoc eſt G N ad N B, ſic C F hoc eſt I K ad K H, & vt M N ad N A, ſic L K ad K C, igitur ex æquo eſt vt N B ad N A, ſic H K ad K C; igitur cùm anguli ad N & K, æquales ſint, æqualia quoque ſunt triangula A N B, H K C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCVII.



HYperbolam A B C inter aſymptotos D F, F L conſtitutam ſubtendat A C: ductiſq; lineis A K, C E quæ aſymptotis æquidiſtent, & inuicem decuſſent in I, agatur per I diameter F B.

Dico F B productam rectam A C biſariam diuidere.

Demonſtratio.

a Per elementa.

VT D A ad E C, id eſt E I ad E C, a ſic E F eſt ad F D, id eſt K I ad K A: & diuidendo vt E I ad I F, ſic K I ad I A: & permutando vt E I ad I K, ſic C I ad I A: ſimilia igitur & ad eandem diametrum poſita ſunt parallelogramma E F K, A I C, & F I diameter biſecat diametrum A C. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XCVIII.

IIſdem poſitis: ducatur H B æquidiſtans A D.

Dico A D, H B, E C in continuâ eſſe analogia.

Demonſtratio.

b 75. huius.

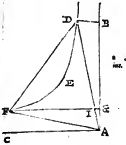
MAnifeſta eſt, cùm enim b proportionales ſint E I, H B, E C, & E I rectæ æquetur A D, lineæ quoque A D, H B, E C in continua ſunt analogia. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XCIX.

SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF, & ductæ DB, FG aſymptoto AC æquidiſtent: iunganturq; AD, AF, & DF.

Dico triangulum ADF æquale eſſe figuræ quadrilateræ DBGF.

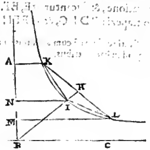


Demonſtratio.

TRiangulum BDA ᵃ æquale eſt FGA triangulo (quia dimidia rectangulorum DA, AF æqualium): igitur ablato communi triangulo AGI, reſidua ſunt æqualia: ſcilicet FAI triangulum, quadrilatero BDGI. addita itaque communi figurâ DIF, erit DAF triangulum, æquale quadrilatero DBGF. Quod fuit demonſtrandum. [a hu-ius.]

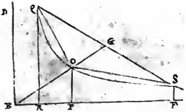
PROPOSITIO C.

SInt duæ hyperbolæ æquales & ſimiles, quarum aſymptoti ſint AB, BC; ED, EF: ponantur autem AK, LM; & SF, RQ proportionales inter ſe, & aſymptoto cuidam parallelæ. iunctiſque KL, QS ac diuiſis bifariam per diametros BH, EG, occurrentes ſectionibus in I & O. ducantur IK, IL, & OQ, OS.



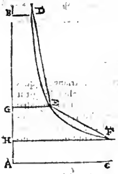
Dico triangulum KIL æquari QOS triangulo.

Demonſtratio.



POnantur IN, OP æquidiſtantes AK, QR. quoniam AK, LM, SF, QR, in æqualibus ac ſimilibus hyperbolis, proportionales ſunt: trapeziũ AKLM, ᵇ æquale eſt QRFS trapezio. & quia continuæ ſunt proportionales tam SF, ᶜ OP, QR, quàm AK, NI, ML, adeoque ſint proportionales AK, NI ipſis QR, OP: igitur quadrilatera AKIN, QOPR ᵈ æqualia ſunt inter ſe. & ſimiliter trapezia INML, OPFS. ablatis igitur trapezijs AKIN, & INML æqualibus ipſis QOPR, OPFS, remanet triangulum KIL æquale reſiduo triangulo QOS. Quod fuit demonſtrandum. [b 94. huius.] [c 97. huius.] [d 94. huius.]

PROPOSITIO CI.



SInt aſymptoto AC æquidiſtantes BD, GE, HF inter ſe in continua ratione, & ducantur DE, EF.

Dico trapezia BDEG, & GEFH inter ſe eſſe æqualia.

DEmonſtratio eadem eſt cum 49. huius: in qua de quatuor aſſeritur proportionalibus, quod in hac de tribus.

HY-

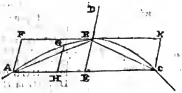
HYPERBOLÆ
PARS QVARTA

De ſegmentis hyperbolicis, connexis & concauis.

PROPOSITIO CII.

DAtæ hyperbolæ terminatæ, triangulum maximum inſcribere.

Conſtructio & demonſtratio.



HYperbola A B C, cuius centrum D, terminetur rectâ A C: quâ diuiſâ bifariam in E, ponatur diameter D E, occurrens ſectioni in B, & iungantur A B, C B, dico triangulum A B C, eſſe maximum illorum, quę hyperbolæ A B C inſcribi poſſunt. ponatur per B contingens F B. [a] æquidiſtabit illa rectæ A C: ducatur dein quæuis H G, parallela B E, occurrens ſectioni in G. patet G punctum eſſe infra lineam F B, adeoque G H minorem B E. vnde triangulum A G C minus eſt triangulo A B C: triangulum igitur A B C maximum eſt. datæ igitur hyperbolæ terminatæ, &c. Quod erat faciendum. a 16. huius.

PROPOSITIO CIII.

IIſdem poſitis:
Dico A B C triangulum maius eſſe dimidio ſegmenti A B C.

Demonſtratio.

ERigantur ex A & C æquidiſtantes B E, occurrentes F B contingenti in F & K: quoniam igitur tam A B C triangulum, quam [b] F E parallelogrammum, duplum eſt trianguli A B E, æqualia ſunt parallelogrammum F E, & triangulum A B C: vnde F C parallelogrammum duplum eſt trianguli A B C: ſed F C parallelogrammum maius eſt ſegmento A B C, (cùm F K contingens tota cadat extra ſectionem,) triangulum igitur A B C, dimidium parallelogrammi F C, maius quoque eſt dimidio ſegmenti A B C. Quod erat demonſtrandum. b Ex elementis.

Corollarium.

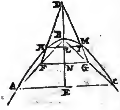
HInc apparet ratio inſcribendi triangulum cuiuis ſegmento hyperbolico, quod ad maximum triangulum inſcriptum, datam habeat rationem minoris inæqualitatis; conſtituendo ſcilicet rectam aliquam G H, quæ ad B E, datam rationem obtineat: Si enim ad G deducantur rectæ A G, C G, triangulum A G C ad A B C, eſt in ratione lineæ G H ad B E: cùm baſes ſint communes.

PROPOSITIO CIV.

HYperbolam A B G, cuius centrum D, ſubtendat recta A C, diuiſa bifariam à diametro D E; iunctiſque A B, C B, ac diuiſis bifariam in F & G; demittantur D F, D G, occurrentes ſectioni in H & I, iunganturque A H, H B, B I, C I.

Dico triangula A H B, B I C, æqualia eſſe.

Demonſtratio.



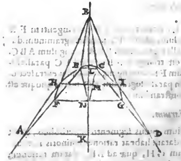
POnatur ex H ordinatim H L, ad diametrum hyperbolæ D E, occurrens ſectioni in M, & D G lineę in I: quoniam A B, B C in F & G, diuiſæ ſunt bifariam, F G æquidiſtabit A C, adeoque & ipſi H I cum H M, & A C ordinatim poſitæ ſint ad diametrum D E: quia verò A C in E diuiſa eſt bifariam, erit & F G in N, adeoque & H M in L bifariam quoque diuiſa. Sed & H I in L, biſſecta eſt, quia F G in N biſſectæ æquidiſtat; ſunt igitur æquales lineæ H M, H I, & puncta M & I eadem: quare D F, D G diametri in H & M, proportionaliter ſunt diuiſæ. rurſus cùm D F N, D G N triangula, item F B N, G B N æqualia ſint, reliqua etiam D F B, D G B triangula inter ſe æqualia ſunt. Vnde cùm D F, D G in H & M, proportionaliter ſint diuiſæ, æqualia quoque ſunt triangula D H B, D I B, adeoque & reliqua F H B, B M G: patet igitur & illorum dupla A H B, B M C triangula, inter ſe æquari: Quod erat démonſtrandum.

PROPOSITIO CV.

SEcent hyperbolam A B C, duæ parallelæ A D, B C, iungantúrque A B, C D:

Dico triangula maxima illis inſcripta, eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.



a 101. huius.

EX centro E ducantur diametri E F, E G, diuidentes rectas A B, C D bifariam in F & G, occurrentes hyperbolæ in H & I, & iungantur A H, H B, C I, I D, erunt hæc triangula [a] maxima ſegmẽtis A H B, C I D inſcripta. ductâ dein diametro E K, quæ bifariam partiatur rectam A D, ponatur F G, erit illa parallela lineæ A D, cùm A B, D C in F & G, diuiſæ ſint bifariam, conſtitutæque ſint inter parallelas A D, B C. ex H igitur ducatur ordinatim H M ad diametrum E K, oſtendetur, vt in priore propoſitione illam productam occurrere communi interſectioni I: adeoque F G, H I æquidiſtare; & E F, E G diametros in H & I proportionaliter eſſe diuiſas. Iunctis igitur E B, E C, B N, C N; cùm F G, H I, B C æquidiſtent, & in L, M, N bifariam ſint diuiſæ, æqualia ſunt triangula F B N, N C G, item N E B, N E C: vnde & reliqua F E B, E C G triangula quoque ſunt æqualia:

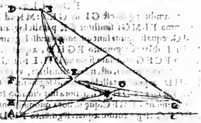
æqualia; quia verò EF, EG in H & I proportionaliter ſunt diuiſæ, erunt & FHB, CIG; adeoque & illorum dupla AHB, CID triangula inter ſe æqualia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CVI.

Sint AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEG, poſitaque ad diametrum AE ordinatim DG: ducantur DE, EG.

Dico ſegmenta conuexa DIE, GLE æquari.

Demonſtratio.



Diuiſis ED, GE bifariam in N & O, ponantur diametri AIN, ALO, iunganturque DIE, GLE: erunt igitur DIE, GLE triangula [a] maxima, & inter ſe [b] æqualia, maioraque dimidijs [c] ſegmentorum quibus inſcribuntur. ſimiliter ſi reſiduis vtrimque ſegmentis triangula inſcribantur maxima, oſtenditur triangula maxima ſegmentorum ID, IE æquari triangulis maximis ſegmentorum EL, LG; quæ operatio cùm ſine termino in vtroque ſegmento continuari poſſit, vt ablata ex DIE ſegmento maiora ſint dimidijs ſegmentorum à quibus auferuntur, & æqualia ablatis è ſegmento GLE, quorum ſingula maiora quoque ſunt dimidijs illorum à quibus auferuntur, ſegmentum DIE [d] æquale eſt ſegmento GLE. Quod erat demonſtrandum.

a 101. huius.
b 105. huius.
c 102. huius.
d 116 De progreſſionibus.

PROPOSITIO CVII.

Iiſdem poſitis: ponantur DB, EF, GH aſymptotorum vni æquidiſtantes:

Dico ſegmenta duo concaua BDFE, GHFE inter ſe æquari.

Demonſtratio.

Quoniam BG ordinatim ponitur ad AE, tres BD, FE, GH proportionales ſunt, vnde [e] rectilineum BDFE æquale eſt rectilineo FEGH. ſed per præcedentem, æqualia quoque ſunt ſegmenta conuexa DIE, GLE; reſidua igitur ſegmenta BDFE, GHFE, inter ſe æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

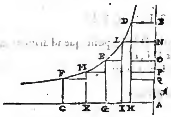
e 100. huius.

PROPOSITIO CVIII.

Sint AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF, & in continua ſint analogia DH, EG, FC aſymptoto AB æquidiſtantes.

Dico ſegmentum DHGE, æquari ſegmento EGCF.

 Demon-



Demonſtratio.

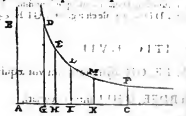
POnantur LI, MK mediæ proportionales inter HD, EG, FC; ducanturque BD, LN, EO, MP, FQ æquidiſtantes aſymptoto AC: cùm igitur DH, LI, EG, MK, FC eandem continuent rationem, proportionales ſunt AH, AI, AG, [a] AK, AC. quia verò HI, IG, GK, &c. differentiæ, ſunt in [b] ratione ſuorum integrorum, vt HI ad IG, ſic AI ad AG, id eſt EG ad LI. quare [c] parallelogramma LH, EI æqualia ſunt: ſimiliter quia eſt GI ad GK, vt MK ad EG, æqualia quoque ſunt parallelogramma EI, MG: ſimiliter FK parallelogrammum æquale eſt parallelogrammo MG, æqualia igitur ſunt quatuor parallelogramma LH, EI, MG, FK: igitur duo LH, EI ablata è ſegmento EGHD, æqualia ſunt duobus MG, FK ablatis è ſegmento FCEG: Rurſum ſi inter DH, LE, EG, item EG, MK, FC, mediæ ponantur proportionales, oſtendetur ſimiliter, vt prius, parallelogramma in ſegmento EGHD, æquari parallelogrammis ſegmenti FCEG: quod cùm ſemper fieri poſſit, ſic vt ablata ex DHEG, maiora ſint dimidio ſegmenti DHEG, & æqualia ablatis ex ſegmento EGFC, quę maiora quoque ſunt dimidio eiuſdem ſegmenti, conſtat FCEG [d] ſegmentum æquari ſegmento EGDH. Quod fuit demonſtrandum.

a 78. huius.
b 1. De progreſſionibus.
c 14. Sexti.
d 116. De progreſſionibus.

PROPOSITIO CIX.

SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF: diuiſâque AC, vt AG, AH, AI, AK, AC continuæ ſint proportionales, ponantur GD, EH, LI, MK, FC, ipſi AB æquidiſtantes.

Dico HD, IE, KL, CM ſegmenta eſſe æqualia.



Demonſtratio.

QVoniam AG, AH, AI, &c. proportionales ſunt, DG, EH, LI, &c. eamdem quoque inter ſe continuant [e] rationem; vnde DH, EI [f] ſegmenta ſunt æqualia. Similiter cùm EH, LI, MK, FC in eadem ſint proportione, [g] æqualia quoque ſunt ſegmenta EI, LK, MC. Conſtat igitur veritas propoſitionis.

e 78. huius.
f 106. huius.
g Ibid.

PROPOSITIO CX.

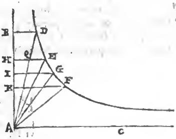
SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF, & ſegmenta ſint æqualia DEHB, EGIH, GFKI: ponanturq́ AD, AE, AG, AF:

Dico figuras miſtilineas DAE, DEHB, item EAG, EGIH, &c. ac denique DAE, EAG, GAF figuras inter ſe æquari.

Demon-

Demonſtratio.

TRiangulum ABD a æquale eſt triangulo AHE: ablato igitur communi triangulo AHQ, manet AQE triangulum, æquale quadrilatero BDQH: addito igitur communi DQE, erit HBDE ſegmentum æquale figuræ mixtilineæ DAE. ſimiliter oſtenduntur figuræ EAG, GAF æquari ſegmentis EHGI, IKGF: quod erat primum. vnde cum ſegmenta illa æqualia ponantur, patet & figuras DAE, EAG, GAF quoque inter ſe æquari. Quæ erant demonſtranda.



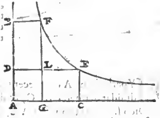
a Ex 47. huius.

PROPOSITIO CXI.

SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ FE: poſitiſq; BF, DE, FG, EC, quæ aſymptotis æquidiſtent: Dico FEDB ſegmentum æquari ſegmento FECG.

Demonſtratio.

AEqualia ſunt b rectangula GB, CD: addito igitur communi FLE, conſtat FECG figuram, æquari figuræ FEDB. Quod erat demonſtrandum.



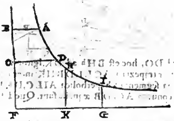
b 47. huius.

PROPOSITIO CXII.

DAto ſegmento concauo ABCD, parallelis lineis vni aſymptotorum intercepto aliud æquale exhibere, quod ad datum punctum pertineat.

Conſtructio & demonſtratio.

SInt BF, FG aſymptoti hyperbolæ ADH, & datum ſit ſegmentum concauum ABCD, & punctum H. oporteat ſegmentum concauum exhibere, quod æquale ſit ABCD ſegmēto, cuius vnum latus ad H pertineat. Poſitā HK parallelā aſymptoto BF, fiat vt CF ad BF, ſic FK ad FG, ponaturque GI æquidiſtans HK: Dico factum eſſe quod petitur. eſt enim IG ad HK, vt c FK ad FG, id eſt CF ad FB, id eſt AB ad DC: quare ADCB ſegmentum, æquale eſt ſegmento IHKG. Factum igitur eſt quod petebatur.



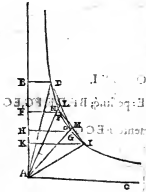
c 47. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXIII.

Sint A B, A C aſymptoti hyperbolæ D F I, poſitiſq; D B, F E, G H, I K proportionalibus, quæ aſymptoto A C æquidiſtent; iungantur D G, F I; quibus diuiſis in L & M bifariam, diametri ponantur A L, A M: Dico illas ab hyperbola in N & O proportionaliter diuidi.

Demonſtratio.



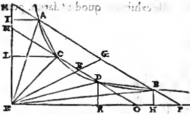
POnantur A D, A F, A G, A I, & perficiantur triangula D N G, F O I. cùm D B, F E proportionales ſint G H, I K, D B eſt ad G H, vt F E ad I K: quare tam ſegmenta a concaua B D G H, F E K I, quàm conuexa b D N G, F O I æqualia ſunt: quia verò B D G H & F E K I ſegmenta æquantur, æqualia quoque ſunt triangula c A D G, A F I; ſimiliter quia D N G, F O I ſegmenta æqualia ſunt, triangula quoque d D N G, F O I æquantur. igitur D N G triangulum ad triangulum D A G, vt F O I triangulum ad triangulum F A I: ſed D N G triangulum eſt ad triangulum D A G e vt L N ad L A, & vt M O ad M A, ſic F O I triangulum eſt ad triangulum F A I: proportionaliter igitur in N & O diuiſæ ſunt diametri L A, M A: quod erat demonſtrandum.

a 106. huius.
b 105. huius.
c Ex 109. huius.
d 105. huius.
e Ex elementis.

PROPOSITIO CXIV.

Hyperbolam A B C ſecent duæ parallelæ A B, C D quas bifariam diuidat diameter E F G, & ducantur A C, B D. Dico ſegmenta conuexa A C, D B eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.



POſitis aſymptotis E M & E H, producantur A B, C D donec occurrant aſymptotis in M, P, N, O punctis, ducanturque E A, E C, E B, E D, item A I, C L, D K, B H, parallelæ aſymptotis: erit ergo A M ad C N, f vt eſt A I ad C L. ſed vt eſt A M ad C N, ita quoque eſt B P g ad D O, hoc eſt B H h ad D K. Igitur vt A I ad C L, ita eſt B H ad D K. ſunt igitur trapezia i A C L I, D B H K inter ſe æqualia; ſed eadem de cauſa etiam concaua ſegmenta k hyperbolica A I L C, D K H B æqualia ſunt; reſidua igitur ſegmenta conuexa A C, D B æqualia ſunt. Quod demonſtrandum fuit.

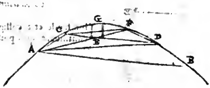
f Ex 73. huius.
g Coroll 15. huius.
h Ex 73. huius.
i 94 huius.
k 105. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXV.

SEcent duæ AB, CD parallelæ hyperbolam ACB, & iungatur AD, cui fiat æquidiſtans CF. ponaturque AF: Dico ACF ſegmentum, ſegmento CFD æquale eſſe.

Demonſtratio.



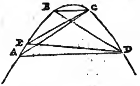
IVngantur AC, CF, FD; quoniam AD ipſi CF æquidiſtat: ſegmentum FD ſegmento AC a æquale eſt. quia verò triangula AFD, ACD, eamdem habentia altitudinem & baſim, æqualia ſunt, ablato communi AED, æqualia remanent triangula AEC, FED: igitur totum ACE mixtilineum, toti EFD mixtilineo æquatur. addito igitur communi CGFE, exſurgent æqualia ſegmenta ACGF, & CGFD. Quod fuit demonſtrandum.

a 113. huius

PROPOSITIO CXVI.

SInt in hyperbola, ſegmenta æqualia ABC, BCD. iunganturque AD, BC. Dico AD, BC lineas æquidiſtare.

Demonſtratio.



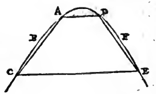
SI enim AD non æquidiſtat BC, ponatur DE parallela BC, & iungantur CE. ſegmentum igitur EBC, b æquatur BCD ſegmento: ſed ex ſuppoſitione BCD ſegmento æquatur ſegmentum CBA; igitur & CBA ſegmento, æquale exiſtit ſegmentum CBE, pars toti, quod fieri nequit; ſunt igitur æquidiſtantes BC, AD. Quod fuerat demonſtrandum.

b 114. huius.

PROPOSITIO CXVII.

DAto hyperbolæ ſegmento conuexo, ex dato in perimetro puncto rectam ducere, quæ ſegmentum auferat, dato æquale.

Conſtructio & demonſtratio.

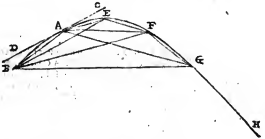


DAtum ſit ſegmentum ABC, & punctum D; oporteat ex D rectam ducere, quę ſegmentum auferat dato æquale. iungantur AD, & CE ponatur æquidiſtans AD, iunganturque DE: patet a ſegmentum DFE ſatisfacere petitioni.

a 113. huius.

Corollarium.

HInc facile erit colligere, quâ praxi continuare quis poſſit in infinitum,



æqualia ſegmenta conuexa, à quouis dato puncto, in hyperbolæ perimetro. Sit enim datum punctum A, & ſegmentum AB, cui æqualia ſegmenta exhiberi debeant. ponatur CAD contingens hyperbolam in A, & BE æquidiſtans AD, erit EA ſegmentum æquale b ſegmento AB; tum rectæ AE, ponatur æquidiſtans BF, iunganturque EF, erit denuò EF ſegmentum ſegmento c AB, hoc eſt AE æquale. eodem modo ponendo BG parallelam AF, erit ſegmentum FG, æquale AB vel AE, vel EF. ſic de reliquis in infinitum.

b Ibid.
c Ibid.

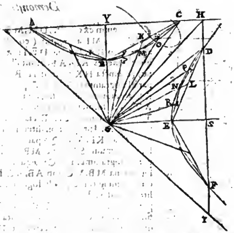
PROPOSITIO CXVIII.

COniugatarum ſectionum ABC, DEF; diametri coniugatæ ſint GB, GE, ad quas ex aſſumpto in GH aſymptoto, puncto H, ordinatim ponantur HA, HF, auferentes ſegmenta ABC, DEF.
Dico illa eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.

IVnctæ CB, DE biſatiam ſecentur in K & L, per diametros GK, GL, iunganturque BMC, DNE. Quoniam igitur AC, DF ordinatim ad coniugatas diametros poſitæ, aſymptoto in eodem occurrunt puncto H, æqualia ſunt d triangula BYC, EZD: quia verò BC, DE biſariam ſecantur in L & K, ductæ GK, GL e diametri ſunt coniugatæ, & MN, LK innctę æquidiſtant aſymptoto GI: proportionaliter igitur in M & N diuiſæ ſunt diametri GK, GL: vnde iunctis GC, GD, cùm triangula GBC, f GED inter ſe æqualia ſint, triangula quoque BMC,

d Per 61. huius.
e 65. huius.
f 44. huius.

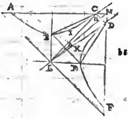


BMC, DNE æqualia ſunt. Similiter ſi MB, NE bifariam ſecentur in V, S, & MC, DN in X & T, oſtendetur vt prius, iunctas VG, SG, item XG, TG diametros eſſe coniugatas; ac proinde triangula BPM, MOC æqualia eſſe triangulis NRE, NQD: quæ operatio cùm ſine termino continuari poſſit, vt ablata triangula maxima è reſiduo ſegmenti DNB, æqualia ſint ablatis è reſiduo ſegmenti BMC, a conſtat ſegmenta DNE, CMB, adeoque YBC, DEZ, & eorum dupla ABC, DEF ſegmenta inter ſe æquari. Quod erat demonſtrandum. a 1. de progreſſionibus.

PROPOSITIO CXIX.

SInt ABC, DEF coniugatarum ſectionum, diametri coniugatæ LB, LE: ſint autem ad illas ordinatim poſitæ AC, DF occurrentes aſymptoto HL in vno eodemque puncto M: ponanturque BE, DG.

Dico ſegmenta concaua, BICHG, & EKDHG inter ſe æqualia eſſe.



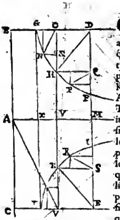
Demonſtratio.

SVnt enim per præcedentem æqualia ſegmenta conuexa BIC, DKE, ſed & æqualia ſunt trapezia b BGHC, GEDH; igitur & reſidua ſegmenta concaua BICHG, EKDHG inter ſe ſunt æqualia. b 54. huius.

PROPOSITIO CXX.

SInt hyperbolæ coniugatæ GHF, LKI, earumq; aſymptoti BAC, AM, ſitq; AB æqualis AC, & DE parallela AB; alteri verò aſymptoto AM, æquidiſtent BD, EC occurrentes ſectioni in G, & L.

Dico ſectorem DGHF, ſectori EIKL æqualem exiſtere.



Demonſtratio.

CVm enim ex conſtr. DM, ME æquales ſint, item FM, a MI æquentur (eo quod FI parallela ſit aſymptoto BA,) etiam DF, IE æquales erunt; ductiſque diametris AD, AE, erunt illæ b diametri coniugatæ, & iuncta HK c parallela BA. formentur itaque parallelogramma OQ, SV, per lineas OHKV, HQ, KS aſymptotis parallelas, ſimiliter ductis AO, AQ, & AV, AS formentur parallelogramma ON, PQ, RS, TV. Quoniam AD, AE diametri ſunt coniugatæ, & in H & K, d proportionaliter diuiſę, vt AD ad AE, ſic HD ad KE, & OQ e parallelogrammum ad parallelogrammum SV, vt MB parallelogrammum ad parallelogrammum MC: æqualia ſunt autem parallelogramma MB, MC (ob AB, AC lineas æquales) æqualia ſunt igitur & parallelogramma OQ, SV. Similiter æqualia oſtenduntur parallelogramma PQ, NO, parallelogrammis RS, TV: quæ operatio cùm in infinitum continuari poſſit, vt ablata è ſectore FHGD quę maiora ſunt dimidio ſectoris GHFD æqualia ſint, ablatis è ſectore IKLE, quę maiora quoque ſunt dimidio ſectoris IKLE, conſtat f ſectores FH, GD, IKLE, eſſe inter ſe æquales. Quod fuit demonſtrandum.

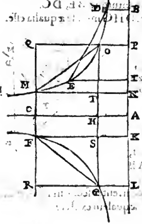
a 52. huius.
b 54. huius
c 44 huius.
d 56. huius
e Ex elementis.
f 116. De progreſſionibus.

PROPOSITIO CXXI.

SInt AB, AC aſymptoti coniugatarum ſectionum DE, FG: ponantur autem BD, IE proportionales LG, KF, quæ omnes aſymptoto AC æquidiſtent:

Dico BDIE concauum ſegmentum, æquari ſegmento concauo FKLG.

Demonſtratio.



POnantur FM, GO aſymptoto AB, & MN, OP ipſi AC æquidiſtantes: & FM quidem occurrat OP, LG productis in Q & R. cùm igitur tam FM, NK, quàm FK, MN æquidiſtent, ęqualia ſunt latera FK, MN; MF, NK; ac proinde cùm MF in C g diuiſa ſit bifariam, æqualia ſunt parallelogramma MA, FA: vnde & reſidua quoque parallelogramma NQ, RR æqualia ſunt: (cùm enim OG in H, id eſt LP in A, id eſt QR in C diuiſa ſit bifariam, tota parallelogramma QA, RA inter ſe æquantur:) eâdem de causâ cùm æquales quoque ſint h ſectores OEMQ, FRGF, æqualia ſunt reſidua ſegmenta OPNM, FKLG: eſt autem OPNM ſegmentum, æquale i ſegmento BDIE, (cùm BD ſit ad IE, vt GL ad FK ex poſitione, id eſt OP ad MN:) ſegmentum igitur BDIE, æquale eſt ſegmento FKLG. Quod fuit demonſtrandum.

g 52. huius.
h 120. huius.
i 108. huius.

PROPOSITIO CXXII.

Iiſdem poſitis, iungantur DE, FG.

Dico ſegmenta conuexa DE, FG quoque inter ſe æquari.

Demonſtratio.

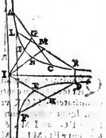
Ducatur recta MO, erit igitur ſegmentum [a] OEM æquale ſegmento FGI: ſed OEM ſegmento æquale eſt [b] ſegmentum DOE, (quia DBIE, OPNM ſegmenta concaua oſtenſa ſunt æqualia in priori propoſ.) ſegmentum igitur DOE, æquale eſt ſegmento FG. Quod erat demonſtrandum. a 118. huius. b 106. huius.

PROPOSITIO CXXIII.

Sint ABC, DEF ſegmenta quæuis æqualia, coniugatarum ſectionum ABC, DEF; & diuidantur rectæ AC, DF, biſariam, per diametros IG, IH:

Dico IB ad BG eamdem habere rationem, quam IE ad EH.

Demonſtratio.

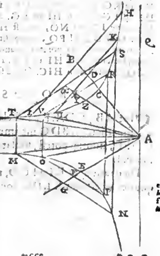


Ductis DK & FL quæ aſymptoto IO æquidiſtent: iungatur KL; ſegmentum igitur KNL æquale [c] eſt ſegmento DEF, id eſt per hypotheſim ſegmento ABC. vnde LK diuiſa in M biſariam per diametrum IM, erunt GI, MI diametri proportionaliter à ſectione diuiſę. ſed & IH quoque in E [d] diuiſa, vt IM in N, proportionaliter igitur diuiſæ ſunt diametri IG, IH. Quod fuit demonſtrandum. c 119. huius. d 112. huius.

PROPOSITIO CXXIV.

Sint AC, AE coniugatarum ſectionum quæcumque diametri, proportionaliter diuiſæ; & AC quidem in D & B, vt AE ſecta eſt in F & G; ponantur autem in vtraque ſectione, per diuiſionum puncta, ordinatim lineę LK, IH, OP, MN:

Dico ſegmentum LCK, æquari ſegmento OEP, & HCI æquari ſegmento NEM.



Demonſtratio.

Poſitis MT, QV, RP, NS parallelis aſymptoto AQ, iungantur RV, ST, quæ biſariam ſecentur in Y & X, per diametrum AZ quæ in Y & X diuiſa erit, vt AE in F & G (quia ATX, AVY triangula æqualia ſunt triangulis AGM, AFO) id eſt ex hypotheſi, vt AC in D & B. quare & ſegmentum [e] RZV, æquale eſt ſegmento LCK, & TZS, ſegmento ICH æquale. Sed & ſegmentum RZV, æquale eſt OEP [f] ſegmentum, & TZS æquale eſt ſegmentum MEN. Segmēta igitur LCK, HCI æqualia ſunt ſegmentis OEP, NEM. Quod fuit demōſtrandū. e 123. huius. f 119. huius.

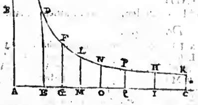
 PRO-

PROPOSITIO CXXV.

INter aſymptotos AB, AC, conſtituta ſit hyperbola; ex qua aſſumantur quæuis duæ partes terminatæ rectis DE, PQ, & HI, KC, quæ æquidiſtent aſymptoto AB. ſit autem ſuperficies DEQP commenſurabilis plano HICK.

Dico ſuperficiem DEQP toties continere ſuperficiem HICK, quoties ratio lineæ DE ad PQ, multiplicat rationem HI ad KC.

Demonſtratio.



QVoniam commenſurabiles ponuntur quantitates DEQP, HICK, eam inter ſe rationem continent, [a] quam numerus ad numerum: ſit igitur DEQP ad quantitatem HICK vt quatuor ad vnum. Fiantque & HI ad KC, ſic ED ad FG. Igitur ſegmentum HICK ſegmento [b] DEGF eſt æquale. Facta iterum ratione FG, ad LM, & LM ad NO eâdem, cum ratione DE ad FG, erunt ſegmenta FGML, LMON inter ſe æqualia, & ſingula æqualia ſegmento DEGF, hoc eſt HICK ſegmento. Porrò cùm ſuperficies DEQP ponatur quadrupla ſuperficies HICK, erit quantitas NOQP quarta pars quantitatis DEQP. proindeque NOQP ſegmento HIC eſt æqualis igitur eſt NO ad PQ, vt linea HI ad KC. eſt autem ratio DE ad PQ, compoſita ex multiplicatione rationis DE ad FG. hoc eſt HI ad KC, & ex ratione FG ad LM, hoc eſt HI ad KC, & ratione LM ad NO, hoc eſt HI ad KC, & tandem ex ratione NO ad PQ. Igitur ratio DE ad PQ, compoſita eſt ex ratione DE ad FG, quadruplicata, ſed etiam quadrupla ponitur quantitas DEQP ſegmenti HICK. igitur toties multiplicat rationem HI ad CK, ratio DE ad PQ, quoties continet ſuperficies DEQ, ſuperficiem HIC. Quod fuit demonſtrandum.

a 5 decimi.

b 168. huius.

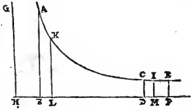
PROPOSITIO CXXVI.

SInt AB, CD, EF parallelæ aſymptoto HG hyperbolæ ACE, & ſuperficies ABDC incommenſurabilis CDEF, quantitas autem CDFE, quoties poteſt, ſublata a ſuperficie [c] ABDC terminetur in linea KL:

c Ex 1. decimi.

Dico rationem KL ad CD, toties multiplicare rationem CD ad EF, quoties ſuperficies KLDC continet planum CDFE.

Demonſtratio.



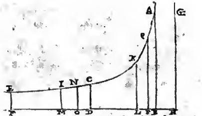
Qvoniam ſuperficies C D F E aliquoties ſublata à quantitate A B D C terminatur in K L. igitur K L D C eſt figuræ C D F E commenſurabilis; quare per præcedentē propoſitionem ratio K L ad C D, toties multiplicat rationem C D ad E F, quoties ſuperficies K L D C, continet quantitatem C D F E. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO CXXVII.

Iiſdem poſitis, diuiſa ſit ſuperficies D E, per parallelam aſymptoto, bifariam in I M, & pars D I bifariam per rectam N O, & idem continuetur donec D N ſit minor quantitas ſuperficie A B L K; & auferatur Q P L K planum æquale D N à quantitate A B L K.

Dico iterum quantitatem Q P D C toties continere quantitatem C D F E, quoties ratio Q P ad C D multiplicat rationem C D ad E F.

Demonſtratio.

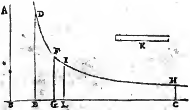


Qvoniam D N ſuperficies per ſubdiuiſionē quantitatis C F, in æquales partes, orta eſt; ſuperficies D N, commenſurabilis eſt quantitati C F: Igitur & P K quantitas, æqualis D N, [a] commenſurat quantitatem C F. Sed F C ex hypotheſi commenſurat planum K L C D, adeoque & totum P Q C D: commenſurabiles igitur ſunt ſuperficies C F, & Q D: Quare toties multiplicat ratio lineæ Q P ad lineam C D, rationem C D ad E F, [b] quoties planum Q P D C, continet planum C F. Quod erat demonſtrandum.

[a] Ex 11. decimi.

[b] 175. huius.

PROPOSITIO CXXVIII.

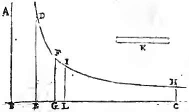


Sint A B, B C aſymptoti hyperbolæ D F H, & ponatur quæcunque ſuperficies D E G F parallelis aſymptoto A B comprehenſa, incommenſurabilis quantitati F G C H:

Dico toties poſſe ſubdiuidi in partes æquales ſuperficiem F G C H, vt vna aliquoties commenſurans partem ſuperficiei D E G F, relinquat in ea reſiduum, quâlibet datâ quantitate minus.

Demonſtratio.

Sit quantitas data quantumuis exigua K: oportet demonſtrare, planum F G C H toties in æquales partes poſſe diuidi, vt illarum vna commenſurans partem aliquā ſuper-



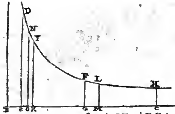
ſuperficiei D E G F, relinquat in ea reſiduum, minus datâ quantitate K. ſubdiuidatur in æquales partes planum F G C H per primam decimi, toties, vt F G L I reſidua pars, minor ſit quantitate K; erit illa plano F G H C (vt patet ex ſubdiuiſione per partes æquales facta) commenſurabilis; planum igitur F G L I quoties poteſt, auferatur ex plano D E F G: Dico reſiduum quantitatis D E F G, plano K minus eſſe: ſi non, igitur reſiduum vel æquale, vel maius eſt plano K. ſi æquale; ergo F G L I quantitas, commenſurabilis eſt quantitati D E F G: & quia F G L I, commenſurat quantitatem F G H C, (vt ex eiuſdem ſubdiuiſione in conſtructione factâ conſtat) planum igitur D E F G commenſurabile [a] eſt plano F G H C: quod eſt contra hypotheſim. Iam vero reſiduum ex D E G F relictum, maius ſit dato K; ergo quantitas F G L I (quę minor eſt quantitate K) iterum ex reſiduo plani D E F G auferri poterit: ergo facta non eſt ſublatio, quoties fieri potuit; quod rurſum contra ſuppoſitum eſt. Reſiduum igitur in plano D E F G relictum, minus eſt quantitate K: quod erat demonſtrandum.

[a] Ex 11. decimi.

PROPOSITIO CXXIX.

SInt A B, B C aſymptoti hyperbolæ D F H, & D E, F G, H C parallelę aſymptoto: plano autem D E G F incommenſurabile ſit planum F G C H.

Dico rationem D E ad F G, toties multiplicare rationem F G, ad H C, quoties quantitas D E C F, continet quantitatem F G C H.



Demonſtratio.

SI enim ita non ſit igitur ratio D E ad F G, ſæpius multiplicet rationem F G ad H C, quam D E F G planum, continet planum F G H C; vel contra: ſi primum, ponatur ratio I K ad F G, toties multiplicans rationem F G ad H C, quoties planum D E F G continet planum F G H C: minor ergo eſt ratio I K ad F G, [b] quam D E ad F G; adeoque & I K minor D E. Vlterius diuidatur per æquales partes planum F G H C, vt pars eius F L G M plano F G H C commenſurabilis, [c] minor ſit parte D E K I: tum F M ablatâ ex D E I K quoties poteſt, relinquat partem D N O E: quæ minor eſt parte D E K I, adeoque N O linea cadit inter D E, I K: ſi enim D E N O non minor ſit D E K I, ſed illi æqualis, vel illâ maior; poterit ex D E N O iterum auferri F G L E planum quod minus eſt D E I K ex plano D E F G, quod eſt contra ſuppoſitum. minor igitur eſt quantitas D E N O, quantitate D E I K, & N O linea eſt inter D E, I K. igitur ratio N O ad F G maior eſt ratione [d] I K ad F G. ac proinde ratio N O ad F G, magis multiplicat rationem F G ad H C, quàm eamdem multiplicet ratio I K ad F G: quia verò F M quantitas communis eſt menſura planorum F G H C, N O F G. commenſurabilia ſunt plana [e] F G H C, adeoque toties multiplicat ratio N O ad F G, rationem F G ad H C, quoties planum N O F G continet planum F G H C; ſed & planum D E F G toties continet planum F G H C, quoties ratio I K ad F G, multiplicat rationem F G ad H C: ſæpius igitur planum N O F G contineat planum F G H C, quàm D E F G idem F G H C contineat: quod fieri non poteſt,

[b] Per elementa.
[c] Ex 1. decimi.
[d] Ex elementis.
[e] 11. decimi.

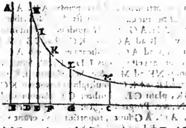
ſeſt, cùm D E F G quantitas maior oſtenſa ſit quantitate N O F G; igitur ratio D E ad F G, non magis multiplicat rationem F G ad H C, quàm planum D E F G continet planum F G H C. Eâdem planè ratione oſtenditur, planum D E F G non ſæpius continere planum F G H C, quàm ratio D E ad F G, multiplicat rationem F G ad H C. Planum igitur D E F G toties continet planum F G H C, quoties ratio D E ad F G, multiplicat rationem F G ad H C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXX.

Sint A B, B C aſymptoti hyperbolæ, & ponantur parallelæ aſymptoto D H, E I, F K, G L, C M, auferentes ſegmenta æqualia H E, I F, K G, L C.

Dico lineas H D, I E, K F, L G, M C eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.



Ratio enim D H ad I E, toties multiplicat rationem I E ad M C, quoties ſuperficies H E[a] continetur in ſuperficie I C. ſed ſuperficies H E eſt quarta pars, verbi cauſa, plani H C; igitur ratio H D ad M C quadruplicata eſt rationis H D ad I E. Similiter ratio I E ad M C, oſtenditur eſſe triplicata rationis K F ad M C; Igitur ratio H D ad I E, eſt eandem cum ratione I E ad K F. eodem pacto demonſtratur, rationem I E ad K F, eſſe eandem cum ratione K F ad L G, & L G ad M C. Igitur continuant eandem rationem lineæ H D, I E, K F, L G, M C. Quod fuit demonſtrandum.

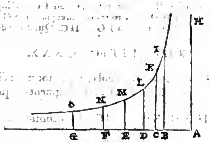
[a] 121. & 129. huius.

PROPOSITIO CXXXI.

Linea A B C ita diuiſa ſit in B, C, D, E, F, vt ratio A B ad A C, duplicata ſit rationis eius, quam habet A C ad A D; & A C ad A D, duplicata rationis A D ad A E, & hæc poſtrema duplicata A E ad A F, ita deinceps in infinitum.

Oporteat huius progreſſionis terminum aſſignare.

Conſtructio & demonſtratio.



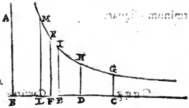
Fiat AG tertia proportionalis, ad duas primas AB, AC. Dico G punctum eſſe quod poſtulatur. Erigatur ex A normalis AH, deſcribaturque hyperbola IKL, cuius aſymptoti ſint AH, AG: & AH quidem æquidiſtantes ponantur ex punctis
a 74. huius. B, C, D, E, F, G. vt AB ad AC, a ſic KC eſt ad IB; & LD ad KC, vt AG ad AD: ſed ratio AB ad AC, duplicata eſt rationis AC ad AD; igitur & ratio KC ad IB, duplicata eſt rationis LD ad KC. Similiter ratio ME ad LD, duplicata eſt rationis NF ad ME, &c. Sed planum BK toties continet planum
b 129. huius. CL, b quoties ratio IB ad KC, multiplicat rationem KC ad LD. Duplum igitur eſt planum BK, plani CL: ſimiliter CL planum duplum eſt DM, & hoc
c 78. huius. duplum plani EN, &c. Progreſſio igitur hic eſt planorum in proportione dupla. Quia verò AB, AC, AG ſunt proportionales, erunt c & OG, KC, IB continuæ: ergo, cùm ratio BI ad OG, duplicata ſit rationis BI, ad CK, planum IG
d 129. huius. duplum eſt d plani BK, quod erat primum in ſerie planorum proportionis duplæ.
e 85. De progreſſionibus. Atqui tota ſeries magnitudinum proportionis duplæ e dupla eſt primæ magnitudinis. Ergo planum IG æquatur toti ſeriei planorum BK, CL, DM, &c. hoc eſt terminus progreſſionis planorum eſt linea OG. Quare & ſeriei linearum AB, AC, AD, &c. in proportione ante poſita continuatæ quę progreſſionem planorum ſemper comitatur, terminus eſt G. Exhibuimus igitur, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CXXXII.

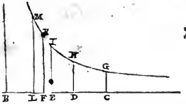
Ponatur iterum ratio BC ad BD, duplicata BD ad BE; & ratio BD ad BE duplicata rationis BE ad BF, &c.

Oporteat terminum huius progreſſionis exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



Fiat BL tertia proportionalis ad BD, BC. Dico L terminum eſſe quæſitum. Erectâ ex B normali ad BC, deſcribatur hyperbola GHI, cuius aſymptoti ſint AB, BC. & AB quidem æquidiſtantes ponantur CG, DH, EI, FK, LM. vt
f 74. huius. BC ad BD, f ſic HD eſt ad GC, & IE ad HD, vt BD ad BE. ſed ratio BC ad BD, duplicata eſt ra-
g Ex eadem. tionis BD ad BE, ratio igitur HD g ad GC duplicata quoque eſt rationis IE ad



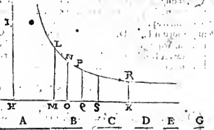
ad HD. Similiter ratio IE ad HD duplicata eſt rationis KF ad IE, &c. ſed planum HC toties continet planum HE, [a] quoties ratio HD, ad GC multiplicat rationem IE ad HD; duplum igitur eſt HC planum, plani HE. Similiter oſtendetur planum HE duplum eſſe plani IF, &c. Quare progreſſio hic eſt planorum in proportione dupla. Quia verò BL, BD, BC, adeoq; [b] & GC, HD, ML proportionales ſunt, planum [c] MC duplum eſt plani HC; planum igitur [d] MC æquale eſt toti ſeriei planorum HC, ID, KE, &c. hoc eſt linea LM terminus eſt progreſſionis planorum. Cùm igitur progreſſio linearum BC, BD, BE, &c. iuxta proportiones antè poſitas continuata, progreſſionem planorum perpetuò comitetur, eius quoque terminus erit punctum L. Factum igitur eſt quod petebatur.

a 129. huius.
b 78 huius.
c 129. huius.
d 85. De progreſſionibus.

PROPOSITIO CXXXIII.

SI ratio A ad B, duplicata rationis B ad C: ratio quoque B ad C, duplicata rationis C, ad D, vti & ratio C ad D, duplicata rationis D ad E, &c. quamuis hæc progreſſio continuetur in infinitum, non veniet tamen ad magnitudinem datâ minorem, vti in libro progreſſionum propoſ. . contingere demonſtrauimus in eiuſdem rationis continuatione.

Oporteat ergo exhibere lineam, quæ ſit minima omnium linearum, quę in tali progreſſione dari poſſunt.



Conſtructio & demonſtratio.

COnſtituantur HI, HK aſymptoti hyperbolę LNPR deinde ducatur LM aſymptoto æquidiſtans & æqualis ipſi A. fiatque vt A ad B, ita HO ad HM. & vt B ad C, ita HQ ad HO, &c. erigantur deinde ON, QP, &c. parallelæ aſymptoto HI. erit [e] LM ad NO, vt HO ad HM, hoc eſt ex conſtr. vt A ad B: & NO ad PQ. vt HQ ad HO; hoc eſt vt B ad C, & ſic deinceps. Fiat denique vt HM ad HO, ita HO ad HK, & erigatur KR parallela aſymptoto HI. Dico KR minimam eſſe lineam, quæ ſeriem duplicatæ rationis LM, ad NO, & NO ad PQ, & ſic in infinitum terminabit. Cùm enim ratio LM ad NO, vt patet ex diſcurſu duarum præcedentium, duplicata ſit rationis NO ad PQ, planum [f] LO duplum erit plani NQ: ſimiliter & planum NQ duplum eſt plani PS, & ſic de cæteris. Igitur ſuperficierum LO, OP, PS, &c. ſeries procedit in ratione dupla. quia verò HM, HO, HK, [g] adeoque & RK, NO, LM ſunt proportionales, planum [h] LK duplum eſt plani LO. igitur planum LK, [i] æquale eſt toti planorum LO, NQ, PS, &c. ſeriei in proportione dupla continuatæ: ergo RK erit [k] terminus progreſſionis linearum LM, NO, PQ, &c. ſed lineæ LM, NO, PQ, &c. ſunt æquales lineis A, B, C, D, &c. cùm lineæ LM, NO, PQ, &c. ſint lineis A, B, C, D ſupra proportionales, & prima LM æqualis ſit primæ A. Ergo RK eſt minima linearum A, B, C, &c. ſiue terminat ſeriem duplicatæ rationis A, ad B, B ad C, in infinitum continuatæ. Exhibuimus igitur, &c. Quod facere oportebat.

e 74. huius.
f 129. huius
g 78 huius.
h 129. huius.
i 85. De progreſſionibus.
k Ex 125. de progreſſionibus.

PROPOSITIO CXXXIV.

SIt ratio A B ad A C, triplicata rationis A C ad A D, & ratio A C ad A D triplicata rationis A D ad A E, &c.

Oporteat huius progreſſionis terminum aſſignare.

Conſtructio & demonſtratio.



INter A B, A C media ponatur A P, fiantque continuæ, A P, A C, A G, dico G terminum eſſe quæſitum. Fiant A H, A B, aſymptoti hyperbolæ I K L, & erigaotur B I, C K, D L, &c. parallelæ aſymptoto: Quoniam A B, A C, A D, A E rationem continuant proportionis triplicatæ, rectæ quoque I B, K C, L D, M E, a &c. proportionem continuant rationis triplicatæ. Vnde b plaoum I C, triplum eſt plani K D: & illud rurſum triplum plani L E, & ſic in cæteris procedendo habetur progreſſio planorum in ratione tripla: quia verò A B, A P, A C proportionales ſunt, & ipſis A P, A C, tertia proportioonalis eſt adiecta A G, continuabunt A B, A P, A C, A G rationem eandem: & ſi ex P erigatur parallela aſymptoto, B I, P Q, C K, O G, erunt ipſis A B, A P, A C, A G proportionales, ac proiode in ratione cootinua. Ergo ratio I B ad O G, eſt ſeſquialtera rationis I B, ad K C, eo ſeoſu quo in defioitiooe 10. & 11. libri 5. elem. proportiones dicuntur duplicatæ, triplicatæ, &c. Ergo planum I G ſeſquialterum eſt plani I C. ſed tota progreſſio planorum I C, K D, L E, &c. ſeſe mutuo io proportiooe tripla excedentium ſeſquialtera c eſt primi plani I C. ergo planum I G æquatur toti progreſſioni planorum I B, K D, L E, &c. ac proinde linea O G terminat progreſſionem planorum. Atqui progreſſionem planorum perpetuò comitatur progreſſio rationis triplicatæ, A B ad A C, A C ad A D, &c. ergo hæc quoque terminator in G. Exhibuimus ergo, &c. Quod erat faciendum.

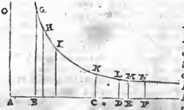
a 18. huius.
b 129. huius.
c 86. de progreſſionibus.

PROPOSITIO CXXXV.

POnatur ratio A B, ad A C, quadruplicata rationis A C, ad A D, ratio autem A C ad A D, quadruplicata rationis A D ad A E. & ſic conſequenter, huius verò progreſſionis finis ſiue terminus ſit punctum F.

Dico rationem A B, ad A C, fore triplicatam eius, quam habet A C, ad rectam A F.

Demonſtratio.



ERectâ ad A F normali A O, inter aſymptotos A F, A O, hyperbola deſcribatur G H K, & ex B, C, D, E, &c. ducantur B G, C K, D L, &c. æquidiſtantes aſymptoto A O. vt A B ad A C, ſic K C. ad G B: & L D ad K C vt A C ad A D, quadruplicata eſt igitur ratio G B ad K C, rationis K C ad L D, vnde & G C planum quadruplum eſt plani K D. Similiter oſtenditur planum K D quadruplum eſſe plani L E & ſic de cæteris. Progreſſio igitur hic eſt planorum in

In ratione quadrupla: quia verò F terminus eſt progreſsionis A B ad A C, &c. procedentium in ratione quadruplicata, F N quoque terminus eſt progreſsionis planorum in ratione quadrupla, & G F planum toti ſeriei æquale: vnde G C planum, ſiue primus ſeriei terminus ad reliquum K F eſt vt tria ad vnũ. Nam vti patet ex conſtruct. 2. propoſ. 80. de progreſsionibus, primus terminus ſeriei magnitudinum in ratione quadrupla, eſt ad reliquam ſeriem vt primi termini qui eſt A, & ſecundi qui eſt I, differentia, ad ſecundum terminum, hoc eſt vt 3 ad 1. ergo [a] ratio K C ad G B triplicata rationis eſt N F ad K C, id eſt A B ad A C, triplicatam habet rationis A C, ad A F. Quod erat demonſtrandum. a Ex conuerſa 129. huius.

Scholion.

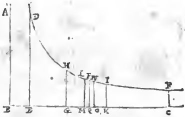
Benigne Lector, ex hac vltima propoſitione clarè perſpectum habes, quò tendebant præcedentes propoſitiones, ſcilicet vt aliqua ratio poſſet inueniri etiam per progreſſiones & hyperbolas exhibendi duas medias proportionales inter duas aſſignatas quantitates; quod profectò succeſſiſſet, ſi hanc vltimam propoſitionẽ problematico more proponere ac ſoluere æquè feliciter licuiſſet atque priores reſoluta ac demonſtrata ſunt. Certè primâ fronte rem intuenti, facilior longè videri poſſet ratio exhibendi terminum progreſſionis quadruplicatæ rationis, quàm triplicatæ, vel ſaltem non minus facilis ac rationis duplicatæ terminum Geometricè inuenimus longè tamen aliter rem curioſius intuenti apparet; interim viam aliquo modo ſtrauimus tibi, vt, ſi lubet, vlteriore conatu eò peruenire ſtudeas, quò nobis nondum licuit.

PROPOSITIO CXXXVI.

POſitis aſymptotis A B, B C, hyperbolæ D F, & quibuſuis D E, F C, aſymptoto parallelis; fiat H G media inter D E, F C. Deinde I K media inter H G, F C. denique L M media proportionalis inter I K, H G: & N O. media inter L M, I K, & id ſemper fiat: alternæ autem progreſſionis huius terminus ponatur P Q.

Dico P Q fore vnam è duabus medijs inter D E, F C.

Demonſtratio.



QVoniam D E, H G, F C ſunt continuæ, planum D G [b] æquatur plano H C: ſed, quia H G, I K, F C, etiam ſunt in continua, planum H C duplum eſt plani H K. igitur planum D G duplum eſt plani H K. ſed quia H G, L M, I K ſunt in continua, planum H K, duplum eſt plani H M. ergo planum D G quadruplum eſt plani H M. Ergo progreſſio planorum D G, H M, &c. procedit in ratione quadrupla quæ terminatur in P G. Deinde quoniam H G, I K, F C ſunt in continua, plana F K, I G æquantur: ſed, quia H G, L M, I K ſunt in continua, planum I G duplum eſt plani I M. ergo planum F K duplum eſt plani I M. ſed quia L M, N O, I K ſunt in continua, planum I M duplum eſt plani I O. ergo planum F K quadruplum eſt plani I O. Ergo progreſſio planorum F K, I O, &c. ſimiliter procedit in ratione quadrupla; terminatur autem in P Q. Iam verò quoniam (vt ſupra oſtendimus) planum D G æquatur plano H C, & planum H C duplum eſt plani F K, erit quoque planum D G duplum plani F K. ſed, vt ſe habent ſummi ſimilium progreſsionum termini, plana nempè D G, F K, ita ſe habent & [c] progreſsiones totæ, hoc eſt plana D Q, F Q. Quare cùm planum D G duplum ſit plani F K, erit & planum D Q duplum plani F Q. ergo ratio D E ad P Q duplicata eſt rationis P Q ad F C. ergo P Q eſt vna è duabus medijs inter D E, F C. Quod erat demonſtrandum.

b 109 huius.

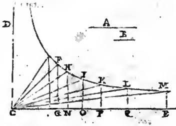
c 116 De progreſſion.

 PRO-

PROPOSITIO CXXXVII.

INter duas datas quotlibet medias proportionales exhibere conicè.

Conſtructio & demonſtratio.



SInt A, B duæ datæ: oporteat inter illas quatuor medias proportionales aſſignare; aſſumptâ hyperbola cuius aſymptoti D C, C E, ponatur G F æqualis A & æquidiſtans C D; & fiat vt B ad A, ita C G ad C E; & erigatur E M æquidiſtans F G: & ductis C F, C M: diuiſa ponatur quantitas F C M, concauæ hyperbolæ, in quinque partes æquales in H, I, K, L. & demittantur H N, I O, K P, L Q parallelæ aſymptoto: dico H N, I O, K P, L Q eſſe quatuor quę requiruntur. Oſtendimus quantitates F C H, H C I, &c. [a] æquales eſſe quantitatibus F G N H, N H I O, &c. ergo cùm F C M quantitas concaua, diuiſa ſit in quinque partes æquales etiam quantitas F G E M per parallelas H N, I O, K P, L Q in totidem partes æquales, diuiſa erit: ergo cùm ratio F G ad M E, toties multiplicet rationem F G ad H N, quoties [b] quantitas F G E M continet quantitatem F G N H, hoc eſt quinquies ex conſtructione, ratio F G ad M E quintuplicata eſt rationis F G. ad H N. igitur H N, I O, P K, L Q ſunt quatuor mediæ, inter duas datas F G, M E. Quod erat præſtandum.

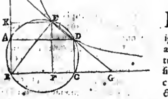
a 110. huius.

b 129. huius.

PROPOSITIO CXXXVIII.

CIrculo A B C rectangulum A B C D inſcribatur aſſumptiſque rectis A B, B C in aſymptotos, per D inter eoſdem deſcribatur hyperbola E D occurrens circulo denuo in E, ex quo demittantur rectæ E K, E F aſymptotis æquidiſtantes.

Dico B F, F E duas eſſe medias inter A B, B C.



Demonſtratio.

PEr puncta E & D agatur recta H E G, ponaturque B E: erit igitur H E [c] æqualis D G: & H K æqualis D C hoc eſt A B. Cùm triangula H K E, D C G [d] æqualia ſint inter ſe, & ſimilia; quia verò circulo A B C inſcriptum eſt rectangulum A D C, eadem vtrique [e] erit diameter; quare angulus B E D, adeoque & angulus H E B rectus eſt: quare cùm E K æquidiſtet A D, lateri rectanguli A B C D, recta E K normalis eſt ad H B: vnde tres ſunt in continua analogia [f] H K, K E, K B: ſed H K æquatur A B, & K E æqualis eſt B F, vti & K B ipſi F E, igitur & A B, B F, F E proportionales ſunt deinde cum rectangulo A B C [g] æquale ſit rectangulum K E F; vt A B ad B F, ita eſt F E ad

c Coroll. 15. huius.

d Ex 71. huius.

e Ex elementis.

f Ex elementis.

g 46. huius.

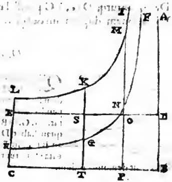
FE ad BC, igitur quatuor lineæ AB, BF, FE, BC ſunt in continua analogia, ac proinde BF, FE ſunt mediæ inter AB, BC. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXIX.

POnantur AB, BC, & AD, DE aſymptoti duarum hyperbolarum FGH, IKL æqualium & ſimilium ſic conſtitutæ, vt DE & BC, ſint parallelæ inter ſe: ducatur autem LC parallela DB.

Dico parallelogrammo BE æquari ſpatium infinitum duabus hyperbolis IKL, HNF comprehenſum.

Demonſtratio.



DIuidatur BC bifariam, rectâ ST, parallelâ CL occurrente hyperbolis in K & G, vel igitur ſpatium KGHL, duabus hyperbolis interceptum, maius vel minus eſt dimidio totius ſpatij, duabus intercepti hyperbolis, vel illi æquale: ſi minus vel æquale, poſita ſit altera KG, parallela CL, vt KGLH ſpatium maius ſit dimidio totius ſpatij hyperbolis comprehenſi, occurratque GK rectis DE, BC in S & T: erit igitur TC maior quã BT, & TE parallelogrammũ maius dimidio totius parallelogrammi BE. quia verò hyperbolæ duæ æquales ſunt, & ſimiles, habentque aſymptoton communem AB, ſpatium KSLE, æquatur GTHC ſpatio, additoq; communi GHSE, parallelogrammo TSEC æquale eſt ſpatium KLGH. ſimiliter BT linea bifariam diuiſa in P, ponatur PM æquidiſtans AB. igitur ſpatium MNKG vel minus aut maius eſt dimidio reſidui ſpatij KGFI, &c. producti, vel illi æquale. ſi æquale aut minus, poſita ſit, vt antè, quædam MNP vt ſpatium MNKG maius ſit dimidio reſidui KGFI producti: erit igitur, vt prius oſtenſum eſt, ſpatium MNGK æquale parallelogrammo PS, quod maius quoque eſt dimidio parallelogrammi BS: quæ operatio cùm ſine termino continuari poſſit, ita vt ablata ex parallelogrammo BE, maiora ſint illius dimidio & æqualia ablatis ex ſpatio duabus hyperbolis intercepto quæ maiora quoque ſunt dimidio eiuſdem ſpatij, conſtat totũ ſpatium duabus interceptum hyperbolis, [a] parallelogrammo BE eſſe æquale. ſi verò pars KGLH, æqualis ſit dimidio totius ſpatij hyperbolis intercepti, & pars MNGK æqualis dimidio reſidui, eadem inferuntur quæ prius, eademque eſt demonſtratio.

[a] 116. De progreſſionib.

HY-

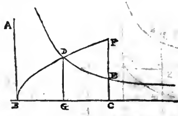
HYPERBOLÆ
PARS QVINTA

Hyperbolam expendit à parabola interſectam.

PROPOSITIO CXL.

SInt aſymptoti AB, BC, hyperbolæ DE, continentes angulum rectum: parabola verò deſcribatur BDF, cuius axis BC, occurrens hyperbolæ in D: ponanturq́; DG, FC parallelæ aſymptoto AB.

Dico EC, ad DG rationem duplicatam obtinere illius, quam habet DG ad FC.



Demonſtratio.

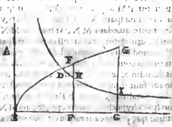
QVoniam BC axis ponitur parabolę BDF, & DG, FC ad eundem ſunt normales, vtpotè AB (perpendiculari ad BC) æquidiſtantes, ratio BG ad BC [a] duplicata eſt eius, quam habet DG ad FC: ſed vt BG ad BC, [b] ſic EC eſt ad DG, duplicata eſt igitur ratio EC ad DG, rationis DG ad FC. Quod fuit demonſtrandum.

a Ex 1. de parabola.
b 74. huius.

PROPOSITIO CXLI.

SInt denuò AB, BC aſymptoti hyperbolæ DHI rectum angulum continentes; deſcriptâ autem parabolâ BDE, habente BC axem; ponantur EF, GC parallelæ aſymptoto AB.

Dico rationem IC ad HF, eſſe duplicatam eius, quam habet EF ad GC.



Demonſtratio.

CVm enim angulus ABC rectus ſit, lineæ EF, GC ipſi AB æquidiſtantes, normales ſunt ad axem BC, vnde ratio BC ad BF, [c] duplicata eſt rationis GC ad EF. Sed ratio BC ad BF, eadem eſt cum ratione FH ad IC; [d] igitur ratio HF ad IC, duplicata eſt GC ad EF; ac proinde ratio IC ad HF, duplicata eius, quam habet EF ad GC. Quod fuit demonſtrandum.

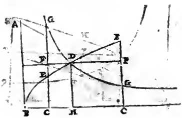
c Ex 1. de parabola.
d 74. huius.

PROPOSITIO CXLII.

Iiſdem poſitis per punctum interſectionis D, agatur DF, aſymptoto æquidiſtans, occurrens GC lineæ in F.

Dico rationem CG ad CF, eſſe duplicatam rationis CF ad CE.

Demonſtratio.



POnatur DH æquidiſtans EC; ratio BH ad BC, id eſt GC ad DH [a] duplicata eſt eius quam habet DH ad EC, eſt autem DH [b] æqualis FC; cùm HF parallelogrammum ſit. igitur GC ad CF, ratio duplicata eſt rationis CF ad CE.

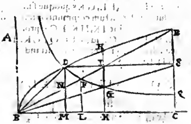
[a] 1. De parabola.
[b] Ex elementis.

PROPOSITIO CXLIII.

HYperbolam inter aſymptotos AB, BC angulum rectum continentes ſecet parabola BDE in D, habens axem BC; poſitaq; CE æquidiſtante AB, ducatur per D punctum interſectionis, linea DI parallela BC occurrens CE in S. Iunganturq; EB, SB, quæ hyperbolæ occurrant in F & G; ponantur autem lineæ DF, FG.

Dico conuexa ſegmenta DF, FG eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio.



POnantur DM, FL, GK æquidiſtantes AB; & GK quidem rectæ BE occurrat in I: erunt igitur proportionales continuæ [c] QC, GK, SC, id eſt DM. quare & [d] BM, BK, BC, lineæ, adeoque & DM, [e] HK, EC eamdem continuant rationem: ſed etiam IK, HK, EC, [f] ſunt proportionales; DM igitur [g] æqualis eſt KI, & I punctum communis interſectio eſt linearũ DS, BE, HK; vnde continuæ [h] ſunt proportionales GK, FL, DM, & ſegmenta tam [i] concaua, DFLM, FLGK, quàm [k] conuexa DF, FG, æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

[c] 77. huius.
[d] 78. huius.
[e] 33. De parabola.
[f] 42. De parabola.
[g] Ex elementis.
[h] 7. huius.
[i] 107. huius.
[k] 106. huius.

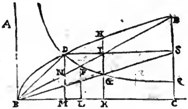
Digitized by Google

PROPOSITIO CXLIV.

Iſdem poſitis:

Dico ſegmenta DMKG, GKCQ eſſe æqualia.

Demonſtratio.



a 77. huius.
b 107. huius.

CVm enim IK, DM lineæ oſtenſæ ſint æquales, recta quoque KI æqualis eſt SC, quæ per conſtructionem æquatur DM: vnde cùm proportionales [a] ſint QC, GK, SC: eamdem quoque continuant rationem QC, GK, DM; adeoque ſegmenta [b] DMGK, GKQC æqualia ſunt.

PROPOSITIO CXLV.

EAdem figurâ manente, ſi DF, FG ſegmenta fuerint æqualia, & per F & G ductæ lineæ BE, BS; & BE quidem parabolę occurrat in E, ponaturque EC æquidiſtans AB:

Dico MDGK ſegmentum æquari ſegmento GKQC.

Demonſtratio.

c 107. huius.
d Ex conuerſa eiuſdem.
e 77. huius.
f 42. De parabola.
g 78 huius.
h 107. huius.

QVoniam ſegmenta conuexa DF, FG æqualia ponuntur, concaua quoque ſegmenta [c] DMFL, FLGK æqualia ſunt; vnde & tres [d] MD, FL, GK continuæ ſunt proportionales: ſed & IK, FL, GK [e] quoque ſunt proportionales; igitur MD, KI lineæ æquales ſunt, & I punctum communis interſectio linearum EB, DI, GK. Quare cùm proportionales [f] ſint IK, HK, EC; proportionales quoque ſunt DM, HK, EC, id eſt BM, BK, BC, id [g] eſt CQ, GK, DM. Segmenta igitur [h] DMGK, GKQC æqualia ſunt, quod erat demonſtrandum. vnde patet punctum S commune eſſe lineis SD, EC, BS.

PROPOSITIO CXLVI.

EAdem poſitâ figurâ, ducta ſit quæcumque BE occurrens parabolæ in E, & hyperbolæ in F; ponantur autem EC, FL, DM æquidiſtantes AB.

Dico ſegmentum FLQC triplum eſſe ſegmenti DMFL.

Demonſtratio.

i Ex 143. huius.
k 107. huius.

POſita DS æquidiſtante BC, ducatur BS, occurrens hyperbolę in G puncto, per quod recta ponatur GK, occurret [i] illa rectis BE, DS in vno eodemque puncto I: eruntque DM, FL, GK, item DM, GK, QC proportionales: quare ſegmenta DMFL, FLGK, [k] vti & DMGK, GKQC æqualia ſunt: addita igitur

ad

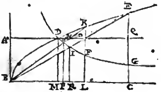
ad GKQC ſegmentum, ſegmento FLGK, patet FLQC ſegmentum triplum eſſe ſegmenti DMFL. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLVII.

EAdem ponantur quæ priùs: ductaque BH occurrat hyperbolæ in H: iungantur autem DH, HI.

Dico ſegmenta conuexa DH, HI eſſe æqualia.

Demonſtratio.



POnatur HP, æquidiſtans AB. erit igitur per præcedentẽ ſegmentum HPFL triplum ſegmenti DMHP. eſt autem ſegmentum a FLIR, æquale ſegmento DMRI: igitur ſegmentum DMRI, vnà cũ ſegmento HPRI, triplum eſt ſegmenti DMHP: igitur HPRI ſegmentum ęquale eſt ſegmento DMKP: & DK conuexum æquale conuexo KI.

a Ex hypotheſi & ex 107. huius.

Corollarium.

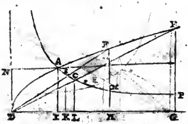
HInc ſequitur: ſi DH, HI ſegmenta fuerint æqualia, & per H & I, ex B centro rectæ eductæ BHK, BIE, occurrentes parabolæ in K & E, punctis, è quibus rectę ponantur KL, EC, aſymptoto AB æquidiſtantes & per D, recta ponatur DOQ parallela BC: quod BE, DQ, KL lineę in eodem ſeſe decuſſent puncto O: vti EC, BE, DO in puncto Q. eſt conuerſa præcedentis, ex qua demonſtratio manifeſta eſt.

PROPOSITIO CXLVIII.

IIſdem poſitis ſi ſegmenta AB, BC, hyperbolæ ABC inter aſymptotos rectum angulum continentes conſtitutæ, æqualia fuerint, & è centro per B & C ponantur DBE, DCF occurrentes parabolæ in E & F, demittanturq; FG, EH, AI, BK, CL aſymptoto æquidiſtantes:

Dico ſegmenta MHG, AIHM, quadrupla eſſe ſegmentorum AIK, BKL.

Demonſtratio.



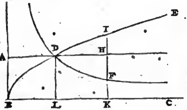
QVoniam AB, BC ſegmenta æqualia, communes interſectiones linearum EH, DF, item DMFG in eadem ſunt cum A puncto linea; b parallela DG, vnde GP, MH, AI c proportionales ſunt & d AIMH, MHPG ſegmenta æqualia: quod erat demonſtrandum.

b Coroll. præcedent.
c Ex 145. huius.
d 107. huius.

PROPOSITIO CXLIX.

SEcet parabola D I E hyperbolam vt priùs, & per punctum interſectionis D, agatur A D H linea, parallela aſymptoto B C: deinde quæuis recta ponatur I K, parallela A B occurtens D H lineæ in H, hyperbolæ in F.

Dico I K H rectangulum ad rectangulum H K F, triplicatam habere rationem eius, quam habet linea I K ad H K.



Demonſtratio.

REctangulum I K H ad H K F, compoſitam habet [a] rationem ex ratione I K ad H K, & ex ratione K H ad K F. ſed ratio H K ad F K [b] duplicata eſt rationis I K ad H K. Igitur rectangulum I K H ad H K F, rectangulum, compoſitam habet rationem ex ratione I K ad H K, & ex duplicata ratione I K ad H K: ergo ex triplicata ratione I K ad H K. Quod fuit demonſtrandum.

a Per elementa.

b 142. huius

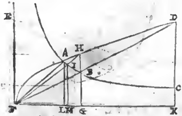
Corollarium.

HInc manifeſtum eſt rationem I K ad K F, eſſe triplicatam eius, quam habet I K ad H K: ſunt enim rectangula I K H, & H K F inter ſe vt lineæ I K, & F K.

PROPOSITIO CL.

HYperbolam A B, inter aſymptotos angulum rectum continentes poſitam, ſecet in A parabola F A D, habens axem aſymptoton F G: ſumatur autem ſegmentum hyperbolicum quodcumque A I, & per I punctum diameter ponatur F I H, occurrens parabolæ in H, ex quo demittatur H G æquidiſtans E F hyperbolæ occurrens in B: per B autem acta F B occurrat parabolæ in D. denique ex D parallela ad E F, demittatur D K, & D K hyperbolam ſecet in C.

Dico ſegmentum C K B G quadruplum eſſe ſegmenti B G I M.



Demonſtratio.

POnatur I M, æquidiſtans E F. quoniam H G, D K æquidiſtant E F, normaliter ad F G poſitæ, lineæ H G, D K ordinatim poſitæ ſunt ad axem F K: vnde G B, G H, K D in [c] continua ſunt analogia: ſunt autem & G B, I M, H G proportionales; ratio igitur D K ad H G, tertiæ ad tertiam [d] duplicata eſt rationis H G ad I M, id eſt, I M ad B G: quia [e] G B, I M, H G ſunt continuæ: ſed rationis D K ad H G, duplicata quoque eſt ratio [f] F K ad F G, id eſt [g] B G ad C K. ratio igitur B G ad C K, quadruplicata eſt rationis I M ad B G: adeoque & ſegmentum B G C K, [h] quadruplum eſt ſegmenti I M B G. Quod erat demonſtrandum.

c 42. De parabola.
d 27. De progreſſion.
e 17. huius.
f Ex 1. de parabola.
g Ex 44. huius.
h 129. huius.

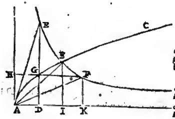
PRO-

PROPOSITIO CLI.

PArabola A B C, cuius axis A D, ſecet in B hyperbolam E B F, cuius aſymptoti A D, A H angulum rectum contineant; & aſſumpto G inter A, & B, in parabola, ponantur D G E, F G H parallelæ aſymptotis, iunganturque A E, A B, A F.

Dico mixtilineum E A B, duplum eſſe mixtilinei B A F.

Demonſtratio.



POnantur B I, F K æquidiſtantes aſymptoto A H. erunt igitur G D, B I ordinatim poſitæ ad axem A D, vnde ratio A D, ad A I a duplicata eſt rationis D G ad B I, id eſt, F K ad B I: ſed eſt vt A D ad b A I, ſic B I ad E D: ratio igitur B I, ad E D duplicata eſt rationis F K ad B I; adeoque & c ſegmentum E D B I duplum eſt ſegmenti B I F K. eſt autem E A B d figura æqualis ſegmento E D B I; & B A F, æqualis B I F K ſegmento; figura igitur E A B, dupla eſt figuræ B A F. Quod fuit demonſtrandum.

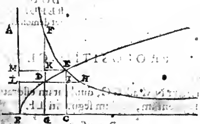
a Ex 1. de parabola.
b 74. huius.
c 119. huius.
d Ex 110. huius.

PROPOSITIO CLII.

SInt A B, B C aſymptoti hyperbolæ F E H, angulum rectum formantes, & parabola deſcribatur B D E, (cuius axis B C) occurrens hyperbolæ in E, & per aſſumptum punctum D in parabola, inter B & E, ponantur per D rectæ F G, H L, æquidiſtantes aſymptotis, & E M, E G ijſdem parallelæ:

Dico mixtilineum F D E. duplum eſſe mixtilinei E D H.

Demonſtratio.



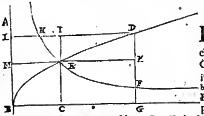
OStenſum eſt rationem F G ad K G, eſſe duplicatam e eius, quam habet B C ad D G, hoc eſt M B ad L B, hoc eſt H L ad E M: igitur duplum eſt ſegmentum F G C E, quantitatis H L M E: ſed libro de parabola demonſtratum eſt parabolæ g partem E D G C duplam eſſe E M L D, igitur reſiduum F D E, duplum eſt reſidui E D H. Quod fuit demonſtrandum.

e 155. huius.
f 74. huius.
g Ex 137. de parabola.

PROPOSITIO CLIII.

Iiſdem poſitis aſſumatur punctum D in parte parabolæ, quæ concauâ hyperbolæ EHF continetur, ductiſque vt antè DL, DG quæ occurrant hyperbolæ in H & F.

Dico ſpatium DEF duplum eſſe quantitatis HED.



Demonſtratio.

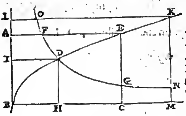
POnatur per E linea MK parallela BG. ratio GF ad GK, id eſt CE, duplicata a eſt rationis CE ad GD, id eſt, MB ad BL, id eſt LH ad ME. ergo duplum b eſt ſpatium ECGF, quantitatis EMLH. eſt autem DECG, duplum ſpatij DLME, vt c oſtendimus lib. de parabola. igitur reſiduum DEF duplum eſt reſidui DHE: quod fuit demonſtrandum.

a 142. huius.
b 129. huius.
c 137. De parabola.

PROPOSITIO CLIV.

SEcet iterum, vt priùs, parabola BDE hyperbolam in D, & ex quibuſuis punctis E & K, in parabola aſſumptis, ponantur EA, EC, KL, KM aſymptotis æquidiſtantes, ſecanteſq; hyperbolam in F, G, O, N.

Dico ſpatium EDG ad KEGN eandem habere rationem quam habet quantitas EFD ad quantitatem KOFE.



Demonſtratio.

ESt enim per præcedentem ſpatium EDG ſpatij EFD duplum, & KDN ſpatij KODK: ergo EDG eſt ad reſiduum KEGN, vt eſt EFD ad reſiduum KOFE: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLV.

IIſdem poſitis:

Dico rationem NM ad GC, duplicatam eſſe rationis LO ad FA, adeoq; GM ſegmentum, duplum ſegmenti LF.

Demonſtratio.

VT NM ad GC, ſic d BC ad BM: ſed BC ad BM, duplicatam e habet rationem EC ad KM: id eſt AB ad LB, f id eſt LO ad FA: ratio igitur NM ad GC duplicata eſt rationis LO ad FA. quare & g GM ſegmentum duplum eſt ſegmenti LF. Quod erat demonſtrandum.

d 74. huius.
e 1. de parabola.
f 74. huius.
g 119. huius.

PROPOSITIO CLVI.

Iiſdem poſitis, ducantur DH, DI parallelæ aſymptotis.

Dico ſegmentum DHCG, ad DIAF ſegmentum, eandem habere rationem, quam GCMN ſegmentum habet ad ſegmentum FALO.

Demonſtratio.

Ratio GC ad DH, [a] id eſt BH ad BC, duplicata eſt rationis [b] HD ad CE, id eſt BI [c] ad BA, id eſt AF ad ID; ſegmentum igitur DHGC, [d] duplum eſt ſegmenti AFID. ſed in precedenti propoſitione oſtenſum eſt, ſegmentum GCNM duplum quoque eſſe ſegmenti LOFA. vt igitur GCNM ſegmentum ad ſegmentum LOFA, ſic DHGC ſegmentum eſt ad ſegmentum FADI. Quod erat demonſtrandum.

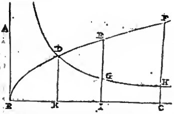
[a] 74. huius. [b] 1. De parabola. [c] 74. huius. [d] 129. huius.

PROPOSITIO CLVII.

Poſitis denuò AB, BC aſymptotis hyperbolæ DGH, & parabolâ, vt prius, occurrente hyperbolæ in D, ducantur FC, EI parallelæ aſymptoto AB ſecantes hyperbolam in H & G.

Dico rationem EI ad FC, toties multiplicare rationem DK ad EI, quoties ſuperficies GC multiplex eſt ſuperficiei DI.

Demonſtratio.



Ratio HC ad GI, id [e] eſt BI ad BC, duplicata eſt rationis [f] EI ad FC: & ratio GI ad DK, duplicata eſt rationis DK ad EI. Igitur quoties multiplicat ratio HC ad GI, rationem GI ad DK, toties multiplicat ratio EI ad FC, rationem DK ad EI: ſed oſtenſum eſt toties multiplicare rationem HC ad GI, rationem GI ad DK, [g] quoties multiplex eſt figura HI, figuræ ID. Igitur toties multiplicat ratio EI ad FC, rationem DK ad EI, quoties multiplex eſt quantitas HI, quantitatis ID. Quod fuit demonſtrandum.

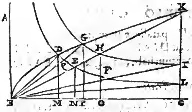
[e] 74. huius. [f] 1. de parabola. [g] 129. huius.

PROPOSITIO CLVIII.

Sint AB, BC aſymptoti duarum hyperbolarum DEF, GHI, ſectarum parabolâ BDG, in D & G, cuius axis BC: & ductâ BK, quæ occurrat hyperbolis in E & H, ponatur KC parallela aſymptoto ſecans hyperbolas in I, L. iunganturque BD, BG, BI, BL.

Dico figuram DBE ad EBL eamdem habere rationem, quam figura GBH ad HBI, figuram.

Demon-



Demonſtratio.

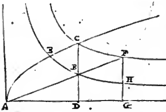
DEmittantur DM, EN, GP, HO æquidiſtantes AB. erit igitur ſegmentum DMNE tertia a pars ſegmēti NELC, & GPHO b tertia pars ſegmenti HOIC; vnde proportionalia ſunt ſegmenta DMNE, NELC, ſegmentis GPHO, HOIC; ſed figuræ DBE, EBL æquales ſunt c ſegmentis DMNE, NELC; & ſegmentis GPHO, HOIC æquales ſunt d figuræ GBH, HBI; manifeſtum igitur eſt eandem eſſe rationem figuræ DBE ad EBL, quæ eſt figuræ GBH ad HBI. Quod fuit demonſtrandum.

a 146. huius. b Ibid. c 110 huius d Ibid.

PROPOSITIO CLIX.

POnantur denuò duæ hyperbolæ inter eaſdem aſymptotos angulum rectum conſtituentes, & parabola ABC, habens axem AD occurrat FC hyperbolæ in puncto C, per quod agatur CD aſymptoto parallela, quæ ſectioni BE occurrat in E, iunctaque AE occurrat hyperbolæ CF in F, & demittatur FHG.

Dico HG, ED, FG, CD quatuor eſſe in continua analogia.



Demonſtratio.

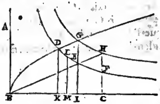
PEr propoſitionem huius 77. conſtat HG, ED, FG eamdem continuare rationem: ſed vt DE ad HG, ita e eſt GA ad AD, hoc f eſt DC ad FG; igitur vt HG ad ED, id eſt ED ad FG, ita eſt FG ad CD. igitur continuant eamdem rationem rectæ HG, ED, FG, CD: quod fuit demonſtrandum.

e 74. huius. f Ibid.

PROPOSITIO CLX.

IIſdem poſitis quę priùs, ex puncto D, in quo parabola BG minori ſectioni occurrit, demittatur DK parallela aſymptoto.

Dico FC ad EI, triplicatam habere rationem eius quam habet HC ad DK.



Demonſtratio.

PEr præcedentem in continua ſunt analogia FC, EI, HC, GI. ratio inſuper EI ad DK, id eſt g BI ad KB, duplicata eſt h rationis DK ad GI; igitur ſi LM media ponatur inter EI, DK; rectæ quoque EI, LM, DK, GI proportionales ſunt i duæ igitur ſeries ſunt continuarū GI, HC, EI, FC; item GI, DK, LM, EI: habentque communem primam GI. quare ratio FC ad IE, quartæ ad quartam triplicata eſt i rationis HC ad KD, ſecundæ ad ſecundam.

g Ibid. h 1 de parabola. i 27. De progreſſion.

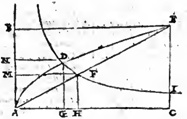
PRO-

PROPOSITIO CLXI.

REctæ A B, BC ad angulos rectos ſe decuſſantes inſeruiant tum aſymptotis hyperbolæ D F, tum axi parabolæ A D E, & eius contingenti in A, ductâ deinde A E per D & F, agantur D G, F H parallelæ aſymptoto.

Dico rationem E C ad F H, triplicatam eſſe rationis quam habet D G ad F H, ſiue F M ad D N.

Demonſtratio.

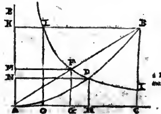


OStenſum eſt 146. huius ſegmentum I C F H triplum eſſe ſegmenti F H D G. igitur ratio I C ad F H, id eſt A H ad A C, id eſt F H ad E G, triplicata eſt rationis F H ad D G, id eſt M A ad N A, id eſt N D ad M F.

PROPOSITIO CLXII.

POnantur eadem quæ in præcedente: ſed parabola A D E axem habeat lineam A B: ductaq; A E, demittantur F G, D H parallelæ A B. Dico rationem I C ad D H, eſſe duplicatam eius quã habet D H ad F G.

Demonſtratio.

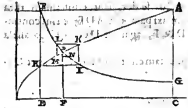


EX E ducatur E L K parallela A C. oſtenſum eſt prop. præc. E K ad F M triplicatam eſſe rationis D N ad F M, hoc eſt F G ad D H. ſed ratio E K ad F M, eadem eſt [a] cum ratione E C ad F G: quia K C, M G parallelogramma eandem habẽt diametralem; igitur ratio E C ad F G, eſt triplicata rationis F G ad D H, atque adeò ratio E C ad D H, quadruplicata eſt rationis F G ad D H, eſt autem ratio L O hoc eſt E C ad D H, duplicata [b] rationis A C ad A H, id eſt D H ad I C; igitur & ratio D H ad I C, duplicata eſt rationis F G ad D H; ſiue ratio I C ad D H, duplicata eſt rationis D H ad F G. Quod demonſtrare oportuit.

[a] Ex elementis.

[b] Ex 191. de parabola.

Scholion.

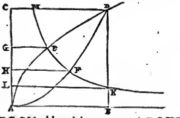


PRæcedentibus propoſitionibus quæ parabolam habent admixtam ſecantem hyperbolicam lineam, vſus ſum ordinariè aſymptotis hyperbolarum quæ angulum rectum contineant; non quod propoſitiones vniuerſales non ſint, & excludi debeant aliæ hyperbolæ, quarum aſymptoti contractiorem, aut diductiorem recto, angulum conſtituunt, ſed hoc eo conſilio factum eſt, vt commodior ratio iniretur explanandi figuras & ſchemata, imò vt conſtructiones ac demonſtrationes propoſitionum minùs eſſent impeditæ; facilius enim eſt axem parabolæ aſymptoto accommodare quàm aliam quamlibet diametrum, quæ diuerſa ſemper reperiri deberet, quoties aſymptoti angulum variarent. Interim quorſum hæc materia vergat, facilè colligi poteſt: inuento namq; puncto D *interſectionis parabolæ cùm hyperbola haberetur vna è mediis duabus, quæ poſtulari poſſent inter* BE, GC *nimirum* DF; *cum oſtenſum ſit rationem* GC *ad* DF, *duplicatam eſſe rationis quam habet* DF *ad* BE: *ac proinde rationem* GC *ad* BE, *triplicatam eſſe* BE *ad* DF. *quod ſi quis procedendo per rectas* AB, BH, HI, IK, KL, LM, MN, *&c. terminum huius progreſſionis aſſignare valeret, problema quod de duabus mediis proponitur expediret, vt patet rem accuratius conſideranti. Interim proprietates alias proſequemur quæ non leue ad illud problema ſoluendum, ſubſidium ſunt allatura.*

PROPOSITIO CLXIII.

ITerum AB, AC ſint axes parabolarum AED, AFD ſecantium hyperbolam in E & F, conſtitutam inter aſymptotos AB, AC continentes angulum rectum; demittantur autem ex D puncto interſectionis parabolarum aſymptotis æquidiſtantes DB, DC, EG, FH, LK.

Dico CM, GE, HF, LK eſſe quatuor in continua analogia.



Demonſtratio.

a 14. *huius.* b 1 *de parabola.* ESt enim ratio CM ad HF, [a] id eſt AH ad AC, duplicata [b] HF ad LK, ſiue CD: quare ſegmentum MCHF, duplum eſt ſegmenti FH, KL per 129. huius. ſimiliter quia ratio DC ad EG, c Ex 192. *de parabola.* id eſt KL ad EG, [c] duplicata eſt AG ad AC, id eſt [d] EG ad CM: ſegmen- d 14. *huius.* tum KEGL duplum eſt ſegmenti e Ex 129. *huius.* EGCM; ablato igitur communi EGHF, æqualia ſunt ſegmenta KLHF & f Ex 172. *huius.* EGCM: vnde [e] vt KL ad FH, ita EG ad CM: ſed ratio LK ad EG, [f] duplicata eſt EG ad MC: igitur ratio KL ad EG, duplicata eſt KL ad HF. ergo ratio KL ad FH, eadem eſt cum ratione FH ad GE: & GE ad CM. Quod fuit demonſtrandum.

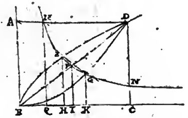
PRO-

PROPOSITIO CLXIV.

PОnantur denuò A B, B C aſymptoti vt priùs hyperbolæ E F G: quas parabolæ B E D, B G D conuenientes in D, ſecent in punctis E, G, & agatur B D occurrens ſectioni in F & demittantur parallelæ aſymptoto E H, F I, G K.

Dico E H, F I, G K, fore in continua proportione.

Demonſtratio.



RAtio D C ad G K, [a] duplicata eſt rationis C B ad B K, id eſt [b] G K ad N C; ſed M Q æqualis eſt D C, ratio igitur M Q ad G K, duplicata eſt rationis G K ad N C: adeoque ſegmentum M Q G K duplum [c] eſt ſegmenti G K N C: quia verò M Q, E H, G K, N C proportionales ſunt [d] ratio N C ad E H, primæ ad tertiam, duplicata eſt rationis E H ad M C, tertiæ ad quartam: ſegmentum igitur E H N C [e] duplum eſt ſegmenti M Q E H: dempto igitur communi ſegmento E H G K manet ſegmento M Q E H æquale ſegmentum G K N C. Rurſum quia N C, F I, D C, id eſt N C, F I, M Q proportionales ſunt, ſegmentum M Q F I [f] æquale eſt ſegmento F I N C: demptis igitur æqualibus ſegmentis M Q E H, G K C N. æqualia ſunt ſegmenta F I G K, E H F I: vnde E H, F I, G K proportionales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

[a] Ex 191. de parabola. [b] 74. huius. [c] 129. huius. [d] 173. huius. [e] 129. huius. [f] Ex 107. huius.

PROPOSITIO CLXV.

IIſdem poſitis iungantur E G puncta lineâ E G, ſecante B D lineam in L.

Dico E G in L bifariam eſſe diuiſam, item & ſegmentum E F G bifariam per B D.

Demonſtratio.

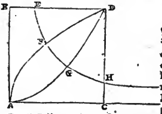
DVcantur enim ex E, F, G punctis parallelæ aſymptoto A B lineæ E H, F I, G K, erunt [g] illæ continuæ proportionales; ac proinde [h] ſegmenta concaua E H I F, F I K G æqualia: quare ſi connectantur E F, F G puncta, conuexa quoque [i] ſegmenta E F, F G æqualia erunt: quare linea E G ordinatim [k] applicata eſt ad diametrum B F, ac proinde in L diuiſa bifariam. Iam verò cùm E L, L G æquales ſint baſes, & L F communis altitudo triangulorum E F L, L F G, illa triangula æqualia erunt, ac proinde ſegmenta tota E F L, L F G æquabuntur inter ſe: quare E F G ſegmentum bifariam diuiſum eſt linea B D. Quæ omnia fuerant demonſtranda.

[g] 174. huius. [h] 107. huius. [i] 106. huius. [k] Ex conuerſa eiuſdem.

PROPOSITIO CLXVI.

Sint AB, BC axes duarum parabolarum æqualium, angulum rectum continentes, quæ & aſymptoti ſint hyperbolæ EFG: punctum autem D ſit illud in quo parabolæ conueniunt; ex quo demittantur DB, DC æquidiſtantes aſymptotis.

Dico ſpatia DEF, FGD, GDH interſe eſſe æqualia.



Demonſtratio.

Demonſtratum eſt quantitatem DFH a duplam eſſe quantitatis DEF. inſuper oſtenſum eſt quantitatem EGD duplam eſſe DGH. igitur quantitas DEF æqualis eſt quantitati DGH: ac proinde quoniam EDF vnà cum DFG, duplum eſt DGH, erit quoque DEF cum DFG duplum DEF. igitur ſunt æquales quantitates DEF, DFG, DGH. Quod fuit demonſtrandum.

a 133. huius.

PROPOSITIO CLXVII.

Iſdem poſitis:

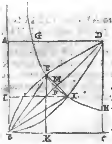
Dico ſpatia ſimiliter æquari interſe quæ reſidua ſunt, nimirum EBAF, FAGF, GACH.

Demonſtratio.

Libro de parabola propoſ. 237. oſtenſum eſt AFDC parabolam conuexam duplam eſſe concauæ ABDFA: ſimiliter AGDB conuexam duplam eſſe concauæ ACDGA: ſunt autem ex hypotheſi æquales parabolæ AFDC, AGDB, reſiduæ igitur ABDF, AGDC æquales quoque ſunt: quia verò tam AFDB cum AFDGA duplum eſt AGDC; & rurſum AGDC cum AFDGA duplum AFDB, tres quantitates ABDF, AFDGA, ACDG æquales ſunt: ſed per præcedentem æquales quoque ſunt EFD, DFG, DHG, reſiduæ igitur æquales ſunt ABEF, AFGA, AGHC, Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXVIII.

Secet parabola BED, hyperbolam GEH vt priùs inter aſymptotos AB, BC conſtitutam in E, & ducta BD hyperbolam ſecet in F, parabolam verò in D, ex D verò ducantur DG, DH parallelæ aſymptotis.



Dico quantitatem mixtilineam DEF, ex parabolica, hyperbolica & recta conſtantem, dimidiæ parti figuræ DGE eſſe æqualem vel quartæ parti figuræ DEH.

Demonſtratio.

Per B enim & D ducatur parabola BID ad axem BA, iunganturque EI, BE, BI; & EK, IL parallelæ ducantur

cantur aſymptotis; erunt triangula [a] E K B, I L B inter ſe æqualia, ac proinde totæ [b] parabolæ E B K, B L I æquales erunt. quia verò E M, M I [c] lineæ æquales ſunt E M B triangulo, B M I æquatur: ſed etiam ſegmenta [d] conuexa E F M, M F I æquantur; igitur etiam pars parabolica B E M, parti parabolicæ M B I eſt æqualis, eſtque ſegmentum hyperbolicum E F I, bifariam diuiſum diametro B M, igitur ſublatis ſegmentis hyperbolicis æqualibus remanent quantitates mixtilineæ E F B, F B I ex parabolicis hyperbolicis & communi ſectâ efformatæ inter ſe æquales: & quia parabola B E D B æqualis eſt parabolę B I D B. igitur etiam mixtilineum E F D mixtilineo D F I eſt æquale: eſt verò mixtilineum D E F I D æquale D G E, igitur pars D E F D dimidia eſt figuræ D G E, & quartæ parti figurę D E I H æqualis. Quod fuit demonſtrandum.

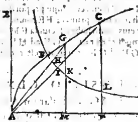
[a] ex 46. huius.
[b] 140. De parabola.
[c] 164. huius.
[d] Ibid.

PROPOSITIO CLXIX.

Secet parabola A B C conſtituta vt priùs, hyperbolam in B, & ductæ ſint A C, A G occurrentes hyperbolæ in I & H, tandem demittantur C F G M aſymptoto parallelæ.

Dico partem mixtilineam G H I C eſſe mixtilinei C G K L quartæ parti æqualem.

Demonſtratio.



Eſt enim B G H æqualis quartæ parti G B K, per propoſitionem pręcedentem, quemadmodum per eandem, ſpatium C B I quarta eſt pars quantitatis C B L: eſt autem A I C G, H A quarta [e] pars C F M G: & H A B, quātitas eſt quarta pars quantitatis K M F L, igitur G H I C ſpatium, ſpatij G K L C quartę parti exiſtet æquale. Quod fuit demonſtrandum.

[e] 144. De parabola.

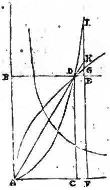
PROPOSITIO CLXX.

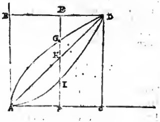
Sint A B, A C axes parabolarum A G D, A I D ad angulos rectos conſtituti, & poſitis D B, D C parallelis axibus, actaq; A D ponatur quæuis E F occurrens ſectionibus in G & I, & rectæ A D in H.

Dico rationem G F ad I F, eſſe triplicatam eius quam habet G F ad H F.

Demon-

Demonſtratiò.





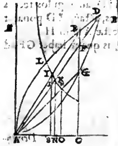
a 42. *huius.* OStendimus libro de parabola a I F, F H, F E tres eſſe in continua ratione. Oſtenſum inſuper eſt F H, F G, F E eſſe continuè proportionales. Igitur cùm ſint hæ ſeries trium continuarum habentium primam F E communem, ratio tertiæ F I ad tertiam F H b duplicata eſt eius quam habet ſecunda F H ad ſecũdam G F. igitur ratio G F ad I F, quę eſt compoſita ex ratione G F ad H F: & ex ratione H F ad I F, quę duplicata eſt rationis G F ad H F, triplicata eſt rationis G F ad H F. Quod demonſtrare oportuit.

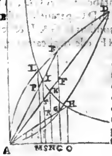
b 27. *De progreſſionibus.*

PROPOSITIO CLXXI.

COnſtituantur axes AB, AC parabolarum A E D, A D G continentes angulum rectum, & ducatur A D ſitq́; inter illos axes tamquam aſymptotos collocata hyperbola I H occurrens A D, in K, & recta E C aſymptoto æquidiſtans occurrat ſectionibus parabolicis in E & G: per quæ puncta agantur A E, A G occurrentes ſectioni hyperbolicæ in punctis I & H.

Dico ſegmentum I A K tertiam eſſe partem ſegmenti I A H, ſiue dimidiam F A H.





Demonſtratio.

OStenſum eſt præcedenti propoſitione rationẽ E C ad G C, eſſe triplicatam eius quam habet ratio E C ad F C. vnde ratio F C ad G C, eſt duplicata rationis E C ad F C. ſed ratio F C ad G C, eadem eſt cum ratione K N ad R N, & ratio E C ad F C, eadem cum ratione I S ad T S, igitur ratio K N ad R N, duplicata eſt rationis I S ad T S. ſed ratio K N ad R N, duplicata

cata eſt, rationis K N ad H O, igitur ratio K N ad H O eadem eſt cum ratione I S ad T S. ratio verò I S ad T S, duplicata [b] quoque eſt rationis I S ad K N: igitur ratio K N ad H O, duplicata eſt rationis I S ad K N: igitur [c] ſegmentum I S N K hoc eſt I A K dimidium eſt ſegmenti K N O H, hoc eſt K A H; & I A K tertiæ parti ſegmenti I A H æquale eſt. Quod fuit demonſtrandum.

a 75. huius.
b Ibid.
c 129. huius.

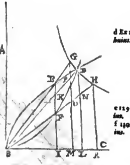
PROPOSITIO CLXXII.

Rectæ A B, B C ad angulos rectos collocatæ ponantur, quæ ſint aſymptoti hyperbolæ G D H & axes parabolarum B E D, B F D: ſirque E F aſymptoto A B parallela, per cuius extrema agantur B E G, B F H ducaturq́; B D.

Dico figuram G B D, figuræ D B H dimidiam eſſe.

Demonſtratio.

Ratio I K ad I F [d] duplicata eſt eius rationis, quam habet E I ad K I. ſed vt I K ad F K, ſic D L eſt ad N L. Igitur ratio D L ad N L, duplicata eſt rationis E I ad K I, hoc eſt G M ad P M, eſt autem ratio D L ad N L, duplicata rationis D L ad H R (quod D L, H R, N L proportionales ſint) & ratio G M ad P M duplicata rationis G M ad D L, ob eandem cauſam. Igitur etiam ratio D L ad H R, duplicata eſt rationis G M ad D L. Igitur ſuperficies [e] D L R H dupla eſt plani G M L D, hoc eſt D B H, [f] quantitas dupla quantitatis D B G. Quod fuit demonſtrandum.



d Ex 170. huius.
e 129. huius.
f 130. huius.

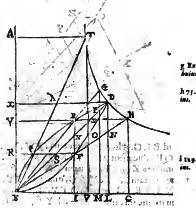
PROPOSITIO CLXXIII.

Quod ſi manentibus iiſdem recta F Q conſtituatur parallela B C & agantur lineæ B Q T, B F H.

Dico ſegmentum D B H dimidium fore ſegmenti D B T.

Demonſtratio.

Ductis enim H Y, D X, & T A quæ æquidiſtent aſymptoto B C, apparebit ratio R Q ad R S, hoc eſt X λ ad X D, duplicata [g] rationis R S ad R F, hoc eſt Y Z ad Y H: ſed ratio X λ ad X D, duplicata eſt eius quam habet [h] X λ ad A T; ſimiliter ratio Y Z ad Y H, duplicata eſt rationis Y Z ad X D; igitur ratio A T ad X D, duplicata eſt rationis X D ad Y H. quare cùm quantitas [i] A T D X dupla ſit quantitatis D X Y H etiam T B D, dupla erit quantitatis D B H. Quod fuit demonſtrandum.



g Ex 170. huius.
h 75. huius.
i 129. huius.

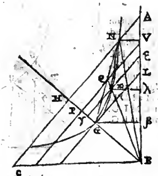
HY-

HYPERBOLÆ
PARS SEXTA

Varia proponit ac ſoluit problemata, &c.

PROPOSITIO CLXXIV.

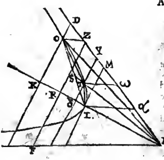
DAtarum hyperbolarum conuexarum exhibere rationem.



Conſtructio & demonſtratio.

SInt ABC, DEF aſymptoti hyperbolarum conuexarũ NXG, OTI: poſitiſque axibus BG, EI, agantur per G & I contingentes GL, MI: dico NXG hyperbolam eſſe ad hyperbolam OTI, vt LGB triangulum ad triangulum MIE. fiat enim vt BG ad GH, ſic EI ad IK, & per H & K, ordinatim ponantur lineæ ANH, DOK, iunganturque NG, OI, BN, EO. Quoniam eſt vt BG ad GH, ſic EI ad IK, quadratum LG (id eſt [a] rectangulum ANC,) eſt ad quadratum AH vt MI quadratum (id eſt rectangulum DOF) ad quadratum DK: & permutando vt ANC rectangulum ad rectangulum DOF, ſic quadratum AH ad quadratum DK: reliquum igitur quadratum NH eſt ad quadratum OK, vt ANC rectangulũ ad rectangulum DOF.

a 176. huius.



id eſt quadratum LG, ad quadratum MI. quare NH linea, eſt ad LG lineam, vt OK ad MI. eſt autem vt BG ad GH, ſic EI ad IK, triangulum igitur IOK eſt ad EIM, triangulum, vt GNH ad BGL: & vt EIM, ad BGL, ſic IOK ad GNH: ſed etiam vt EI ad IK, ſic EOI triangulum ad triangulum IOK, & vt BG ad GH, ſic BNG ad GNH, igitur & EOI ad IOK, triangulum eſt, vt BNG ad GNH, & vt IOK ad GNH, ſic EOI ad BNG: quare & EOI ad BNG eſt, vt EMI ad BLG. vlterius, biſecentur OI, NG, in Q & S, poſitiſque ordinatim SR, QP, ducantur ETS, BXQ; & Tδ Xγ ordinatim ad axes BG, EI; ponantur inſuper ZO, ωT, αI item VN, λX, βG æquidiſtantes aſymptotis BC, EF: erunt igitur tam NV, λX, βG, quàm αI, ωT, [b] ZO continuæ proportionales; vnde & NA, XE, GL, item DOTY, MI quoque in continua ſunt analogia; & MI ad DO, in duplicata ratione MI, ad YT; vti LG ad AN, in duplicata ratione LG ad εX: quia verò DK eſt ad MI, vt AH ad LG, & OK ad MI, vt NH ad LG, reliqua DO eſt ad MI, vt NA ad LG: igitur & YT ad MI, vt εX ad LG, &

b Ex 78. huius.

ME

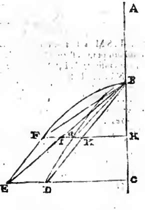
ME ad YE, id eſt IE ad δE, vt LB ad εB, id eſt BG ad Bγ. eſt autem etiam vt EI ad IR, ſic BG ad GP, quia IK, GH in P & R, biſſectæ ſunt, ex conſtructione; igitur & Bγ ad γP, vt Eδ ad δR, id eſt BX ad XQ, vt ET ad TS: & BQ ad QX, vt ES ad ST; ſed vt ES ad ST, ſic OEI triangulum eſt ad triangulum ITO, & vt BQ ad XQ, ſic NBG triangulum eſt ad triangulum NXG, triangulum igitur BNG ad NXG, eſt vt EOI ad OTI triangulum, & permutando OTI ad NXG, vt OEI ad NBG. id eſt vt EIM ad BLG, per ante demonſtrata; ſimiliter oſtendemus, ſi reſiduis ſegmentis OT, TI, item NX, XG triangula inſeribantur maxima; triangula ſegmentis OT, TI inſcripta, eſſe ad triangula ſegmentis NX, XG inſcripta, vt EMI triangulum eſt ad triangulum BLG. Quod cùm fieri poſſit ſine termino, conſtat a ſegmentum ITO eſſe ad ſegmentum GXN, vt EMI triangulum ad triangulum BLG: additis igitur triangulis NGH, ORI, quæ proportionalia oſtenſa ſunt triangulis BLG, EMI, patet ſemi hyperbolam NXGH eſſe ad ſemihyperbolam OTIH, vt BLG triangulum ad triangulum EMI: quod propoſitum fuit.

a 116. *De progreſſionibus.*

PROPOSITIO CLXXV.

HYperbolæ ad eandem applicatæ diametrum & communi gaudentes tranſuerſa, eandem inter ſe habent rationem, quam ordinatim poſitæ eandem habentes altitudinem.

Demonſtratio.



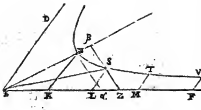
SIt AB diameter tranſuerſa communis hyperbolis BGD, BFE: poſitaque ordinatim ad BC diametrum, linea EDC, biſecetur BC in H, & HGF ducatur æquidiſtans EDC, iunganturque puncta BD, BE, FE, FB, GD, GB: vt AHB rectangulum ad rectangulum ACB, ſic b HG quadratum ad quadratum DC, & FH quadratum ad quadratum EC; igitur & HG linea eſt ad DC lineam, vt FH ad EC, & vt DC ad EC, ſic HG ad HF: ſed vt DC ad EC, ſic HK eſt ad IH, rectę igitur HG, FH proportionales ſunt HK, HI: quare vt HG ad HF, ſic GK reſiduum ad reſiduum FI: eſt autem vt GK ad FI, ſic BGK triangulum ad triangulum BFI; adeoque & BGD ad BFE, triangulum igitur BGD ad BFE, triangulum eſt vt GH ad FH, id eſt vt DC ad EC: ſimiliter ſi reſiduæ BH, HC biſſecentur, & à ſectionum punctis ordinatim ponantur lineæ, fiantque triangula vt priùs, oſtendetur triangula reſiduis ſegmentis BGD inſcripta, eſſe ad triangula ſegmentis BF, FE inſcripta, vt DC linea eſt ad lineam EC: quod cùm ſemper fieri poſſit, hyperbola BDC eſt ad hyperbolam BEC vt BDC, triangulum ad triangulum BEC, id eſt DC linea ad lineam EC, hyperbolæ igitur ad eandem applicatę diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

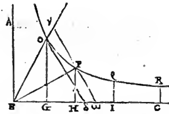
b 1 *huius.*

PROPOSITIO CLXXVI.

DVarum hyperbolarum concauarum exhibere rationem.

Conſtructio & demonſtratio.





SInt A B C, D E F aſymptoti hyperbolarum O P Q, N S T; poſitiſque axibus B O, E N ducantur O G, N K æquidiſtantes aſymptotis A B, D E: dico ſpatium infinitum inter aſymptotos A B C & hyperbolam O P Q conſtitutum, ad ſpatium infinitum hyperbolę concauæ N S T; eam habere rationem, quam O B G triangulum habet ad triangulum N E K. fiant continuæ proportionales B G, B H, B I, B C, &c. factoque vt B G ad B H, ſic E K ad E L, continuetur ratio E K, E L in M, & F; erigantúrque H P, I Q, C R, &c. item L S, M T, F V, &c. æquidiſtantes aſymptotis A B, D E. quoniam igitur B G, B H, B I, B C proportionales ſunt, & O G, P H, Q I, R C æquidiſtant aſymptoto A B, æqualia ſunt ſegmenta P G, Q H, R I, &c. ſine termino ſic continuata: ſimiliter æqualia ſunt ſegmenta N L, S M, T F ſine termino; ſegmenta igitur O H, P I, Q C, &c. in infinitum ſimul ſumpta, id eſt tota hyperbola concaua O P Q ſine termino producta, eſt ad ſe-
a 116. De progreſſionibus. gmenta infinita N L, S M, T F, &c. in infinitum, [a] vt ſegmentum O H ad ſegmentum N L, id eſt [b] figura O B P ad figuram S E N. vlterius poſitis per N & O, con-
b 110. huius. tingentibus O δ, N α, ducantur illis parallelæ per S & P, lineæ Z β, γ ω. vt B G ad B H, id eſt [c] H P ad O G, ſic per hypotheſim eſt E K ad E L, id eſt S L ad N K.
c 74 huius. ſed vt O G ad P H, ſic O δ [d] ad P ω, & vt N K ad S L, ſic N α eſt ad S Z, vt igi-
d Per elementa. tur O δ ad P ω, ſic N α ad S Z, eſt autem vt O δ ad ω P, ſic [e] ω B ad δ B, id eſt γ B ad
e 74. huius. O B. & vt N α ad S Z, ſic Z E ad α E, id eſt β E ad N E, igitur vt O B ad γ B, ſic N E ad β E, & E N α triangulum ad triangulum E β Z, vt B O δ ad B γ ω triangulum: ſed eſt quoque triangulum B O δ ad triangulum ω P B, vt α N E triangulum ad triangulum Z S E, quia igitur & α N E triangulum eſt ad reſiduum triangulum S β E, vt δ O B ad reſiduum triangulum P γ B, & vt δ O B ad α N E, ſic P γ B ad S C E. ſed
f Ex antepenultima. vt B O δ triangulum ad triangulum E N α, ſic [f] P O γ ſegmentum ad ſegmentum S N β, reſidua igitur figura P O B ad reſiduam S E N, eſt vt triangulum δ O B ad α N E, triangulum, id eſt ex ante demonſtratis triangulum ω P B ad triangulum
g 14. huius. Z S E, id eſt vt ante oſtendi B P H triangulum ad triangulum L S E. id eſt [g] B O G triangulum ad triangulum K N E. vnde cùm oſtenſum ſit hyperbolas concauas, B O P Q R, E N S T V in infinitum productas illam inter ſe obtinere rationem, quam figuræ P B O, S E N, patet eſſe vt B O G triangulum ad triangulum K N E, ſic B O P Q hyperbolam concauam ad hyperbolam E N S T. Quod erat poſtulatum.

PROPOSITIO CLXXVII.

HYperbolæ communem habentes diametrum tranſuerſam, ordinatim poſitas ex iiſdem erectas punctis, habent proportionales, & contra.

Demonſtratio.

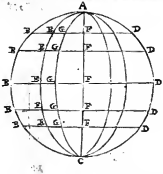


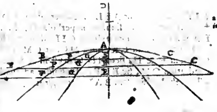
HAbeant ABC, ADE hyperbolæ communem diametrum tranſuerſam AF, ad quam ex iiſdem punctis I, G ordinatim ponantur IDB, GEC, dico ID, GE proportionales eſſe IB, GC: cùm enim quadratum ID ſit ad quadratum EG, vt FIA rectangulum ad rectangulum FGA; eandemque ſeruent proportionem quadrata BI, CG: patet ID, EG quadrata proportionalia eſſe quadratis IB, CG, adeoque & lineas, lineis proportionales, quod erat primum.

Sint iam ID, GE lineæ proportionales rectis IB, CG; dico hyperbolas ABC, ADE communem habere tranſuerſam diametrum FA. ſit enim FA diameter hyperbolę ABC. erit igitur vt quadratum IB ad quadratum CG, ſic FIA rectangulum ad rectangulum FGA, ſed vt IB quadratum ad quadratum CG, ſic ID quadratum ad quadratum EG ex ſuppoſito, quadratum igitur ID ad EG, quadratum eſt vt FIA, rectangulum ad rectangulum FGA: quare FA quoque diameter eſt hyperbolæ ADE. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

LOcus hic exigere videtur, vt paulo fuſiùs explicemus in quibus ſimilitudo hyperbolarum ſimilium conſiſtat, vt meliùs diſcrimen quo differre videntur inter ſe hyperbolicæ ſectiones dignoſci queat. Enimuerò plurimi perſuaſum ſibi habent, differentiam inter ſectiones illas, vſque adeò vagam eſſe & indeterminatam, vt præter communes aliquas proprietates in quibus omnes hyperbolæ conueniunt, quales ſunt diametri coniugatæ aſymptoti, latera recta, ordinatim poſita, & his ſimilia, nulla poſſit formari ſcientia, quâ alia ab aliis dignoſcatur. ſed prorſus falluntur: nam inter Ellipſes non eſt maius diſcrimen, ac circulum, quam inter hyperbolas reperiatur: & vti circulus ABC *cum quauis ellipſi comparari poteſt, ſecundùm ordinatim poſitas, ſcilicet ſecundum rationem* BF *ad* EF, *vel* GF, *(dummodo propoſita quæuis ellipſis ad vnam ſibi ſimilem quæ axem* AC *habeat æqualem redacatur) ita quoque omnibus hyperbolis id commune eſt: quod quo meliùs aſſequi valeamus, comparabimus hyperbolam* ABC. *cuius aſymptoti, rectum continent angulum circulo* ABC: *in circulo quadrata* BF *ordinatim applicatarum ad diametrū* AC, *æqualia ſunt rectāgulis* AFC: *ita quoque in hyperbola cuius aſymptoti ſe ad rectos ſecās angulos quadrata* EB *ordinatim poſitarum ad diametrum* DE, *æqualia exiſtunt rectangulis* DEA: *Ellipſeon verò* EF *vel* GF *quadrata rectarum quæ ordinatim ponuntur ad axem* AC, *talem obtinent inter ſe rationem quæ inter quadrata* BF *reperitur. eodem prorſus tenore in hyperbolis contingit, nam quadrata* FE, *vel* GE, *eandem inter ſe for-*





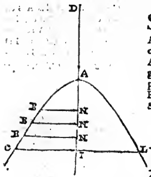
a Co.lu- im.

tiuntur

ſortiuntur proportionem, quæ inter quadrata BE *exſurgit. dummodo ad eamdem diametrum applicentur: quod poſſe fieri de quauis hyperbola, ſuperiore propoſitiane eſt demonſtratum. quocirca ſatis exiſtimo eſſe manifeſtum quâ ratione datam hyperbolam cum quauis alia quis conferre valeat, eadem ſcilicet praxi vtendo, qua cum ellipſibus hanc comparatianem inſtitueres, cum ipſo circulo, pluribus non exiſtimo me eam rem inculcare debere, præſertim cùm illi quibus de materia hac dubium remanſerit, ſola praxi quam propoſuimus ſibi facturi ſint ſatis.*

PROPOSITIO CLXXVIII.

DAtæ hyperbolæ ſimilem alteram conſtruere quæ datum habeat axem tranſuerſum.



Conſtructio & demonſtratio.

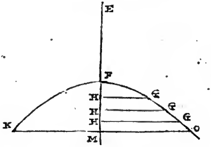
SIt ABC hyperbola, & recta data EF, oportet ad EF hyperbolam ponere, ſimilem datę ABC: ſit ABC hyperbolæ axis AD ad quam ordinatim applicentur BN, fiantque vt DA ad AN, ſic EF ad FH, & ex H normales erigantur HG, proportionales BN [a] patet FGG puncta eſſe ad hyperbolam ſimilem ABC, & FE eiuſdem eſſe axem; datæ igitur hyperbolæ, &c. Quod erat faciendum.

a *Scholion precedent.*

PROPOSITIO CLXXIX.

IIſdem manentibus figuris, propoſitum ſit datæ hyperbolæ ſimilem exhibere, ſuper data recta.

Conſtructio & demonſtratio.

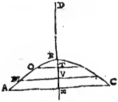


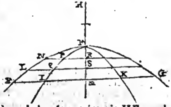
HYperbola data ſit ABL: recta verò data ſit OK, oportet ſuper OK hyperbolam conſtituere ſimilem hyperbolæ BAL. Hyperbolæ BAL axis ponatur DA & ad illum ordinatim linea CIL; diuiſâque bifariam in M lineâ OK, erigatur ex M normalis ad GK, linea ME, vt OM ſit ad ME, ſicut CI ad ID: tum EM ſecetur in F & H, ſicut ID ſecta eſt in A & C. fiatq; vt EMF rectangulum ad quadratum OM, ſic EHF rectangulum ad quadratum GH, patet OGFK eſſe ad hyperbolam ſimilem BAL; datæ igitur hyperbolæ, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO CLXXX.

Datas duas hyperbolas diuerſæ magnitudinis axes habentes, reducere ad hyperbolas ſimiles eandem diametrum obtinentes.

Conſtructio & demonſtratio.



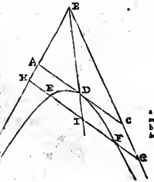


Habeant A B C, E F G hyperbolæ inæquales axes D B, H F: oportet ad axium alterutrum, puta H F applicare hyperbolam ſimilem A B C. ponantur in A B C hyperbola ordinatim lineæ O T, M V, A X; & D B, D T, D V, &c. lineis, proportionales fiant H F, H R, H S, H Z: ponanturq; ordinatim in hyperbola E F G, lineæ N R, L S, E Z. deinde fiant B R, Q S, I Z, lineæ proportionales O T, M V, A X: quoniam igitur H Z linea in F, R, S diuiſa eſt vt D X in B, T, V, X. patet rectāgulis D T B, D V B, &c. proportionalia eſſe rectangula H R F, H S F, &c. ſed D T B, D V B rectangulis proportionalia ſunt quadrata O T, M V, A X, id eſt per cōſtructionem quadrata P R, Q S, I Z, quadrata igitur R P, Q S, I Z proportionalia ſunt rectangulis D T B, D V B, &c. id eſt H R F, H S F, &c. quare puncta I, Q, P ad hyperbolam ſunt cuius axis H F. quod autem I Q P hyperbola ſimilis ſit A O B: ſic oſtendo, intelligantur iungi puncta O B, M B, M O, item P F, Q F, Q P, patet ex conſtructione triangula O T B, M V B, item M O B ſimilia eſſe triangulis P R F, Q S F, Q P F quia ex iiſdem rationes habent compoſitas: quare cùm operatio illa in vtraque hyperbola ſine termino continuari poſſit, vt figuræ omnes hyperbolæ A B C inſcriptæ, ſimiles ſint ſiguris inſcriptis hyperbolæ I F K, patet ex Archimede A B C, I F K hyperbolas eſſe ſimiles. fecimus igitur, quod erat poſtulatum.

PROPOSITIO CLXXXI.

Datis aſymptotis, exhibere hyperbolam, quæ per datum intra aſymptotos punctum tranſeat.

Conſtructio & demonſtratio.



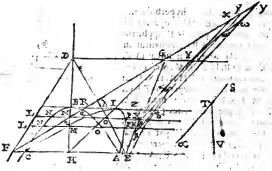
Datæ ſint aſymptoti A B, B C, & intra illas, punctum D. oportet exhibere hyperbolam, quæ per datum punctum D tranſeat, ponatur per D linea A C pertingens vtrimque ad aſymptotos, a quæ in D biſſecta ſit: illique æquidiſtans ponatur G H: & C D quadrato, æqualia fiant rectangula G F H, G E H: erunt F, D, E b puncta ad hyperbolam, cuius aſymptoti ſunt A B, B C. datis igitur aſymptotis, &c. Quod erat faciendum.

a Ex elementis.
b 14. & 15. huius.

PROPOSITIO CLXXXII.

Datæ hyperbolæ aliam exhibere æqualem cuius aſymptoti datum contineant angulum.

Conſtructio & demonſtratio.



Sint A B C hyperbolæ aſymptoti E D, D F: angulus datus V T α, oporteat exhibere hyperbolam, æqualem datæ A B C, cuius aſymptoti, datum angulum V T α contineant. ſit primò datus angulus V T α minor angulo E D F, hyperbolæ A B C axis ponatur D B, & ad illum ordinatim A C, pertingens ad aſymptotos in E & F.
a Per elementa. Super E F ſegmentum deſcribatur [a] circuli continens angulum æqualem V T α: qui
b Ex elementis. cùm minor ponatur angulo E D F, cadet [b] ſegmentum deſcriptum ſupra D, adeoque D G æquidiſtans A C, ſegmento circuli occurret in puncto quodam G: iungantur igitur G F, G E, G H; actæq; per B contingenti B I, æquidiſtantes ponantur L K, occurrentes A B C hyperbolæ in N, axi D B in M, rectæ H G in O: fiantque M N lineis æquales O P, O Q: dico P, I, Q, eſſe ad hyperbolam, æqoalem
c Ibid. A B C, cuius aſymptoti E G, G F datum obtinent angulum. cùm enim G D, E F, I B, &c. æquidiſtent, vt rectangulum D M B eſt [c] ad rectangulum D M B, ſic G O I rectangulum eſt ad rectangulum G O I; ſed vt D M B ad D M B, ſic M N quadratum ad quadratum M N id eſt O P quadratũ ad quadratũ O P: igitur vt G O I rectãgulum ad rectangulum G O I, ſic quadratum O P ad quadratum O P, ſiue O Q quadratũ
d 1.9.11. & 15. huius. ad quadratũ O Q: puncta igitur [d] P I Q ſunt ad hyperbolã cuius aſymptoti, G E G F,
e 26. huius. quam in [e] I contingit Z R. quia verò G D, Z Q R, E H æquidiſtant, rectæ Z I, λ B æquales ſunt: vnde & triangula contingentium G I Z, λ D B æqualia ſunt: quare &
f 174. huius. hyperbolę A I C, A B C [f] æquales: angulus autem E G F dato V T α per conſtructionem eſt æqualis, datę igitur hyperbolæ, &c.

Sit iam angulus datus S T V, maior angulo E D F, producaturque S T in α, an-
g 15. huius. gulus igitur V T α minor eſt angulo E D F; per conſtructionem igitur primæ partis [g] huius, exhibeatur hyperbola æqualis A B C cuius aſymptoti angulum obtineant V T α. ſit illa P I Q & aſymptoti E G, G F. producantur D G in Y & F G in infinitum: G Y autem æqualis ſit I Z iuncta Z Y, occurrat F G in X. quoniam igitur Y G, I Z, æquales ſunt, & parallelæ, rectæ quoque G I, Z Y æquales ſunt & parallelæ; & quia Z R in I biſſecta eſt, Z X quoque in Y biſſecta erit: poſitis igitur Z X, parallelis γ β, fiant Y Z quadratis æqoalia rectangula β δ γ & β ω γ: erunt δ, Y, ω
h 1.9.11.15. 26. huius. ad [h] hyperbolam quam in Y contingit Z X. & aſymptoti ſunt γ G, G H conſtituentes angulum æqualem dato S T V. quia verò triangula contingentium Z I G, Z Y G æqualia ſunt, hyperbola quoque δ Y ω æqualis eſt hyperbolæ P I Q id eſt per conſtructionem, hyperbolę A B C: datæ igitur hyperbolę, &c. Quod erat faciendum.

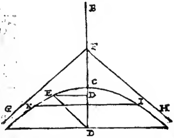
PRO-

PROPOSITIO CLXXXIII.

DAtam AB diuiſam in C denuo ſecare in D, vt rectangulum BDC quadrato reſidui AD ſit æquale.

Conſtructio & demonſtratio.

ERigatur AE vt cum BAD, angulum ſemirectum conſtituat, & ex F dimidio CB, lineæ ponantur FG, FH angulos ſemirectos exhibentes cum AF lineas & deſcripta ſit hyperbola ICE, inter aſymptotos FG, FH habens axem AF: ſitque E punctum interſectionis rectæ AE, productæ cum hyperbola ICE: demiſſa igitur perpendicularis ex E ad AB, exhibebit punctum D quæſitum, cùm enim aſſymptoti HF, FG angulum forment rectum ex conſtructione, rectangulum a BDC æquale eſt quadrato DE; quia verò angulus DAE ſemirectus eſt, & ADE rectus, reliquus AED dimidio recti, adeoque & angulo EAD æqualis eſt & ED quadratum æquale quadrato AD: vnde & rectangulum BDC, AD quadrato æquatur. fecimus igitur, &c. quod petebatur.



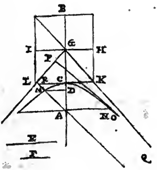
a 60. huius.

PROPOSITIO CLXXXIV.

DAtam AB ſectam in C partiri in D. Vt rectangulum BDC ad AD, quadratum datam obtineat rationem quadrati E ad F quadratum.

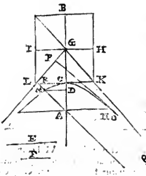
Conſtructio & demonſtratio.

DIuiſa CB bifariam in G ponatur orthogonalis HG vt ratio quadrati CG ad GH, hoc eſt CB ad HI, eadem ſit cum proportione E ad F. perfecto deinde parallelogrammo ductiſque GK; GL deſcripta ponatur hyperbola inter aſymptotos GK, GL, habens verticem C. ex puncto deinde A ducatur AM, vt cum DA recta ſemirectum angulum formet, occurrens perimetro ſectionis in M: & ponatur MD parallela HI. Dico punctum D eſſe quod quæritur: eſt enim rectangulum BDC ad quadratum DM vt CB, quadratum ad HI quadratum per ea quę præmiſimus. ſed quadrato DM æquale eſt DA quadrato, igitur rectangulum BDC ad DA, quadratum eam habet rationem quam CB ad HI quadratum, hoc eſt quadratum E, ad F, quadratum. quod præſtandum fuit.



PROPOSITIO CLXXXV.

OPorteat his poſitis aſſignare punctum M interſectionis rectæ A M, cum perimetro ſectionis N C M.

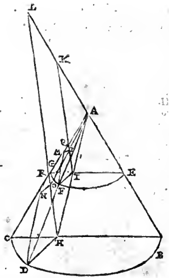


Constructio & demonſtratio.

FIat ex 28. huius rectæ A M parallela O P, quę contingat ſectionem in O. & producta vtrimque recta A M, vſque ad aſymptotos, fiat quadrato O P æquale rectangulum R M Q. Dico punctum M fore interſectionem communem rectæ A M cum ſectione N C M. Quod patet ex 14. huius, &c.

PROPOSITIO CLXXXVI.

IN omni cono ſectiones hyperbolicæ parallelæ ſimiles figuras exhibent.



Demonſtratio.

SIt A B C triangulum per axem coni A B D C, ſitque E F G ſectio baſi æquidiſtans: ductâ deinde A H in plano trianguli per axem quæ circulorum diametris occurrit in I & H, cum in eodem ſint plano, erigatur ex H recta H D normalis ad B C, occurrens circuli perimetro in D, ducaturque D A, occurret illa circuli E F G perimetro in F: iungãtur autem I F: denique ſecundum H D, F I lineas plana ducantur parallela, quæ cum A B linea conueniant in K & L, & A C in Q & R. erunt igitur I F Q, R H D [a] hyperbolæ, quarum diametri K Q I, L R H ad quas ordinarim poſitæ ſunt I F, H D: quia verò æquidiſtant E G. B C, [b] item I F, H D vt A I ad I F, ſic A H eſt ad H D: rurſum aſſumpto in I Q puncto quodam P, ponatur ex A per P linea, occurrens L R quæ in eodem cum I K, plano eſt in O: ponantur autem P M, O N æquidiſtantes F I, H D: cùm igitur I Q, R H æquidiſtent: vt Q P ad Q I, ſic R O eſt ad R H; igitur K P Q rectangulum eſt ad rectangulum K I Q, vt L O R rectangulum eſt ad rectãgulum L H R: ſed vt K P Q ad K I Q, rectangulum [c] ſic P M quadratum ad quadratum I F & vt L O R, rectangulum ad L H R, ſic O N quadratum ad quadratum H D: quadratum igitur O N eſt ad H D, vt P M quadratum ad quadratum I F: & P M, I F lineę proportionales rectis O N, H D: quia verò Q P, Q I rectæ, quoque proportionales ſunt R O, R H: figuræ Q P M, Q I F ſimiles ſunt figuris R O N, R H D: ſimiles igitur [d] ſunt hyperbolæ Q M F, R N D. Quod erat demonſtrandum.

a 1. huius.

b 16. vndecimi.

c 1. huius.

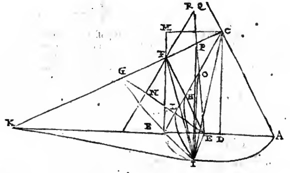
d Per Archimedem.

PROPOSITIO CLXXXVII.

SI in cuiuſcunque ſectionis diametro producta, punctum aſſumatur, & ab illo ad ſectionem contingentes ducantur, iunganturq́; contactuum puncta:

Dico in parabola partē diametri à vertice eiuſdem & contingente interceptam æqualem eſſe illi, quæ ab eiuſdem vertice & linea contactus coniungente intercipitur lineæ: in ellipſi autem maiorem, in hyperbola minorem.

Demonſtratio.



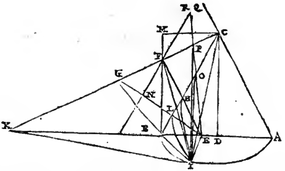
SIt A B C conus, ſectus triangulo per axem A B C, diameter autem baſeos A G B ſit A B in qua aſſumpto quouis puncto E, ponatur E H æquidiſtans A C, & E I normalis ad A B, tum per H E, & I E, fiat ſectio exhibens in ſuperficie coni lineam G H I: erit illa [a] parabola: ponatur exinde axis coni C D, perficiaturq́ue parallelogrammum C D B, cuius lateri B M occurrat E H producta in F, iunctaq́ue C F, diametro A E protractæ occurrat in K, ponatur autem per I contingens circulum A I B in I: conueniet illa cum A K, C K lineis in K, vti propoſ. 17. de parabola oſtendi: vlterius, ſi ſecundùm I K & per C verticem coni, planum intelligatur duci, continget illud ſuperficiem coni ſecundùm lineam C I: vti propoſit. 17. de parabola oſtendi: eadem quoque propoſitione oſtenſum eſt iunctam I F, parabolam in I contingere, & E H, H F lineas eſſe æquales: quod erat primum.

[a] 1. De parabola.

Rurſum inter F & K in F K linea punctum ſumatur quodcunque G; iunctiſq́; E G, I G ſecundum I E, E G lineas planum agatur, exhibens in coni ſuperficie lineam L I: erit I E L [b] ellipſis; oportet autem oſtendere I C, eandem contingere in I, & G L maiorem eſſe L E. ponatur per F linea F N, æquidiſtans B C in plano trianguli per axem occurrens E G, lineæ in N: quoniam igitur punctum G ſumitur inter F & K, ſi per G, recta intelligatur duci, parallela C B, cadet [c] illa vltra F N, adeoq́ue N punctum inter G & L eſt: quia verò F N, H L æquidiſtant, & [d] E H, H F oſtenſæ ſunt æquales, rectæ E L, L N quoque æquales ſunt: quare cum L G maior ſit L N, recta quoque L G maior eſt L E. deinde cùm vtrumque punctum I & G, in plano ſit C I K, recta I G in eodem exiſtit plano: quia verò planum C I K, in linea C I [e] contingit ſuperficiem coni, & E I L ellipſis in vno tantum puncto occurrit C I lineæ nimirum in I, planum C I K, in I, adeoq́ue & G I, linea in vno tantum puncto occurrit ellipſi, adeoq́ue in I contingit. Quod erat ſecundum.

[b] 1. vel 2. De ellipſi.
[c] Ex elementis.
[d] 17. De parabola.
[e] Ibid.

Sumatur denique inter C & F, in C F linea punctum quodcumque P; iunctiſq́ue P E, P I fiat ſecundùm E I, E P lineas planum I E O: patet I E O eſſe hyper-



a 1. huius

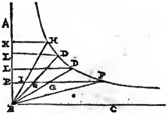
bolam, a cùm EP linea, intra EF, AC parallelas poſita, & commune habens cum EF linea punctum E, producta, lateri AC occurrat in Q. oſtendetur autem vt priùs PI lineam eſſe in plano CIK & hyperbolam in I contingere: reſtat igitur vt oſtendamus PO lineam minorem eſſe OE. recta N, occurrat EP, productæ in R: quoniam igitur CB, RN æquidiſtant, & N punctum oſtenſum eſt eſſe intra G & L, recta autem FG cum CB, conueniat in C, conſtat R punctum cadere vltra P: adeoque RO lineam maiorem eſſe PO: ſed RO linea æqualis eſt OE, cùm EH, HF lineæ æquales ſint, recta igitur PO minor eſt quàm EO. quæ erant demonſtranda.

PROPOSITIO CLXXXVIII.

SInt AB, BC aſymptoti hyperbolæ DDF, & EF, KH parallelæ aſymptoto BC: ductæ quoque BD, diuidant HBF in partes ſeu ſectores æquales, occurrentes EF lineæ in IGG.

Dico EF in IGG, diuiſam eſſe in continuè proportionales.

Demonſtratio.



b Ex conuerſa 109. huius.

QVoniam ſegmentum HBF diuiſum eſt in partes æquales; igitur ſunt in continua b analogia lineæ FE cum reliquis ſibi parallelis, ſunt autem IE, HK, EF, & GE, DL, FE in continua proportione; igitur quoniam prima EF communis eſt, & HK, DL, EF, ſunt proportionales, hinc etiam mediæ EI, EG, EG, EF, proportionales exiſtunt. Quod erat demonſtrandum.

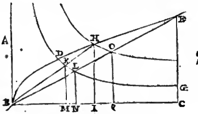
PROPOSITIO CLXXXIX.

HYperbolam DFG inter aſymptotos rectum angulum formantes conſtitutam, ſecet in D parabola BDE habens axem BC. poſitaq; ex B quauis linea BKH, quæ hyperbolæ occurrat in K & parabolæ in H, deſcribatur per H hyperbola HO habens AB, BC aſymptotos; & ex B quæuis alia ducatur BLOE, occurrens hyperbolis in L, & O parabolæ in E.

Dico BK eſſe ad BH, vt BL eſt ad BO.

Propoſitionem hanc, vti & duas ſequentes, quòd ſuis locis exciderint, huic parti apponere viſum eſt.

Demonſtratio.



POnantur KM, LN, HI, OQ: æquidiſtantes AB. Triangula a igitur BKM, BLN æqualia ſunt, vti & triangula BHI, BOQ: vnde BKM triangulum eſt ad BLN, vt BHI ad BOQ triangulum, & permutando BKM ad BHI, vt BLN ad BOQ: ſed BKM triangulum ad b BHI, in duplicata eſt ratione KM ad HI: ſimiliter BLN triangulum ad triangulum BOQ in duplicata eſt ratione LN ad OQ; igitur vt KM ad HI, id eſt BK ad BH, ſic LN eſt ad OQ, id eſt BL ad BO.

a Ex 46. huius.

b Ex elementis.

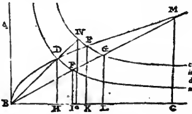
Nota vniuerſalem hanc eſſe propoſitionem: neque neceſſarium eſſe vt BH *linea incidat in* H, *communem hyperbolæ cum parabola interſectionem; ſed* BH, BE *quaſuis poſſe eſſe, vti ex demonſtratione iam poſita manifeſtum eſt.*

PROPOSITIO CXC.

SInt AB, BC rectum angulum formantes aſymptoti hyperbolarum DF, EG, quas in D & E ſecet parabola habens axem BC: ponatur autem ex B quæuis ſecans hyperbolas in F & G, occurrens parabolæ in M. & ex F, D, G, E punctis rectæ demittantur DH, FI, EK, GL parallelæ AB.

Dico rationem DH ad FI, maiorem eſſe ratione FK ad GL.

Demonſtratio.



REcta BD producta occurrat EG hyperbolæ in N, ponaturque NO, parallela AB; erit igitur DH ad FI, c vt NO ad GL: ſed ratio NO ad GL, maioris ad eandẽ, maior d eſt quã ratio EK ad GL, minoris ad eandem: ratio igitur DH ad FI, maior eſt ratione FK ad GL. Quod fuit demonſtrandum.

c 189. huius.

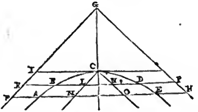
d Per elementa.

PROPOSITIO CXCI.

SIt ABC hyperbolæ vertex C, ex qua demiſſis lineis CL, CN quæ aſymptotis æquidiſtent, ponantur BD, AE æquidiſtantes contingenti per C ductæ occurrentes CL, CN lineis in L, N, M, O.

Dico quod BLD rectangulum ad rectangulum AME ſit vt LN linea ad lineam MO.

Demonſtratio.



POnantur ABC hyperbolæ aſymptoti GK, GH occurrentes BD, AE lineis in
a Ex elementis. K, F, P, H. rectangulum KLP æquale eſt [a] rectangulis KBP, BLD: ſed etiam
b Ibid. KLP id eſt LKN, (ob KL, NP lineas æquales) æquale eſt [b] quadrato KL, (id
c 18. huius. eſt IC, id eſt KBP [c] rectangulo) vnà cum rectangulo KLN: demptis igitur æqualibus KBP, & quadrato KL, æqualia remanent rectangula BLD, KLN: ſimiliter æqualia oſtenduntur rectangula AME, FMO: igitur vt KLN ad FMO re-
d 1. Sexti. ctangulum, id eſt vt [d] LN ad MO, ſic BLD rectangulum eſt ad rectangulum AME. Quod erat demonſtrandum.

HY-

HYPERBOLÆ

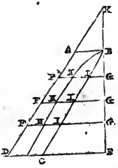
PARS SEPTIMA

Varias exhibet geneſes, quæ tum ex lineis & circulis, tum ex ellipſi & parabola, denique ex ipſa oriuntur hyperbola. Secundò hyperbolas reducit ad ſectiones, è quibus ortæ. Tertiò reliquas ſectiones ex hyperbola educit.

PROPOSITIO CXCII.

SIt parallelogrammum ABCD, cui adiungatur triangulum BEG: rectæ verò DE, ponantur æquidiſtantes FG; rectangulis autem IGF, fianr quadrata GH æqualia.

Dico puncta B, H, H ad eandem eſſe hyperbolam, cuius diameter eſt BE.

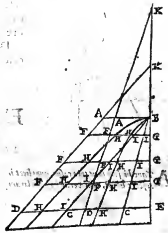


Demonſtratio.

PRoducantur rectę DA, EB donec conueniant in K. quoniam æquidiſtanr FG, rectæ DE, vel AB, & AD ipſi BC; igitur vt KB ad KG, ita eſt AB ad GF: & vt KB ad BG, ita AB, hoc eſt FI ad IG: & vt KG ad GB, ita eſt FG ad GI. quare rectangulum KGB, ad KGB, rectangulum eam rationem obtinet, quę reperitur inter rectangula FGI ad FGI, cùm ex iiſdem rationibus componantur: ſed vt rectangulum FGI, ad FGI rectangulum, ita ponitur quadratum GH ad HG quadratum; igitur vt eſt rectangulum KGB ad KGB rectangulum, ita eſt GH ad GH quadratum. Igitur HH ſunt ad eandem hyperbolam cuius diameter tranſuerſa eſt KB. Quod fuit demonſtrandum.

Corollarium.

HInc colligere licet methodum deſcribendi hyperbolas, non ſolùm eas, quæ aſymptotos habent ad rectos angulos conſtitutas, verùm etiam alias omnes, quæ vel obliquiſſimo ſeſe angulo decuſſant. hyperbola enim cuius aſymptoti ſeſe inuicem orthogonaliter diuidunt, rectangula KGB æqualia quadratis a ordinatim applicatarum exhibent: cùm verò rectangula KGB, maiora ſunt quadratis GH, aut minora, tunc aſymptotos habent ſibi inuicem ad angulos obliquos inſiſtentes: vnde aſymptotorum quoad angulos conſtitutio, dependet à proportione rectangulorum KGB, ad quadrata GH, non autem à proportione rectangulorum IGF ad quadrata GH. nam vt in præſenti ſcemate videre eſt, rectangula IGF æqualia ſunt quadratis HG; nihilominus aſymptoti harum hyperbolarum occurrunt ſibi ad inæquales angulos, a 10. huius

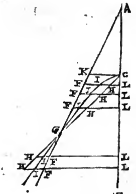


quod ſi quis hyperbolas contractas magis aut diductas eadem praxi deſcribere deſiderat, augeat tantummodo lineas ordinatim poſitas GH. vel decurtet ſecundùm rationem, quam deſiderat, habebitque intentum.

PROPOSITIO CXCIII.

DEcuſſent ſe inuicem rectæ AL, CG in C: occurrat deinde AF rectæ DC in G; & poſitis FL, quæ æquidiſtent cuidam CK fiant inter LH, LF mediæ proportionales LI.

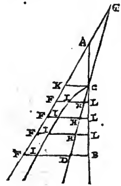
Dico IIC eſſe ad eandem hyperbolam cuius AC eſt latus tranſuerſum.



Demonſtratio.

QVoniam enim FL, æquidiſtant KC lineæ, ac proinde inter ſe, erit ratio FLH rectanguli, ad rectangulū FLH, compoſita ex ratione HL ad HL, hoc eſt CL, ad CL, & ratione FL ad FL, hoc eſt AL ad AL: igitur rectangulum ALC ad ALC, eſt vt rectangulum FLH ad FLH. cùm ergo quadrata IL, æqualia ſint rectangulis FLH, erit quadratum IL ad IL, quadratum vt rectāgulum ALC ad ALC, vnde patet CII eſſe ad hyperbolam cuius CB, eſt diameter, & AC latus tranſuerſum. Quod demonſtrate oportuit.

PROPOSITIO CXCIV.



DEcuſſent ſeſe rurſus AB, CD in C: occurrat deinde AF rectæ DC in G, ſic vt AG non ſubtendat angulum ACD; & poſitis FL quæ æquidiſtent cuidam CK, fiant inter FH, HL mediæ proportionales HI.

Dico IIC ad eandem eſſe hyperbolam cuius GC latus tranſuerſum eſt.

Demonſtratio.

EAdem eſt planè quæ in præcedenti propoſitione.

Scholion.

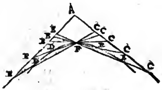
ATque hi ferè ſunt tres caſus, quos licet in prima parte expoſuerimus, tamen hunc in locum referre libuit, cùm veras hyperbolarum geneſes exhibeant.

PRO-

PROPOSITIO CXCV.

COnſtituant A B, A C quemuis angulum, & per aſſumptum in eo punctum F ducantur B C, rectis autem F, D B, æquales fiant, F, E C. Dico D F E fore ad eandem hyperbolam cuius aſymptoti ſint AB, AC.

Demonſtratio.



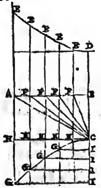
DEmonſtrauimus 15. huius rectam quamcumque ſectioni hyperbolicæ occurrentem inter aſymptotos conſtitutam, ęquales ſui partes habere conſtitutas inter aſymptotos & ſectionem, hoc eſt ſi recta B C ſecet hyperbolam in D & F, rectas B D, F C æquales eſſe inter ſe; igitur ſi inter aſymptotos A B, AC per punctum F deſcripta ponatur hyperbola, quamcumque per F duxeris rectam BFC, neceſſarium eſt vt B F ſit æqualis C E, igitur cùm hac praxi vſi ſimus, reſtat vt D F E pertineat ad eandem hyperbolam.

PROPOSITIO CXCVI.

LIneæ A B, C D occurrant ſibi mutuo ad angulos rectos in B, & alteri illarum ponantur æquidiſtantes E G. aſſumpto denique quouis puncto C, in recta C D, ductiſque C F, fiant rectis C F æquales F E, F G.

Dico E E, G G eſſe hyperbolas, & quidem oppoſitas.

Demonſtratio.

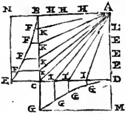


POnatur C H quæ æquidiſtet A B, item ex G, ponātur eidem æquidiſtantes G I, quoniam quadratum CF æquale eſt quadratis F B, B C; etiam F G quadratum iiſdem æquabitur. eſt autem F G quadratum æquale quadrato F H, vnà cum rectangulo E H G, cùm ſint E F æquales F G: igitur cùm F H quadratum æquale ſit BC quadrato, etiam rectangulum E H G, quadrato F B, hoc eſt G I æquale exiſtet. erit igitur rectangulum E H G hoc eſt D I C ad D I C, rectangulum vt F B quadratum ad F B quadratum hoc eſt vt G I quadratum ad quadratum G I. quare E E, G G hyperbolæ ſunt & quidem oppoſitæ. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CXCVII.

Datis AB, AD pro diametris hyperbolæ ad rectos angulos conſtitutis coniugatas ſectiones deſcribere.

Conſtructio & demonſtratio.



Ponantur EF, HG æquidiſtantes AB, AD: facto deinde parallelogrãmo ADC. ductis quoque AK, AI fiant rectis AK æquales K, EF; rectis inſuper AI æquales rectæ I, HG. Dico BFF, DGG eſſe hyperbolas coniugatas. quod ſint hyperbolæ (quarum latera tranſuerſa ſunt AB, AD) demonſtratum eſt prop. præced. Quod autem coniugatæ, ſic oſtendo. Productis BC in G, & DC in F, ponantur FN, GM quę æquidiſtent AD, AB, diuidentur ex conſtructione hæ biſariam in M & N, à rectis AB, AD, vtpote diametris, ſi vſque ad ſectionem vtrimque productæ intelligantur. ſuntque rectis AD, AB quæ latera tranſuerſa ſuarum hyperbolarum oſtenſa ſunt, æquidiſtantes; igitur AB,[a] AD ſunt diametri coniugatæ, ac proinde ipſæ etiam figuræ coniugatę ſunt: fecimus igitur quod fuerat poſtulatum.

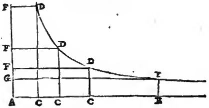
a Ex 40. huius.

PROPOSITIO CXCVIII.

Lineæ AB, AF poſitæ ſint ad quemcumque angulum FAB, lineaque AB diuiſa ſit vtcunque in CC, & fiat vt AC ad AB, ita BE ad CD. ſintque BE, CD parallelæ AF.

Dico puncta DE eſſe ad eandem hyperbolam cuius aſymptoti ſunt AB, AF.

Demonſtratio.



Ducantur EG & DF, quæ æquidiſtent AB: cùm igitur ſit vt AC ad AB, ſic EB ad DC, parallelogramma CDF [b] æqualia ſunt parallelogrammo BEG, puncta igitur EDD [c] ad eandem ſunt hyperbolam.

b Ex elementis. c Ex conuerſa 46. huius.

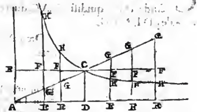
PROPOSITIO CXCIX.

Sint AB, AE lineæ quemcumque angulum conſtituentes, ex B verò puncto lineæ AB, ducatur BF parallela AE: & ducta quauis AC quæ FB lineam ſecet in C, fiant in continua analogia EG, EF, EH quę parallelæ ſint lineæ AB.

Dico

Dico H C puncta eſſe ad eandem hyperbolam cuius aſymptoti ſunt AB, AD.

Demonſtratio.



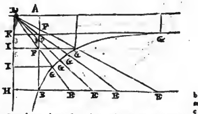
QVoniam ſupponuntur lineę E G, E F, E H eandem continuare rationem, rectangula G E H, quadrato C D, adeoque & inter ſe æqualia ſunt: eſt autem E G ad E G, vt A E eſt ad A E; igitur A E H, rectangula inter ſe quoque ſunt æqualia: cùm ex ijſdem rationem habeant compoſitam, ex quibus ratio G E H rectangulorum componitur. puncta igitur H H C [a] ad hyperbolam ſunt, cuius aſymptoti ſunt AB, AD. a 75. huius.

PROPOSITIO CC.

COnſtituantur duæ lineæ A B, B C formantes angulum quendam A B C, & ex puncto quouis D extra angulum aſſumpto ducantur rectæ D E, occurrentes A B in F punctis. Fiant autem D G mediæ proportionales inter D F, D E.

Dico G G eſſe ad eandem hyperbolam cuius centrum eſt D punctum.

Demonſtratio.

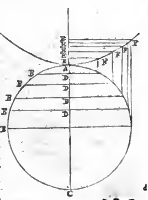


POnatur D H æquidiſtans A B, & F K, G I parallelæ B C. quoniam igitur in continua ſunt proportione D F, D G, D E, erunt quoque in continua analogia K F, I G, H C, hoc eſt D K, D I, D H: igitur vt D I ad D H, (id eſt D K ad D I,) ſic K F id eſt H B ad I G: rectangula igitur [b] D H B, D I G æqualia ſunt: quare B G G [c] puncta ad eandem ſunt hyperbolam cuius centrum D. b Ex elementis. c Ex conuerſa 46. huius.

PROPOSITIO CCI.

CIrculus A B C diuiſus diametro A C, habeat B D normaliter ad A C conſtitutas; producta verò C A, fiat vt A D C ad A D C rectangulum, ita rectangulũ A E C ad A E C rectangulum, & fiant rectis B D æquales & parallelæ E F.

Dico F F fore ad eandem hyperbolam cuius diameter eſt tranſuerſa A C.

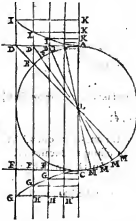


Demonſtratio.

QVoniam A D C ad A D C, eſt vt quadratum D B ad D B quadratum; igitur etiam erit A E C ad A E C rectangulum, vt quadratum B D ad B D, id eſt E F ad E F quadratum: igitur F F eſt [d] hyperbola, ad cuius diametrum C A E ordinatim poſitæ ſunt E F. d 1. huius.

PROPOSITIO CCII.

CIrculi ABC diameter ſit AC, contingentes ad A & C, AD, CF: Deinde DF æquidiſtent AC, ductis inſuper L D, fiant rectis L, B D, æquales D I, & F G.



Dico AI, & CG hyperbolas eſſe oppoſitas.

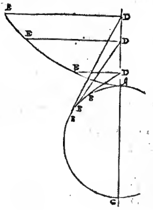
Demonſtratio.

POnantur IK quę æquidiſtent AD: erunt igitur IK æquales DA, quia verò BM lineis æquales ſunt DF, & DI æquales L, BD, rectangula DIF ideſt AKC, æqualia ſunt rectangulis BDM, id eſt quadratis DA ſiue IK, igitur AKC ad AKC, rectangulum eſt vt IK quadratum ad quadratum IK. vnde AI, puncta a ad hyperbolam ſunt. ſimiliter oſtendam puncta CGG ad hyperbolam eſſe. quia verò AII, CGG hyperbolæ communi gaudent tranſuerſa AC, oppoſitæ erunt b ſectiones AII, CGG.

a 1. huius.

b Defin 41 huius.

PROPOSITIO CCIII.



CIrculum ABC cuius diameter AC, contingant quotuis DB. occurrentes diametro in D: erectis autem parallelis DE, fiant DB rectis æquales DE.

Dico A E eſſe ad eandem hyperbolam, cuius diameter tranſuerſa eſt AC.

Demonſtratio.

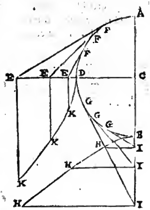
QVoniam BD contingentes ſunt, rectangulis ADC æqualia ſunt quadrata DB id eſt ex hypotheſi quadrata DE: quare ADC ad ADC rectangulum, eſt vt DE quadrarum ad quadratum DE. igitur A, EE puncta ad hyperbolam ſunt cuius tranſuerſa diameter AC. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO CCIV.

Circuli ABC diametri ſint AB, CD, ſeſe decuſſantes ad angulos rectos. Fiant deinde contingentibus EF, IG ductis, (ex lineâ AB, & CD) productâ æquales lineæ EK, IH parallelæ diametris AB, CD.

Dico DK, BH ſectiones eſſe coniugatas.



Demonſtratio.

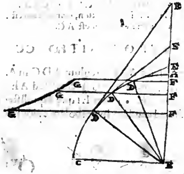
Cum enim DKK, BHH hyperbolæ oſtenſę ſint prop. præc. habentes latera tranſuerſa AB, CD, quæ æqualia ſunt inter ſe; & præterea quadrata EK æqualia ſint quadratis IH (ſi BI, & DE æquales aſſumantur) manifeſtum eſt eas eſſe ſectiones coniugatas. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCV.

Quadrantem circuli ABC contingant DE, ducantur autem per DD parallelæ BC, rectæ FDG, quæ ſint æquales, BE.

Dico GG eſſe ad hyperbolam cuius aſymptoti ſunt AB, BC.

Demonſtratio.



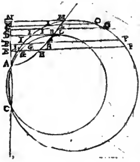
Per centrum B ponantur BD. Quoniam contingentes ſunt ED, & BD per centrum actæ, igitur angulus EDB rectus eſt, quemadmodum & angulus BFG. quare quadrato BD æquale eſt rectangulum FBE hoc eſt per hypotheſim BFG. vnde æqualia ſunt inter ſe rectangula BFG. conſtat igitur GG eſſe ad [a] hyperbolam, cuius aſymptoti ſunt AB, BC. Quod fuit demonſtrandum.

[a] Ex 46. huius.

PROPOSITIO CCVI.

Circulum A B C contingat D B, cui ponantur æquidiſtantes E F. linea verò D C ſecet circulum in punctis A, C. fiant quoque rectangulis G E F æqualia quadrata E H.

Dico A H B eſſe ad eandem hyperbolam cuius latus tranſuerſum A C.



Demonſtratio.

Quoniam E H quadratis æqualia ſunt rectangula G E F quadratis E H, æqualia quoque ſunt rectangula A E C: (cùm A E C, G E F rectangula æquentur.) quare vt A E C ad A E C, rectangulum, ita quadratum E H ad H E quadratum; igitur A H B ſunt ad hyperbolam, cuius latus tranſuerſum A C.

a Per elementa.

PROPOSITIO CCVII.

Oporteat autem hyperbolam A H B producere in infinitum.

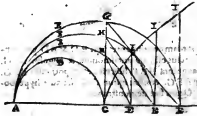
Conſtructio & demonſtratio.

Per puncta A C deſcribatur circulus C A M cuiuſcunque magnitudinis; & contingente poſita N M quę æquidiſtet D B, ponantur prętereà K L parallelæ contingenti: denique fiant rectangulis O K I æqualia quadrata K L. Dico A H B L M eſſe ad eandem hyperbolam. eſt enim rectangulum A N C æquale quadrato N M, & A K C æquale quadrato K L, quemadmodum rectangulis A E C æqualia ſunt quadrata D H: igitur cùm rectangulum C E A ad C K A, eandem habeat rationem quam quadratum E H ad K L, quadratum, manifeſtum eſt A H L M eſſe ad eandem hyperbolam cuius tranſuerſa diameter eſt A C.

PROPOSITIO CCVIII.

Contingant circuli A B E circulum A D C in A. actâ verò communi diametro A E, ponatur C G normalis ad A E occurrens circulis in G H: & fiant rectis E H æquales E I quę æquidiſtent G C.

Dico C I I eſſe ad eandem hyperbolam cuius latus tranſuerſum A C.



Demonſtratio.

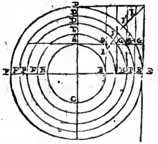
Quadratis E H æqualia ſunt rectangula A E C; ſed E H quadratis æquatur quadrata E I, quadratis igitur E I æqualia ſunt rectangula A E C: quare C E A ad C E A rectangulum eſt vt quadratum E I ad E I quadratum: puncta igitur C I I ad hyperbolam ſunt. Quod demonſtrandum erat.

PRO-

PROPOSITIO CCIX.

Circulo A B C ponantur concentrici D E F. contingat quoque A G circellum A B C occurrens reliquis circulis in G G. Fiant autem rectis A G æquales E I, orthogonaliter erectæ ex E E punctis.

Dico B I I eſſe hyperbolam cuius diameter tranſuerſa eſt B H.



Demonſtratio.

Quadratis A G æqualia ſunt rectangula C D A, hoc eſt H E B. igitur etiam quadratis E I æqualia ſunt rectangula H E B. quare rectangulum H E B ad H E B eſt, vt quadratum E I ad E I quadratum; patet igitur H B eſſe latus tranſuerſum hyperbolæ B I I. Quod fuit demonſtrandum.

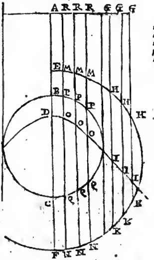
PROPOSITIO CCX.

Eandem hyperbolam producere in infinitum eadem praxi.

Conſtructio & demonſtratio.

Fiat rectangulo A B, A C, ſiue quadrato A D æquale rectangulum E A F cuius latus A E minus ſit latere A B. deinde deſcribatur a circulus cuius diameter ſit E F, & ductæ ſint R M N, erunt rectangula M R N æqualia rectãgulis P R Q. ductis itaq; G H K parallelis A F, fiant rectangulis H G K æqualia quadrata G G. Dico G I eſſe ad eandem hyperbolam I O D. nam antè oſtenſum eſt eſſe I I ad hyperbolam. inſuper ex conſtruct. ſunt rectangula M R N æqualia rectangulis P R Q, igitur etiam quadrata R O æqualia ſunt rectangulis M R N, ſed per præcedentem quadrata R O, G I ſunt ad eandem hyperbolam, ex eo quod quadrata R O, G I ſint æqualia rectangulis M R N, H G K: igitur produximus hyperbolam D O O, quod requiſitum fuerat. quod ſi vlteriùs eandem hyperbolam extẽdere quis intendat, eandem praxim extendat ad circulum maiorem circulo E H F, ita tamen vt obſeruetur eadem conditio, quam hæc propoſitio requirit.

a Ex Pappo lib. 7. prop. 159. & ex præcedenti huius.

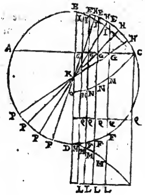


PROPOSITIO CCXI.

Circulum A B C cuius diameter B D ſecet quæuis A C orthogona ad B D, & ponantur E F quæ æquidiſtent B D, occurrentes A C in punctis G G, tum per centrum K & puncta G, agantur K, P H, rectis autem K, G H, fiant æquales G I.

Dico B I C eſſe ad hyperbolam.

 Demon-



Demonſtratio.

Flant G L æquales BD, & LM æquales GI. ſimiliter ipſis ML æquales GN. ducatur prætcrea QQ, parallela LL, quæ rectas GL biſariam diuidat. quoniam GQ æquales ſunt dimidijs GL id eſt BD, ſiue PH, erunt GQ æquales KB, ſunt autem GN, vel ML æquales K, GH, hoc eſt GI: igitur KG reliquæ æquales ſunt rectis QN. oſtenſum verò eſt [a] ONC eſſe hyperbolam, igitur & DMM eſt hyperbola, ac proinde etiam BIC, eſt enim rectangulum NGM ad NGM rectangulum hoc eſt rectangulum PGE, ad PGE, vt rectangulum AGC ad AGC rectangulum.

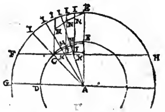
a 196. huius.

PROPOSITIO CCXII.

SIt A centrum circulorum parallelorum BCD, EFG, quos ſecet recta FH orthogona ipſi diametro communi AE. diametri autem AI occurrant FH in KK, & circulis in II, MM: tandem fiant rectis A, KM æquales KL: & lineis A, KI æquales KN quæ diametro AE æquidiſtent.

Dico NN hyperbolam eſſe & quidem parallelam ac æqualem hyperbolæ CLB.

Demonſtratio.



PRæcedenti propoſitione oſtenſum eſt CLB eſſe ad eandem hyperbolam. quia verò A, KI æquales ſunt ex conſtructione rectis KN, & A, KM æquales lineis KL, ablatis æqualibus nimirum KL, à rectis KN, & A, KM, à rectis A, KI remanebunt rectę LN æquales A, MI, ac proinde LN lineæ æquales inter ſe. vnde cùm CLB conſtet eſſe [b] hyperbolam, conſtat quoque NNE eſſe hyperbolam; & quidem ſimilem & æqualem CLB. Quod fuit demonſtrandum.

b 211. huius.

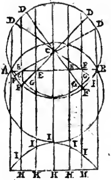
PROPOSITIO CCXIII.

SEcent inuicem æquales circuli in punctis AB: ductamq; AB ſecent diametri DCF in EE: & per EE ponantur æquidiſtantes HE orthogonæ ad AB. fiant denique rectis C, EF æquales EG, & EH æquales diametro DCF: rectis quoque EG, fiant æquales HI.

Dico GG, II eſſe hyperbolas oppoſitas.

Demon-

Demonſtratio.



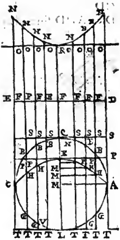
OStenſum eſt propoſitione 202. huius GG, I I eſſe hyperbolas, reſtat igitur vt oſtendamus illas oppoſitas eſſe ſectiones; quoniam EF lineis æquales ponuntur EG vel HI, & DCF æquales EH, rectangula GEI æqualia ſunt rectangulis FED, id eſt AEB; igitur vt AEB ad AEB rectangulum, ita eſt rectangulum GEI ad GEI rectangulum, oppoſitæ igitur ſunt [a] ſectiones GG, II, cum ſint AEB, & HH rectæ lineæ.

a Ex conuerſa 56. huius.

PROPOSITIO CCXIV.

CIrculum ABC contingant AD, CE æquales & parallelæ; coniuncta autem DE diuidatur in FF punctis, per quæ ponantur FG, quę æquidiſtent AD. fiantq; rectangulis BFG æqualia quadrata FH. Dico HH eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.



PRoductis GF, fiant FN æquales FH, & ponantur PN & OR, æquidiſtantes DE, intelligatur inſuper duci quęcunque FKV occurrens circulo in V & Z: quoniam igitur IQ, IK, IL, proportionales ſunt & angulus FIK ex hypotheſi rectus, lineæ FZ, FK, FV [b] proportionales ſunt; vnde ZFV rectangulum, id eſt BFG, æquale eſt quadrato FK id eſt quadrato IK vel FP, id eſt rectangulo SFT vnà cum quadrato FI id eſt SQ, id eſt rectangulo BSG: rectangula igitur BFG id eſt ex hypotheſi, quadrata FH, maiora ſunt rectangulis SFT id eſt quadratis FP: igitur FH quadrata æqualia ſunt quadratis FP vnà cum rectangulis NPH. ſed & FH quadrata, id eſt per hypotheſim rectangula BFG, æqualia oſtenſa ſunt rectangulis SFT vnà cum rectangulis BSG, ablatis igitur æqualibus, nimirum quadratis FP, & rectangulis SFT, manent BSG rectangula, id eſt quadrata SQ, vel PK, æqualia reliquis NPH rectangulis: rectangula igitur NPH id eſt RMK, æqualia ſunt quadratis PK id eſt HM: quare puncta HH ad [c] hyperbolam ſunt, cuius [d] oppoſita eſt NN.

b Pappus lib. 7. propoſ. 159.

c Ex 60. huius.

d 56. huius.

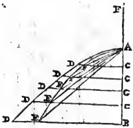
PROPOSITIO CCXV.

SIt AB axis parabolæ AEE, ad quem ordinatim ponantur E, CD æquales rectis AE.

Dico ADD eſſe ad eandem hyperbolam cuius diameter AB; & latus tranſuerſum lateri recto parabolæ datæ æquale.

Demon-

Demonſtratio.



a Ex 8. De parabola.

QVoniam CD æquales ſunt rectis AE, quadratum DC æquale eſt quadratis AC, CE. Fiat igitur recta AF, æqualis recto lateri parabolæ AEE; erit itaque [a] rectangulū FAC æquale quadrato CE. igitur rectangulū FCA, æquale eſt quadrato AC, vnà cum rectangulo FAC hoc eſt quadrato CE. vnde FCA rectangulo æquale eſt quadratum AE, hoc eſt CD quadratum. Igitur rectangulum FCA, ad FCA rectangulum, eandem obtinet rationem, quam quadratum CD ad CD quadratum. Ergo ADD eſt [b] hyperbola cuius diameter eſt AB. latus tranſuerſum verò AF. Quod fuit demonſtrandum.

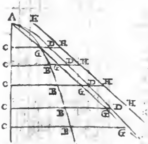
b 1. huius.

PROPOSITIO CCXVI.

LIbet id ipſum aliter demonſtrare. ſit parabolæ ABB axis AC, & ordinatim poſitæ ad eandem CB: fiant verò rectis AB æquales lineæ B, CD.

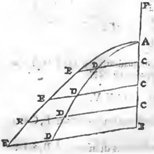
Dico ADD fore ad hyperbolam cuius axis ACC.

Demonſtratio.



SIt AE, lateri recto parabolæ ABB æqualis, & parallela CB; ducaturq; AG quæ rectum angulum EAC bifariam partiatur, cui æquidiſter recta EH ducta per E. Erit itaque rectangulum CAE æquale CB quadrato, hoc eſt erit quadrato CB æquale rectangulum CGH, cum GC & CA, item AE, GH æquales ſint; & conſequenter rectangulo GCH æquale quadratum CD, cùm illud æquale poſitum ſit quadrato AB, hoc eſt quadratis CB & CA hoc eſt CG. igitur cùm ſit GCH rectãgulum ad GCH rectangulum, vt quadratum CD ad CD quadratum, patet ADD hyperbolam eſſe, & rectas CD ordinatim eſſe poſitas ad axem AC. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXVII.



SIt AB diameter ſecundaria parabolę ad quam ordinatim ponantur CD; quadratis autem AC, CD fiant æqualia quadrata CE.

Dico AEE eſſe hyperbolam, cuius latus tranſuerſum ſit latus rectum diametri AB in parabola.

Demonſtratio.

c 8. De parabola.

FIat AF æquale lateri recto diametri AB in parabola ADD. erit itaque quadratū [c] DC æquale FAC rectangulo, & conſequenter rectangulū FCA æquale quadratis AC, CD. hoc

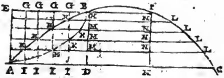
hoc eſt quadrato CE. ergo cùm ſit rectangulum FCA ad FCA, rectangulum vt quadratum CE ad CE, quadratum, manifeſtum eſt AEE hyperbolam eſſe & AF latus eius tranſuerſum. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXVIII.

Sit parabola ABC quam ſecet quædam EF: ductiſque GK quæ æquidiſtent diametro BD, fiat vt GH ad GH, ita GK quadratum ad quadratum GK.

Dico KK eſſe ad eandem hyperbolam cuius latus tranſuerſum BF.

Demonſtratio.



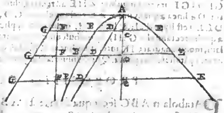
Dvcantur HL quę æquidiſtent BF, & FN quæ æquidiſtet BD. erit itaque HML ad HML rectangulum, [a] vt linea BM ad BM lineam, eſt autem lineę BM æqualis GH. Igitur vt eſt GH ad GH lineam, ita eſt rectangulum HML, vt HML, hoc eſt rectangulum NHM ad NHM, hoc eſt FGB ad FGB rectangulum; ſed vt GH ad GH lineam, ita eſt ex conſtructione quadratum GK ad GK, quadratum; igitur vt eſt FGB, ad FGB rectangulum, ita eſt quadratum GK ad GK quadratum. Quocirca BKK eſt hyperbola cuius latus tranſuerſum eſt BF. ex [illegible] huius. Quod fuit demonſtrandum. [a] 47. De parabola.

PROPOSITIO CCXIX.

Data parabolâ ABB, cuius axis AC & ad eundem conſtitutæ ordinatim BC, ponatur quæuis AD, & quadratis BC, CD, fiant æqualia quadrata CE.

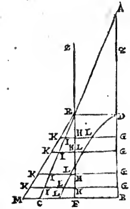
Dico AEE eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.



Fiat rectangulum DCF æquale quadrato CB, igitur quoniam quadratum CB ad CB quadratum, eam obtinet rationem, quam [b] linea AC ad AC, eſtque AC ad AC, vt CD ad CD, igitur CF æquales ſunt inter ſe, & FF puncta in directum: poſita deinde recta GG quæ æquidiſtet AD, erũt GF æquales rectis DC, ac proinde rectangulum DCG, æquale quadratis CD, CB: id eſt ex hypotheſi quadratis CE. ergo vt rectangulum DCG ad DCG, ita quadratum CE ad CE, quadratum. vnde liquet [c] AEE eſſe ad hyperbolã cuius axis AC ad quem ordinatim poſitæ ſunt CE. Quod fuit demonſtrandum. [b] 1. De parabola. [c] 191. huius.

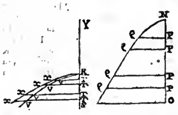
PROPOSITIO CCXX.



VErùm præcedentem propoſitionẽ vniuerſalius placet proponere. Triangulo A B C inſcribatur quodlibet parallelogrammum D E F. Deinde ponatur quæuis recta linea ex puncto E, ſcilicet E M, & ductis G K quæ æquidiſtent B F, fiat rectangulis G H I vnà cum quadrato, I K æquale quadratum G L. Dico D L L eſſe hyperbolam.

Demonſtratio.

a 194. De parabola.



b Ibid. & ex 1. de parabola.

FIat rectæ E F æqualis N O quę ſit diuiſa in P P vt eſt diuiſa E F in punctis H H. fiant quoque rectangulis G H I æqualia P Q quadrata, erit N O Q [a] parabola: aſſumptâ denique rectâ R S quæ æqualis ſit C M, diuidatur R S in T T, vt eſt diuiſa E F vel N O in punctis P P, erunt rectis I K æquales rectæ R T, cum ſit F E ad E H, vt C M ad S K; ſed vt F E ad E H, ita eſt ex conſtr. S R ad R T, igitur S R eſt ad R T, vt C M ad I K: æquales igitur ſunt R T & I K, cùm S R, C M æquales poſitæ ſint, itaque rectis P Q, fiant æquales T V, etiam R T V parabola erit, [b] cùm ſit R T ad R T, vt N P ad N P. tandem ſi fiant rectis R V æquales V T X, [c] erit R X X hyperbola. igitur rectangulum G H I hoc eſt quadratum T V vnà cum quadrato I K, hoc eſt

c 215. huius.

R T producet hyperbolam. ſit itaque recta Y R latus tranſuerſum hyperbolę R X X, & fiat vt R S ad R Y, ita E F ad E Z. Dico rectas G L æquales rectis T X cùm earum quadrata æqualia ſint, etiam eſſe ad hyperbolam cuius diameter D B, eſſeque G L, G L ordinatim ad D B poſitas. Erit enim vt Y T R rectangulum ad rectangulum Y T R hoc eſt vt quadratum X T ad quadratum X T, hoc eſt vt quadratum G L ad G L, ita rectangulum Z H E ad rectangulum Z H E, hoc eſt, ſi intelligatur D α linea æqualis lineæ Z E, rectangulum α G D, ad rectangulum α G D. itaq;

d 7. huius.

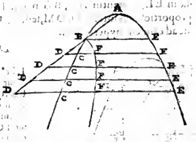
D L L [d] eſt hyperbola, & linea G L ordinatim applicata ad D G. Hinc quadrata æqualia reetangulis G H I, & quibuſcumque quadratis I K producent hyperbolam, modò quadrata I K inter duas lineas C E, M E quemcumque angulum continentia parallela ſint poſita. Quod vniuerſaliter placuit demonſtrare.

PROPOSITIO CCXXI.

PArabolam A B C ſecet quædam recta A B, ductis deinde parallelis C E fiant rectangulis C D E æqualia quadrata D F. Dico B F F eſſe ad eandem hyperbolam cuius A D B diameter eſt.

Demon-

Demonſtratio.

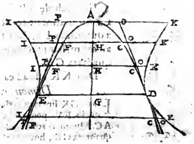


OStenſum eſt rectangulum BDA ad BDA, rectangulum eandem habere rationem, quam rectangulum CDE ad CDE rectangulum: ſed quadratum DF eſt ad DF, quadratum vt rectangulum CDE ad CDE, rectangulum; igitur etiam quadratum DF ad DF, quadratum rationem continet eandem cum ratione rectanguli ADB ad ADB, rectangulum, eſt itaque BFF hyperbola. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXII.

POnatur AB, axis parabolæ DAE ad quem ordinatim poſitis CF, ex puncto quouis axeos G, fiant rectis GF, æquales F,HI, & F,HK. Dico KK, II eſſe hyperbolas oppoſitas.

Demonſtratio.



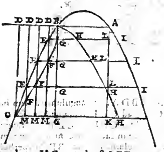
POnatur ex G quæuis GC, occurrens AL contingenti in L, & IK lineis in N: ducta autem per G, linea DE parallela CF, ponantur per D & E, lineæ DO, EP contingentes parabolam: quoniam igitur GC vel GF quadratis, æqualia ſunt quadrata KH, vel HI; ſint autem HK quadratis æqualia quadrata CH, vnà cum rectangulis KCI; quadratis verò GC æqualia ſint quadrata CH, HG: demptis communibus quadratis CH, æqualia remanent rectangula KCI, quadratis HG: igitur vt HG quadratum ad quadratum HG, id eſt OD quadratum ad quadratum OD, ſic KCI, rectangulum ad rectangulum KCI. quia verò OD, EP contingunt parabolam, vt OD [a] quadratum ad quadratum OD, ſic OCP rectangulum eſt ad rectangulum OCP, reliquum igitur KOI rectangulum ad KOI, eſt vt quadratum OD, ad quadratum OD. quare [b] oppoſitæ ſectiones ſunt KK, II.

a 47. De parabola.
b Ex 34. huius.

PROPOSITIO CCXXIII.

PArabolam ABC ſecet AB, & poſitis DM axi parallelis quæ occurrant parabolæ in EE; ponantur AK, BG parallelæ diametris. fiant tandem mediæ proportionales inter ED, DM, ſcilicet DF.

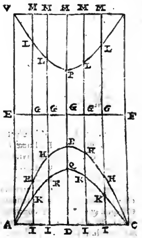
Dico BFC eſſe ad eandem hyperbolam.



Demonſtratio.

PEr puncta EE ducantur parallelæ EI ipſi BA, quæ lineam BG ductam ex B parallelam axi ſecent in G, G. fiantq; inter IG, GE mediæ proportionales HG. erit hæc parabola prout lib. de parabola 275, demonſtratū eſt; igitur vt quadratum GH ad GH, quadratum, ita eſt BG linea ad lineam BG. ſed quadrato HG æquale eſt IGE rectangulum, hoc eſt LEG, hoc eſt ADB: igitur vt ADB rectangulum ad rectangulum ADB, ita eſt BG linea ad lineam BG. hoc eſt DE recta ad rectam DE: ſed vt DE ad DE, ita rectangulum EDM ad EDM rectangulum; igitur BDA rectangulum eſt ad rectangulum BDA, vt eſt EDM rectangulum ad rectangulum EDM. eſt autem EDM rectangulo æquale quadratum DF, ex ipſa conſtructione; igitur vt BDA ad BDA, rectangulum, ita eſt quadratum DF ad DF quadratum. Quare liquet BFC eſſe hyperbolam cuius diameter AB eſt tranſuerſa. Quod oportuit demonſtrare.

PROPOSITIO CCXXIV.



SIt parabolę ABC axis BD ad quem ordinatim ſit conſtituta AC, cui ſit æquidiſtans EF, ductiſque GI parallelis ad axem, fiant rectangulis HGI æqualia quadrata GK.

Dico KK eſſe ad eandem hyperbolā.

Demonſtratio.

FIant GK lineis æquales GL, & AE æqualis EV; ponaturque VM æquidiſtans AC. Quoniam rectangulis HGI æqualia ſunt quadrata GK, hoc eſt rectangula LGK., & quadratum GI, æquatur [a] rectangulis HGI & GIH ſimul ſumptis; & idem quadratum GI hoc eſt rectangula MGI æquentur quadratis GK, & rectangulis MKI id eſt MLI, igitur rectangula MLI, hoc eſt LIK, æqualia ſunt rectangulis GIH. eſt autem HI, linea ad lineam HI, vt [b] rectangulum AIC ad AIC, rectangulum, igitur etiam MKI rectaogulum eſt ad rectangulum MKI vt AIC, rectangulum ad rectangulum AIC; puncta [c] ergo KK ſunt ad hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum.

[a] Per elementa.

[b] 47. De parabola.

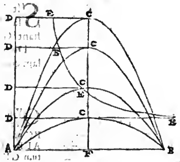
[c] Ex conuerſa 16. huius.

PRO-

PROPOSITIO CCXXV.

SVper rectâ AB conſtituantur quotuis parabolæ ACB, ad eundem axem CF: erectâ deinde AD quę æquidiſtet CF ponantur C, DE æquales lateribus rectis ſingularum parabolarum.

Dico EE puncta eſſe ad eandem hyperbolam cuius aſymptoti AD, AB.



Demonſtratio.

REctangulum enim CF, DE, æquale eſt ſemper eidem [a] quadrato AF; vnde omnia rectangula ADE inter ſe ſunt æqualia. quare EE puncta ſunt ad eandem [b] hyperbolam, cuius aſymptoti ſunt AD, AB. Quod fuit demonſtrandum.

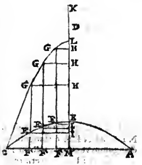
[a] 8. De parabola.
[b] Ex conuerſa 46. huius.

PROPOSITIO CCXXVI.

HYperbolæ ABC ſit diameter tranſuerſa BD ductaq; AC ordinatim ad DB, ſint illis parallelę FE. Fiant autem FG ad FG, vt ſunt FE ad FE.

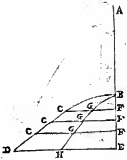
Dico GG eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.



FIat vt EF ad FG, ita BD diameter tranſuerſa hyperbolę ABC ad LK. & ponantur EI, & GH quæ æquidiſtent AC. quoniam EF ad FE eam rationem habent quam MB ad ML, erit quoque MI ad MB, vt MH ad ML. ac proinde vt MI ad IB, ita MH ad HL. & conſequenter vt MI ad MH, ita IB ad HL. ſed MI eſt ad MH hoc eſt FE ad FG, vt BD ad LK, ex conſtructione: igitur vt IB ad HL, ita eſt BD ad LK. ergo rectangulum DIB eſt ad rectangulum DIB, vt eſt rectangulum KHL ad KHL, rectangulum. nam rectangulum BID ad BID, rectangulum habet rationem compoſitam ex ratione BI ad BI, hoc eſt LH ad LH; & ex ratione DI ad DI, hoc eſt KH ad KH. eſt autem quadratum IE, ad IE quadratum vt rectangulum DIB ad DIB rectangulum, quoniam ſupponitur DB tranſuerſa diameter hyperbolæ ABC: igitur etiam rectangulum KHL ad KHL, rectangulum eſt vt quadratum IE ad IE, quadratum, hoc eſt quadratum HL ad HL, quocirca LGG, eſt hyperbola. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXVII.



SIt AB diameter tranſuerſa hyperbolæ BCD: ductiſque ordinatim CF, fiant GF ad FG, vt CF ad FC.

Dico BGG eſſe ad eandem hyperbolam cuius tranſuerſum latus eſt AB.

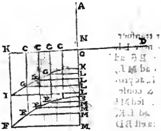
Demonſtratio.

QVoniam ex ſuppoſitione AB eſt diameter tranſuerſa hyperbolæ BCD, igitur vt eſt FC ad ED, quadratum, ita eſt rectangulum AFB, ad AEB rectangulum. ergo vt quadratum GF ad HE quadratum, ita quoque eſt AFB rectangulum ad rectangulum AEB. igitur BGH hyperbola eſt cuius latus tranſuerſum eſt AB. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CCXXVIII.

SInt AB, CD diametri coniugatæ hyperbolæ BEF & diametro AB fiant æquidiſtantes CE. Deinde fiat vt CE ad HF, ita CG ad HI. Dico IGG eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.



FIat rectæ OK æqualis ON: & ponantur GL, IL parallelæ CD, quemadmodum etiam EM & FM. quoniam BEF ponitur hyperbola cuius tranſuerſa diameter AB, erit AMB ad AMB, rectangulum vt eſt quadratum EM ad FM quadratum, hoc eſt vt quadratum GL ad IL quadratum. eſt autem CE ad OB, vt CG ad OK; igitur eſt OL ad OK, vt OM ad OB: & OK ad KL, vt OB ad BM; & NK ad KL, vt AB ad BM; denique & NL ad LK, vt AM ad MB. quare rectangulum AMB ad AMB, rectangulum eſt vt rectangulum NLK ad NLK rectangulum. quare cùm ſit rectangulum AMB ad AMB, rectangulum vt eſt quadratum EM ad FM, quadratum, hoc eſt GL quadratum ad quadratum IL, etiam erit rectangulum NLK ad NLK, rectangulum vt quadratum GL ad IL quadratum. igitur manifeſtum eſt KGI eſſe ad eandem hyperbolam cuius diameter tranſuerſa eſt NK. Quod fuit demonſtrandum.

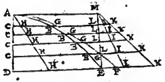
PROPOSITIO CCXXIX.

SIt hyperbola ABB, cuius axis AD: ductiſq; ad eandem ordinatim rectis BC, fiant lineis AB æquales lineæ B, CG.

Dico AGF eſſe ad eandem hyperbolam cuius axis eſt AD.

Demon-

Demonſtratio.



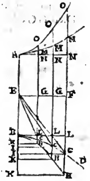
DVcatur linea AH ſecās lineam BC, ſic vt HC, CA ſint æquales; & ſiant tres quantitates in continua analogia CH, CB, CI: erit II linea recta per conuerſam propoſit. 75. huius. Fiant prætereà rectis CH æquales IK: erunt igitur rectangula HCK æqualia quadratis CG. igitur AGG eſt hyperbola, quod ita patebit. ponatur ML æquidiſtans AD. Igitur per 192. huius ſi ſiant quadrata CG æqualia rectangulo HCL, vnà cum rectangulo HCLK, erit GG hyperbola: ſed quadratum HC vnà cum quadrato CB, æquale eſt rectangulo HCI. vnà cum quadrato KI, vel HC. igitur AGF ſunt ad eandem hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXX.

SIt AB axis hyperbolæ BCD, cuius E centrum, & axis coniugatus FE, è centro verò E ductis diametris EC ponantur C, GH, æquales EC, & axi parallelæ.

Dico BHH fore hyperbolam.

Demonſtratio.



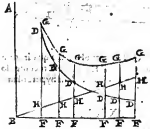
POnatur ordinatim CI & HK. quoniam BCD hyperbola eſt erit AIB ad AIB, rectangulum vt quadratum CI ad CI quadratum. poſita itaque BL, quæ æquidiſtet EF, & hyperbola oppoſita AMM: erit rectangulum MLC ad MLC, vt quadratum LB ad LB, hoc eſt CI ad CI, quadratum. Sed quadratum EC æquale eſt quadratis EI & CI, hoc eſt quadrato EB & rectangulo AIB, vnà cum quadrato CI: eſt autem quadratum GH illis ipſis æquale; igitur ablato communi quadrato GL remanet LHN, æquale rectangulo AIB vnà cum quadrato CI. erit ergo rectangulum HCO æquale quadrato CI, quoniam rectangulo AIB æquatur MNC rectangulum. quia verò eſt vt CI quadratum ad CI quadratum, ita rectangulum AIB ad AIB, hoc eſt MNC ad MNC, erit quoque rectangulum OMH ad OMH, vt rectangulum MNC ad MNC, rectangulum; ergo etiam rectangulum ONH ad ONH, hoc eſt AKB ad AKB, eandem rationem habet quam quadratum CI ad CI, hoc eſt HK ad HK, quadratum. patet igitur BHH eſſe ad eandem hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum. a 7. huius.

PRO-

PROPOSITIO CCXXXI.

SInt AB, BC aſymptoti hyperbolæ DD. ductâ verò BH, ponantur FG æquidiſtantes aſymptoto AB: fiant præterea rectis FD æquales HG.

Dico GG hyperbolam eſſe habentem AB, BH aſymptotos.



Demonſtratio.

PAtet demonſtratio ex eo quod quemadmodum omnia parallelogramma BFD ſunt inter ſe æqualia, ſic quoque æquantur inter ſe parallelogramma BHG. Igitur cùm ex eo ſit DD hyperbola habens aſymptotos AB, BC; etiam eadem de cauſa GG hyperbola futura[a] eſt habens aſymptotos AB, BH. Quod fuit demonſtrandum.

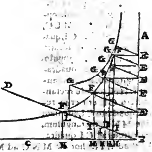
a Ex conuerſa 46. huius.

PROPOSITIO CCXXXII.

POnantur AB, BC aſymptoti hyperbolæ FF & aſymptoto BC æquidiſtent EF. Ducta verò quauis diametro BD, fiant EG illi parallelæ æqualeſque lineis EF.

Dico GG eſſe hyperbolam cuius aſymptoti AB, BD.

Demonſtratio.



DVctis etenim parallelis AB aſymptoto rectis FH & GI, erunt omnia parallelogramma EFH, æqualia[b] inter ſe; quemadmodum etiam parallelogramma EGI, igitur GG hyperbola eſt inter aſymptotos[c] AB, BD conſtituta. Quod fuit demonſtrandum.

b 46. huius.
c Ex conuerſa eiuſdem.

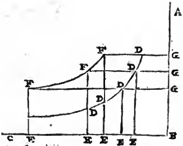
PROPOSITIO CCXXXIII.

SInt AB, BC aſymptoti hyperbolæ DD; poſitiſq; DE parallelis aſymptoto AB, fiant FE ad FE, in eadem ratione cum rectis DE ad DE.

Dico

Dico FF eſſe ad hyperbolam cuius aſymptoti ſunt AB, BC.

Demonſtratio.

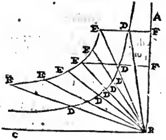


QVoniam DD hyperbola aſymptotos habet rectas AB,BC; & rectæ DE aſymptoto AB æquidiſtant, igitur parallelogramma GDE æqualia ſunt inter ſe ſunt autem parallelogramma GFE ſimiliter inter ſe æqualia cùm ſint compoſita ex iiſdem rationibus ex quibus parallelogramma GDE ſunt compoſita, igitur etiam ſunt FF, [a] ad eandem hyperbolam cuius aſymptoti ſunt AB, BC. Quod fuit demonſtrandum. a Ex 48. huius.

PROPOSITIO CCXXXIV.

Sint AB, BC denuo aſymptoti hyperbolæ DD: ductis inſuper diametris BD fiant BE ad BE, in eadem ratione cum lineis BD ad BD. Dico EE eſſe ad eandem hyperbolam cuius aſymptoti ſunt AB, BC.

Demonſtratio.



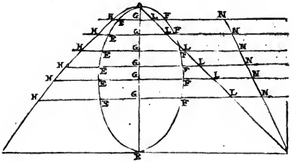
POnantur enim lineæ EF,DF quæ aſymptoto BC æquidiſtent: erit itaque triangulum EFB ad EFB, triangulum vt eſt triangulum DFB, ad DFB triangulum, cùm ſint figuræ ſimiles, ac proinde in duplicata ratione laterum homologorum. Igitur patet etiam EE eſſe [b] hyperbolam quæ aſymptotos AB, BC communes habet cum hyperbola DD. Quod fuit demonſtrandum. b Ex eadem.

PROPOSITIO CCXXXV.

Sint ellipſeos extremæ diametri AB maior, minor CD, poſitis autem EF ordinatim ad axem AB, fiant rectis AE, æquales F,GH. Dico AHH eſſe hyperbolam cuius diameter AB.

Digitized by Google

Demonſtratio.



a Ex 150. de ellipſ.

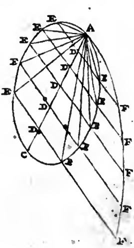
b Ex 192. huius.

Flat ipſi A B æqualis B L, ductaque A L lineas G N ſecans in punctis L, fiant quadratis G F æqualia rectangula G L N, erunt N N L in [a] recta lineâ; igitur cùm rectangula N L G, æqualia ſint quadratis G F, addito quadrato A G, hoc eſt G L totum rectangulum N G L, æquale erit quadratis A G, G F, hoc eſt quadrato A F, hoc eſt G H quadrato. igitur cùm G H media proportionalis ſit inter N G, & G L, ad [b] hyperbolam erunt A H H. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

EX conſtructione facile patet, hyperbolam H H ortam ex translatione linearum A E, ordinatim poſitarum ad axem ellipſeos, latus tranſuerſum habere æquale axi ellipſeos A B.

PROPOSITIO CCXXXVI.



SIt ellipſeos A B C diameter A C non axis nec vna ex coniugatis æqualibus; ſed intra illas & axem ſita ſit, ordinatim autē ad illam poſitis B E fiant quadratis rectarum A E, A B ſimul ſumptis æqualia quadrata D F.

Dico A F F fore ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.

SVnt enim quadrata rectarum A E, A B ſimul ſumpta æqualia quadratis A D, B D bis ſumptis, ſed A D, D B quadrata, tranſlata in quadrata D F, producunt hyperbolam, vti ex præcedenti conſtat; igitur A F F ad hyperbolam ſunt. Quod fuit demonſtrandum.

Scholion.

PRimò aſſumpſi in propoſitione, A C *diametrum quæ inter axem maiorem & diametros coniugatas æquales ſita eſt: quia tunc quadrata ordinatim poſitarum, pu-*

ta

ta BD *minora ſunt rectangulis* ADC; *adeoq́, illa reduci poſſunt ad ellipſim quæ axem habet æqualem* AC, *& ordinatim ad illarum poſitas* BD: *in quo caſu cùm oſtenſum ſit propoſit. præcedenti, quadratum* AB, *ſiue quadrata* AD, DB *translata in* B, DF *quadratum, producere hyperbolam; patet idem quoque accidere in obliquis diametris.*

Secundò dum AC *vna è diametris coniugatis æqualibus eſt; quadrata* AD, DB *translata in* B, DF *quadrata, producunt parabolam, vti 333. de parab. demonſtrauimus.*

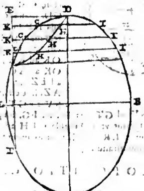
Tertiò ſi AC *verò axis minor fuerit, quadrata* AB, *ſiue quadrata* AD, DB *ſimul ſumpta & translata in* DF *quadrata producunt ellipſim.*

PROPOSITIO CCXXXVII.

SIt AB axis ellipſeos ACB: quem orthogonaliter ſecet EF ſitq́; ED ellipſim contingens æquidiſtans axi: denique poſitis KH quæ rectæ AB ſint parallelę, fiant rectangulis CKI æqualia KH quadrata.

Dico HHD eſſe ad eandem hyperbolam cuius axis FE.

Demonſtratio.



EST enim rectangulum FEL ad FKL, ſicut [a] rectangulum DED ad CKI rectangulum igitur quadratum ED ad KH, eam habent rationem quam rectangulum FEL & FKL, igitur LHD eſt hyperbola cuius latus tranſuerſum LF. Quod fuit demonſtrandum.

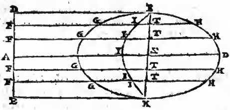
[a] Ex 99. de ellipſ.

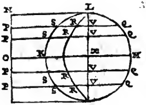
PROPOSITIO CCXXXVIII.

COntingat ellipſim recta AB axi CD parallela, quam orthogonaliter ſecet AB: fiant autem rectangulis GFH, æqualia quadrata FI.

Dico BII eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.





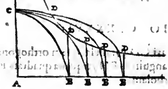
POnatur quicunque circulus KLM quem contingat NL & recta NO normalis ad OM parallelam NL, diſpeſcat rectam OM ſecundùm rationem AC ad CD. diuiſa deinde NO in PP, vt eſt diuiſa DE in F fiant quadrata PR æqualia rectangulis SPQ, oſtẽdimus puncta LRR eſſe ad eandem hyperbolam, quia verò eſt OK ad KX, vt AC ad CZ, erit quoque OK ad AC, vt KX ad CZ, hoc eſt OX ad EZ; & vt KX ad CZ, ita OX ad AZ, hoc eſt PV ad FT, ita quoque eſt SV ad GT, vt demonſtratum eſt libro

a 114. huius. de ellipſi. Igitur vt SV ad GT, ita PS ad FG. itaque rectangula GFH ſimilia rectangulis SPQ; igitur vt rectangula GFH ad SPQ, ita quadrata FI ad PR quadrata. ſunt autem LRR a ad hyperbolam: igitur etiam BII ſunt ad hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXXIX.

SInt AB, AC ſemiaxes ellipſeon CAB; ſic vt AB prima æqualis ſit AC, & ex B rectæ erigantur BD, parallelæ AC, æquales autem lateribus rectis ellipſeon.

Dico puncta DD eſſe ad hyperbolam cuius aſymptoti ſunt AC, AB.



Demonſtratio.

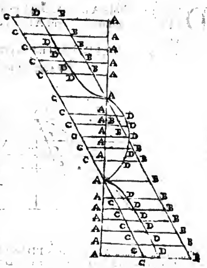
QVoniam BD, lateribus rectis ellipſeon æquales ſunt, rectangula ABD ſingula æqualia ſunt b quadrato AC adeoque & inter ſe. vnde puncta DD ad hyperbolam ſunt, cuius aſymptoti AC, AB.

b 11. De ellipſ.

PRO-

PROPOSITIO CCXL.

PRopoſitum ſit vna eademque praxi tres coni ſectiones deſcribere.



Conſtructio & demonſtratio.

POſita A A linea, ſecetur rectis BB, CC parallelis; inter rectas verò A B, B C in prima figura mediæ ponantur B D. In ſecunda verò & tertia inter A B, A C, mediæ ponantur A D parallelæ inter ſe. Dico in prima figura [a] parabolam oriri, in ſecunda [b] ellipſim, aut circulum, in tertia denique [c] hyperbolam. quarum demonſtrationes ſuis locis cùm expoſitæ ſint fruſtra repetendas cenſeo.

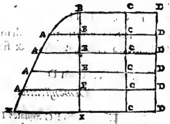
a Ex 193. de parabolam.
b 150. De ellipſ.
c 150. hyperb.

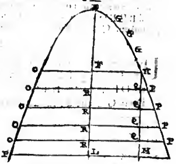
PROPOSITIO CCXLI.

DAta ſit parabola A B & ei in directum adiungatur quadratum aut rectangulum B C, vel B D: ponantur autẽ ad axem B B ordinatim A B, pertingentes ad latera rectanguli.

Dico B C quadrata addita quadratis A B, producere parabolam.

Demonſtratio.





POnatur E G parabola cuius axis E F, æqualis parabolæ A B B id eſt habens latus rectum axeos æquale lateri recto axeos B B, & I B, æqualis ſumatur F N quæ in E G parabola ordinatim [d] applicetur ad axem E F ſumptaque F L æquali I C C, ponantur F, N O, & N, Q M æquidiſtantes K L, F E: erit igitur N L rectangulum æquale rectangulo B C & R Q quadrata æqualia quadratis B C. vlterius ſi inter P Q, Q O mediæ poni intelligantur, producent illæ parabolam æqualem E G G, id eſt A B B: hoc eſt parabolam producent habentem ad axem latus rectum æquale lateri recto axeos B B; rectangula igitur P Q O parabolam producunt A B B. ſed P Q O rectangula vnà cum quadratis Q R, quadrata producunt P R quæ ordinatim poſita ſunt in parabola E G G ad axem E F; quadrata igitur A B, vnà cum quadratis B C parabolam producunt E G P. Quod erat demonſtrandum.

d Per 5. de parabola.

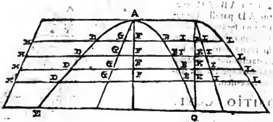
Idem eſt ſi hyperbolæ adiungatur quadratum aut rectangulum.

PROPOSITIO CCXLII.

Data ſit parabola ABC, & eiuſdem altitudinis hyperbola ADE, habentes communem axem AF, ad quem ordinatim poſitæ ſint FB, FD.

Dico quadrata BF, FD ſimul ſumpta producere hyperbolam.

Demonſtratio.



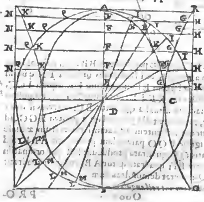
a Ex conuerſa 192. huius.
b Ex 293. de parabola.

Ponatur ex A linea AG occurrens FD lineis in GG, & AG parallela HH, vt FGH rectangula æqualia ſint quadratis FD: patet [a] HH eſſe in directum. fiant iterum FB quadratis æqualia rectangula GFI: conſtat [b] quoque II eſſe rectam lineam. deinde IK rectæ æquales fiant FG; patet & KK eſſe rectam lineam, rectangula igitur IKF æqualia ſunt quadratis BF. & IKFH rectangula æqualia quadratis FD: vnde IKH rectangula æquantur quadratis BF, FD. ſi autem IKH, rectangulis æqualia ponantur quadrata KL, puncta KLL ad hyperbolam ſunt, igitur ſi BF, FD quadratis æqualia ponantur quadrata, patet illa quoque eſſe ad hyperbolam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXLIII.

Ponatur ellipſeos axis maior AB, ex centro D, poſitis quotuis diametris DE, fiant EF parallelæ DC diametro coniugatæ AB; & fiant rectis DE, æquales E, FG.

Dico GG eſſe ad eandem hyperbolam cuius centrum D.



Demonſtratio.

c Ex elementis.

Fiant rectis FG æquales FK, & deſcribatur circulus ſuper axe AB, & perficiatur quadratum NH, erit itaque rectangulum IEL ad IEL, rectangulum quemadmodum eſt [c] rectangulum QEP ad QEP, rectangulum hoc eſt vt quadratum FE ad FE quadratum. vnde vt eſt FE quadratum ad quadratum FE, ita ſimiliter eſt HGN rectangulum ad rectangulū HGN cùm ex conſtructione DE ſint æquales FG vel FK; & DI æquales FH vel FN, eſt autem quadratum

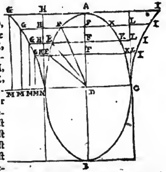
quadratum FE ad FE, quadratum vt rectangulum [a] AFB, ad AFB rectangulum, hoc eſt RHO ad RHO: igitur GHK rectangulum eſt ad rectangulum GHK, vt rectangulum RHO ad RHO rectangulum. ergo GG, KK ſunt ſectiones [b] oppoſitæ habentes centrum D. Quod fuit demonſtrandum.

[a] 4. De ellipſi.
[b] Ex 36. huius.

PROPOSITIO CCXLIV.

LVbet propoſitionem præcedentem nonnihil aliter demonſtrare.

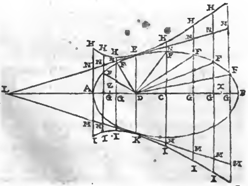
Demonſtratio.



SIt itaque ellipſis ABC cuius centrum D, axis maior AB, minor DC: cui parallelæ ponantur FH; & rectis DE fiant æquales E, FG, & E, FI. Dico GG, II eſſe oppoſitas ſectiones, quarum centrum D: ponantur HH, LC axi parallelæ: erit itaque quadratum DE, æquale quadratis EF, FD, igitur etiam quadratum FG iiſdem æquabitur: ablato igitur communi quadrato EF, remanebit rectangulum GEI, æquale FD quadrato. vnde vt eſt FD quadratum ad FD quadratum, hoc eſt quadratum GM ad GM quadratum, ita eſt rectangulum GEI ad GEI rectangulum, eſt autem & HEL rectangulum ad HEL, rectangulum id eſt EHK ad EHK, vt quadratum FD ad FD, quadratum ſiue HN ad HN quadratum, igitur & GHI rectangulum reliquum ad rectangulum GHI eſt, vt quadratum FD ad FD quadratum; (nam GEI rectangulum æquatur rectangulis GHI, & HEL) igitur vt rectangulum GHI ad GHI, ita FD quadratum ad quadratum FD, id eſt HN ad HN quadratum; quare GG, II ſunt [c] oppoſitæ ſectiones, quarum centrum eſt D punctum. Quod fuit demonſtrandum.

[c] Ex conuerſa 36. huius.

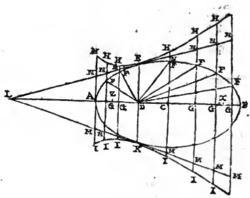
PROPOSITIO CCXLV.



POnatur AB axis maior ellipſeos, cuius centrum C: aſſumpto verò puncto quodam D in axe AB, quod inter centrum C & punctum foci conſtitutum ſit, ducantur ex eo rectæ DF. ex punctis quoque FF ponãtur FG, ordinatim ad axem AB. fiant autẽ rectis DF, æquales F, GH, GI. Dico puncta HH, II eſſe ad hyperbolas oppoſitas.

Demon-

Demonſtratio.



ACta per D recta EK normali ad AB, ponantur per E & K cõtingentes ellipſim, rectæ EL, KL, occurrentes rectis GH, in N & M: conuenient igitur EL, KL
a 54. De ellipſi. in puncto a quodam L, quod in AB producta eſt, quoniam rectis DF æquales poſitæ ſunt F, GH, & F, GI, igitur quadrata FG, GD æqualia ſunt quadratis HG, hoc eſt reetangulis HFI, vnà cum quadratis FG. vnde ablatò communi quadrato FG, remanet HFI reetangulum æquale quadrato GD: quare vt eſt quadratum GD, ad GD quadratum id eſt NE quadratum ad quadratum NE, ſic reetangulum HFI ad HFI, rectangulum, eſt autem oſtenſum NFM, rectangulum eſſe ad rectangulum NFM vt NE, quadratum ad quadratum NE: reſiduum igitur rectangulum HNI ad HNI eſt, vt quadratum NE ad NE quadratum. igitur per conuerſam 36. huius erunt HH, II ſectiones oppoſitæ. Quod demonſtrandum fuit.

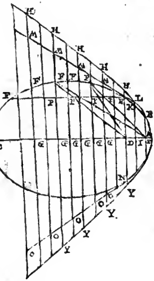
PROPOSITIO CCXLVI.

SIt ellipſeos ABC, focus D; aſſumpto autem in axe puncto E inter focum & verticem ellipſeos A, ducantur ex E ad perimetrum ellipſeos quotcunque EF, & per F rectæ ponantur F, GH, normales ad AC & æquales EF.

Dico BHH, eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.

EX foco D, erigatur ordinatim ad axem DFN & per F & N, contingentes ponantur FM, NO. diuiſa deinde bifatiam ED in I, ponatur IK parallela DF, occurrens contingenti FM in L. quoniam igitur D focus eſt ellipſeos, &
b 139. De ellipſi. IK, EB normales ad AC, rectæ DK æqualis b eſt IL, prout contingenti occurrit: ſed DK rectæ æqualis eſt EK, (quia ED in I biſſecta eſt) rectæ igitur EK, IL æquales ſunt: ſed per hypotheſim rectæ EK æqualis eſt IL, prout occurrit figuræ ABH. punctum igitur L communis interſectio eſt figuræ BHH & lineam IK, FM: fiant deinde GH lineis, æquales GY: erunt igitur HG quadrata æqualia quadratis MG, vnà cum rectangulis HMY: quia verò rectę EF, per hypotheſim æquales ſunt GH, & DF æquales ipſis GM, quadrata EF, DF æqualia ſunt quadratis



tis H G, M G : adeoque E F quadrata erant quadrata M G id eſt D F, re- ngulis H M Y. ſed E F quadrata quo- : ſuperant quadrata D F rectangulo)G bis ſumpto [a] vnà cũ quadrato E D; tangula igitur E D G bis ſumpta vnà n quadrato E D, æqualia ſunt rectan- is H M Y: rurſum ſi E D G rectan- is æqualia fiant quadrata, [b] producent parabolam, & ſi parabolę illi adda- E D quadratum; producet [c] illud vnà n parabola, parabolam; igitur & M Y rectangulis ſi æqualia fiant qua- ıta, producent illa parabolam. ſimiliter P O rectangulis æqualia fiant quadra- producent [d] illa hyperbolam; quæ lita parabolæ, quam H M Y produ- ; generabit [e] hyperbolam; igitur ſi 'Y rectangulis, (quę æqualia ſunt M Y, M P O) æqualia fiant quadrata, producent illa quoque hyperbolam: cui ſi addantur quadrata P G, producent illa ſimul [f] cum hyperbola, hyperbolam. ſed H P Y rectãgulis vnà cum quadratis P G, æqualia ſunt quadrata H G, id eſt E F, quadrata igitur E F hyperbolam produ- cunt cuius ordinatim ad axem poſitæ ſunt E F, id eſt G H : hyperbola igitur eſt H H, Y Y.

a Ex elementis.

b 293. De parabola.

c 241. huius

d 192. huius.

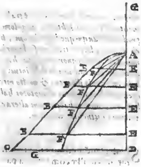
e 241. huius.

f Ibidem.

PROPOSITIO CCXLVII.

HYperbolam A B C cuius axis A D communis eſt parabolæ ex qua orta eſt, reducere ad parabolam.

Conſtructio & demonſtratio.



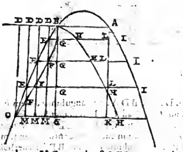
POſitis ad axem A D in hyperbola ordinatim lineis B E; fiant E B lineis æquales A F. dico A F F eſſe parabolam quę produxit hyperbolam A B C : ponatur A G latus tranſuerſum hyperbolæ; quoniam igitur A B C hyperbola orta ex parabola communem cum illa habet axem, rectangula G E A æqualia ſunt quadratis B E, id eſt per conſtruct. quadratis A F, id eſt quadratis A E, E F: ablatis igitur communibus quadratis A E, manent G A E rectangula æqualia quadratis E F: vnde vt A E ad A E, ſic F E quadratum ad quadratum F E: parabola eſt igitur A F F, & eadem ex qua orta eſt hyperbola A B C.

PROPOSITIO CCXXIII.

PArabolam A B C ſecet A B, & poſitis D M axi parallelis quæ occurrant parabolæ in E E; ponantur A K, B G parallelæ diametris. fiant tandem mediæ proportionales inter E D, D M, ſcilicet D F.

Dico B F C eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.

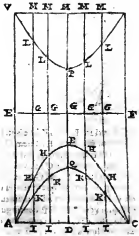


PEr puncta E E ducantur parallelæ E I ipſi B A, quæ lineam B G ductam ex B parallelam axi ſecent in G, G. fiantq; inter I G, G E mediæ proportionales H G. erit hæc parabola prout lib. de parabola 275, demonſtratū eſt; igitur vt quadratum G H ad G H, quadratum, ita eſt B G linea ad lineam B G. ſed quadrato H G æquale eſt I G E rectangulum, hoc eſt L E G, hoc eſt A D B. igitur vt A D B rectangulum ad rectangulum A D B, ita eſt B G linea ad lineam B G. hoc eſt D E recta ad rectam D E: ſed vt D E ad D E, ita rectangulum E D M ad E D M rectangulum; igitur B D A rectangulum eſt ad rectangulum B D A, vt eſt E D M rectangulum ad rectangulum E D M. eſt autem E D M rectangulo æquale quadratum D F, ex ipſa conſtructione; igitur vt B D A ad B D A, rectangulum, ita eſt quadratum D F ad D F quadratum. Quare liquet B F C eſſe hyperbolam cuius diameter A B eſt tranſuerſa. Quod oportuit demonſtrare.

PROPOSITIO CCXXIV.

SIt parabolę A B C axis B D ad quem ordinatim ſit conſtituta A C, cui ſit æquidiſtans E F, ductiſque G I parallelis ad axem, fiant rectangulis H G I æqualia quadrata G K.

Dico K K eſſe ad eandem hyperbolã.



Demonſtratio.

FIant G K lineis æquales G L, & A E æqualis E V; ponatúrque V M æquidiſtans A C. Quoniam rectangulis H G I æqualia ſunt quadrata G K, hoc eſt rectangula L G K, & quadratum G I, æquatur [a] rectangulis H G I & G I H ſimul ſumptis; & idem quadratum G I hoo eſt rectangula M G I æquentur quadratis G K, & rectangulis M K I id eſt M L I, igitur rectangula M L I, hoc eſt L I K, æqualia ſunt rectangulis G I H. eſt autem H I, linea ad lineam H I, vt [b] rectangulum A I C ad A I C, rectangulum, igitur etiam M K I rectaogulum eſt ad rectangulum M K I vt A I C, rectangulum ad rectangulum A I C; puncta [c] ergo K K ſunt ad hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum.

[a] *Per elementa.*

[b] *47. De parabola.*

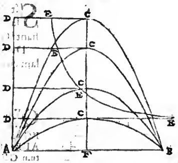
[c] *Ex conuerſa 36. huius.*

PRO-

PROPOSITIO CCXXV.

SVper rectâ AB conſtituantur quotuis parabolæ ACB, ad eundem axem CF: erectâ deinde AD quę æquidiſtet CF ponantur C, DE æquales lateribus rectis ſingularum parabolarum.

Dico EE puncta eſſe ad eandem hyperbolam cuius aſymptoti AD, AB.



Demonſtratio.

REctangulum enim CF, DE, æquale eſt ſemper eidem [a] quadrato AF; vnde omnia rectangula ADE inter ſe ſunt æqualia. quare EE puncta ſunt ad eandem [b] hyperbolam, cuius aſymptoti ſunt AD, AB. Quod fuit demonſtrandum.

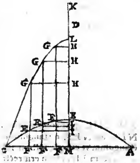
[a] 8. De parabola.
[b] Ex conuerſa 46. huius.

PROPOSITIO CCXXVI.

HYperbolæ ABC ſit diameter tranſuerſa BD ductaq; AC ordinatim ad DB, ſint illis parallelę FE. Fiant autem FG ad FG, vt ſunt FE ad FE.

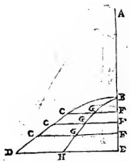
Dico GG eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.



FIat vt EF ad FG, ita BD diameter tranſuerſa hyperbolę ABC ad LK. & ponantur EI, & GH quæ æquidiſtent AC. quoniam EF ad FE eam rationem habent quam MB ad ML, erit quoque MI ad MB, vt MH ad ML. ac proinde vt MI ad IB, ita MH ad HL. & conſequenter vt MI ad MH, ita IB ad HL. ſed MI eſt ad MH hoc eſt FE ad FG, vt BD ad LK, ex conſtructione igitur vt IB ad HL, ita eſt BD ad LK. ergo rectangulum DIB eſt ad rectangulum DIB, vt eſt rectangulum KHL ad KHL, rectangulum. nam rectangulum BID ad BID, rectangulum habet rationem compoſitam ex ratione BI ad BI, hoc eſt LH ad LH: & ex ratione DI ad DI, hoc eſt KH ad KH. eſt autem quadratum IE, ad IE quadratum vt rectangulum DIB ad DIB rectangulum, quoniam ſupponitur DB tranſuerſa diameter hyperbolæ ABC: igitur etiam rectangulum KHL ad KHL, rectangulum eſt vt quadratum IE ad IE, quadratum, hoc eſt quadratum HL ad HL, quocirca LGG, eſt hyperbola. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXVII.



SIt AB diameter tranſuerſa hyperbolæ BCD: ductiſque ordinatim CF, fiant GF ad FG, vt CF ad FC.

Dico BGG eſſe ad eandem hyperbolam cuius tranſuerſum latus eſt AB.

Demonſtratio.

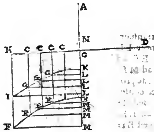
QVoniam ex ſuppoſitione AB eſt diameter tranſuerſa hyperbolæ BCD, igitur vt eſt FC ad ED, quadratum, ita eſt rectangulum AFB, ad AEB rectangulum. ergo vt quadratum GF ad HE quadratum, ita quoque eſt AFB rectangulum ad rectangulum AEB. igitur BGH hyperbola eſt cuius latus tranſuerſum eſt AB. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CCXXVIII.

SInt AB, CD diametri coniugatæ hyperbolæ BEF & diametro AB fiant æquidiſtantes CE. Deinde fiat vt CE ad HF, ita CG ad HI.

Dico IGG eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.



FIat rectæ OK æqualis ON: & ponantur GL, IL parallelæ CD, quemadmodum etiam EM & FM. quoniam BEF ponitur hyperbola cuius tranſuerſa diameter AB, erit AMB ad AMB, rectangulum vt eſt quadratum EM ad FM quadratum, hoc eſt vt quadratum GL ad IL quadratum. eſt autem CE ad OB, vt CG ad OK; igitur eſt OL ad OK; vt OM ad OB: & OK ad KL, vt OB ad BM; & NK ad KL, vt AB ad BM: denique & NL ad LK, vt AM ad MB. quare rectangulum AMB ad AMB, rectangulum eſt vt rectangulum NLK ad NLK rectangulum. quare cum ſit rectangulum AMB ad AMB, rectangulum vt eſt quadratum EM ad FM, quadratum, hoc eſt GL quadratum ad quadratum IL, etiam erit rectangulum NLK ad NLK, rectaogulum vt quadratum GL ad IL quadratum. igitur manifeſtum eſt KGI eſſe ad eandem hyperbolam cuius diameter tranſuerſa eſt NK. Quod fuit demonſtrandum.

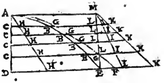
PROPOSITIO CCXXIX.

SIt hyperbola ABB, cuius axis AD: ductiſq; ad eandem ordinatim rectis BC, fiant lineis AB æquales lineæ B, CG.

Dico AGF eſſe ad eandem hyperbolam cuius axis eſt AD.

Demon-

Demonſtratio.



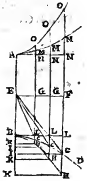
DVcatur linea A H ſecãs lineam B C, ſic vt H C, C A ſint æquales; & fiant tres quantitates in continua analogia C H, C B, C I: erit I I linea recta per conuerſam propoſit. 75. huius. Fiant prætereà rectis C H æquales I K: erunt igitur rectangula H C K æqualia quadratis C G. igitur A G G eſt hyperbola, quod ita patebit, ponatur M L æquidiſtans A D. Igitur per 192. huius ſi fiant quadrata C G æqualia rectangulo H C L, vnà cum rectangulo H C L K, erit G G hyperbola: ſed quadratum H C vnà cum quadrato C B, æquale eſt rectangulo H C K; hoc eſt rectangulo H C I. vnà cum quadrato K I, vel H C. igitur A G F ſunt ad eandem hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXX.

SIt A B axis hyperbolæ B C D, cuius E centrum, & axis coniugatus F E, è centro verò E ductis diametris E C ponantur C, G H, æquales E C, & axi parallelæ.

Dico B H H fore hyperbolam.

Demonſtratio.

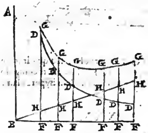


POnatur ordinatim C I & H K. quoniam B C D hyperbola eſt erit A I B ad A I B, rectangulum vt quadratum C I ad C I quadratum. poſita itaque B L, quæ æquidiſtet E F, & hyperbola oppoſita A M M, erit rectangulum M L C ad M L C, vt quadratum L B ad L B, hoc eſt C I ad C I, quadratum. Sed quadratum E C æquale eſt quadratis E I & C I, hoc eſt quadrato E B & rectangulo A I B, vnà cum quadrato C I: eſt autem quadratum G H illis ipſis æquale; igitur ablato communi quadrato G L remanet L H N, æquale rectangulo A I B vnà cum quadrato C I. erit ergo rectangulum H C O æquale quadrato C I, quoniam rectangulo A I B æquatur M N C rectangulum, quia verò eſt vt C I quadratum ad C I quadratum, ita rectangulum A I B ad A I B, hoc eſt M N C ad M N C, erit quoque rectangulum O M H ad O M H, vt rectangulum M N C ad M N C, rectangulum; ergo etiam rectangulum O N H ad O N H, hoc eſt A K B ad A K B, eandem rationem habet quam quadratum C I ad C I, hoc eſt H K ad H K, quadratum. patet a igitur B H H eſſe ad eandem hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum. a 7. huius.

PROPOSITIO CCXXXI.

SInt AB, BC aſymptoti hyperbolæ DD. ductâ verò BH, ponantur FG æquidiſtantes aſymptoto AB: fiant præterea rectis FD æquales HG.

Dico GG hyperbolam eſſe habentem AB, BH aſymptotos.



Demonſtratio.

PAtet demonſtratio ex eo quod quemadmodum omnia parallelogramma BFD ſunt inter ſe æqualia, ſic quoque æquantur inter ſe parallelogramma BHG. Igitur cùm ex eo ſit DD hyperbola habens aſymptotos AB, BC; etiam eadem de cauſa GG hyperbola futura[a] eſt habens aſymptotos AB, BH. Quod fuit demonſtrandum.

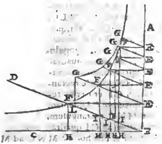
[a] Ex conuerſa 46. huius.

PROPOSITIO CCXXXII.

POnantur AB, BC aſymptoti hyperbolæ FF & aſymptoto BC æquidiſtent EF. Ducta verò quauis diametro BD, fiant EG illi parallelæ æqualeſque lineis EF.

Dico GG eſſe hyperbolam cuius aſymptoti AB, BD.

Demonſtratio.



DVctis etenim parallelis AB aſymptoto rectis FH & GI, erunt omnia parallelogramma EFH, æqualia[b] inter ſe; quemadmodum etiam parallelogramma EGI, igitur GG hyperbola eſt inter aſymptotos[c] AB, BD conſtituta. Quod fuit demonſtrandum.

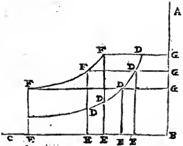
[b] 46. huius.
[c] Ex conuerſa einſdem.

PROPOSITIO CCXXXIII.

SInt AB, BC aſymptoti hyperbolæ DD; poſitiſq; DE parallelis aſymptoto AB, fiant FE ad FE, in eadem ratione cum rectis DE ad DE.

Dico

Dico F F eſſe ad hyperbolam cuius aſymptoti ſunt A B, B C.



Demonſtratio.

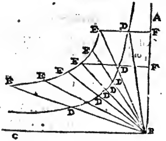
QVoniam D D hyperbola aſymptotos habet rectas A B, B C; & rectæ D E aſymptoto A B æquidiſtant, igitur parallelogramma G D E æqualia ſunt inter ſe ſunt autem parallelogramma G F E ſimiliter inter ſe æqualia cùm ſint compoſita ex iiſdem rationibus ex quibus parallelogramma G D E ſunt compoſita, igitur etiam ſunt F F, [a] ad eandem hyperbolam cuius aſymptoti ſunt A B, B C. Quod fuit demonſtrandum.

[a] Ex 46. huius.

PROPOSITIO CCXXXIV.

SInt A B, B C denuo aſymptoti hyperbolæ D D: ductis inſuper diametris B D fiant B E ad B E, in eadem ratione cum lineis B D ad B D. Dico E E eſſe ad eandem hyperbolam cuius aſymptoti ſunt A B, B C.

Demonſtratio.



POnantur enim lineæ E F, D F quæ aſymptoto B C æquidiſtent: erit itaque triangulum E F B ad E F B, triangulum vt eſt triangulum D F B, ad D F B triangulum, cùm ſint figuræ ſimiles, ac proinde in duplicata ratione laterum homologorum. Igitur patet etiam E E eſſe [b] hyperbolam quæ aſymptotos A B, B C communes habet cum hyperbola D D. Quod fuit demonſtrandum.

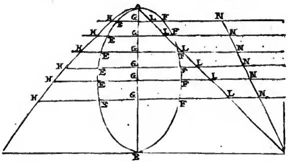
[b] Ex eadem.

PROPOSITIO CCXXXV.

SInt ellipſeos extremæ diametri A B maior, minor C D, poſitis autem E F ordinatim ad axem A B, fiant rectis A E, æquales F, G H. Dico A H H eſſe hyperbolam cuius diameter A B.

 Demon-

Demonſtratio.



Fiat ipſi AB æqualis BL, ductaque AL lineas GN ſecans in punctis L, fiant quadratis GF æqualia rectangula GLN, erunt NNL in [a] recta lineâ; igitur cùm rectangula NLG, æqualia ſint quadratis GF, addito quadrato AG, hoc eſt GL totum rectangulum NGL, æquale erit quadratis AG, GF, hoc eſt quadrato AF, hoc eſt GH quadrato. igitur cùm GH media proportionalis ſit inter NG, & GL, ad [b] hyperbolam erunt AHH. Quod erat demonſtrandum.

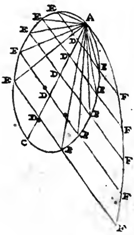
[a] Ex 150. de ellipſ.

[b] Ex 192. huius.

Corollarium.

EX conſtructione facile patet, hyperbolam HH ortam ex translatione linearum AE, ordinatim poſitarum ad axem ellipſeos, latus tranſuerſum habere æquale axi ellipſeos AB.

PROPOSITIO CCXXXVI.



SIt ellipſeos ABC diameter AC non axis nec vna ex coniugatis æqualibus, ſed intra illas & axem ſita ſit, ordinatim autẽ ad illam poſitis BE fiant quadratis rectarum AE, AB ſimul ſumptis æqualia quadrata DF.

Dico AFF fore ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.

SVnt enim quadrata rectarum AE, AB ſimul ſumpta æqualia quadratis AD, BD bis ſumptis, ſed AD, DB quadrata, tranſlata in quadrata DF, producunt hyperbolam, vti ex præcedenti conſtat: igitur AFF ad hyperbolam ſunt. Quod fuit demonſtrandum.

Scholion.

PRimò *aſſumpſi in propoſitione*, AC *diametrum quæ inter axem maiorem & diametros coniugatas æquales ſita eſt: quia tunc quadrata ordinatim poſitarum, pu-*

ta

ta BD *minora ſunt rectangulis* ADC; *adeoq; illa reduci poſſunt ad ellipſim quæ axem habet æqualem* AC, *& ordinatim ad illarum poſitæ* BD: *in quo caſu cùm oſtenſum ſit propoſit. præcedenti, quadratum* AB, *ſiue quadrata* AD, DB *tranſlata in* B, DF *quadratum, producere hyperbolam; patet idem quoque accidere in obliquis diametris.*

Secundò dum AC *vna è diametris coniugatis æqualibus eſt; quadrata* AD, DB *tranſlata in* B, DF *quadrata, producunt parabolam, vti 333. de parab. demonſtrauimus.*

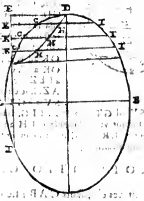
Tertiò ſi AC *verò axis minor fuerit, quadrata* AB, *ſiue quadrata* AD, DB *ſimul ſumpta & tranſlata in* DF *quadrata producunt ellipſim.*

PROPOSITIO CCXXXVII.

SIt AB axis ellipſeos ACB: quem orthogonaliter ſecet EF ſitq; ED ellipſim contingens æquidiſtans axi: denique poſitis KH quæ rectæ AB ſint parallelę, fiant rectangulis CKI æqualia KH quadrata.

Dico HHD eſſe ad eandem hyperbolam cuius axis FE.

Demonſtratio.



ESt enim rectangulum FEL ad FKL, ſicut a rectangulum DED ad CKI rectangulum, igitur quadratum ED ad KH, eam habent rationem quam rectangulum FEL & FKL, igitur LHD eſt hyperbola cuius latus tranſuerſum LF. Quod fuit demonſtrandum.

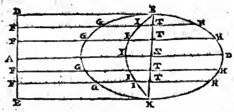
a Ex 99. de ellipſ.

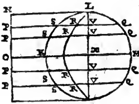
PROPOSITIO CCXXXVIII.

COntingat ellipſim recta AB axi CD parallela, quam orthogonaliter ſecet AB: fiant autem rectangulis GFH, æqualia quadrata FI.

Dico BII eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.





POnatur quicunque circulus KLM quem contingat NL & recta NO normalis ad OM parallelam NL, diſpeſcat rectam OM ſecundùm rationem AC ad CD. diuiſa deinde NO in PP, vt eſt diuiſa DE in F fiant quadrata PR æqualia rectangulis SPQ, oſtẽdimus puncta LRR eſſe ad eandem hyperbolam. quia verò eſt OK ad KX, vt AC ad CZ, erit quoque OK ad AC, vt KX ad CZ, hoc eſt OX ad EZ; & vt KX ad CZ, ita OX ad AZ, hoc eſt PV ad FT, ita quoque eſt SV ad GT, vt demonſtratum eſt libro

a 114. de ellipſi. de ellipſi. Igitur vt SV ad GT, ita PS ad FG. itaque rectangula GFH ſimilia rectangulis SPQ; igitur vt rectangula GFH ad SPQ, ita quadrata FI ad PR quadrata. ſunt autem LRR a ad hyperbolam: igitur etiam BII ſunt ad hyperbolam. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXXIX.

SInt AB, AC ſemiaxes ellipſeon CAB; ſic vt AB prima æqualis ſit AC, & ex B rectæ erigantur BD, parallelæ AC, æquales autem lateribus rectis ellipſeon.



Dico puncta DD eſſe ad hyperbolam cuius aſymptoti ſunt AC, AB.

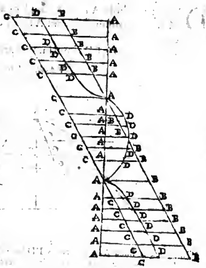
Demonſtratio.

QVoniam BD, lateribus rectis ellipſeon æquales ſunt, rectangula ABD ſingula æqualia ſunt b quadrato AC adeoque & inter ſe. vnde puncta DD ad hyperbolam ſunt, cuius aſymptoti AC, AB.

b 11. De ellipſ.

PROPOSITIO CCXL.

PRopoſitum ſit vna eademque praxi tres coni ſectiones deſcribere.



Conſtructio & demonſtratio.

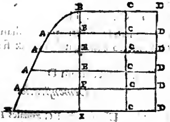
POſita A A linea, ſecetur rectis BB, CC parallelis; inter rectas verò A B, B C in prima figura mediæ ponantur B D. In ſecunda verò & tertia inter A B, A C, mediæ ponantur A D parallelæ inter ſe. Dico in prima figura [a] parabolam oriri, in ſecunda [b] ellipſim, aut circulum, in tertia denique [c] hyperbolam. quarum demonſtrationes ſuis locis cùm expoſitæ ſint fruſtra repetendas cenſeo.

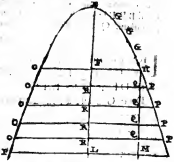
a Ex 293. de parabolam.
b 150. De ellipſi.
c 190. huius.

PROPOSITIO CCXLI.

DAta ſit parabola A B & ei in directum adiungatur quadratum aut rectangulum B C, vel B D; ponantur autẽ ad axem B B ordinatim A B, pertingentes ad latera rectanguli. Dico B C quadrata addita quadratis A B, producere parabolam.

Demonſtratio.





POnatur E G parabola cuius axis E F, æqualis parabolæ A B B id eſt habens latus rectum axeos æquale lateri recto axeos B B, & I B, æqualis ſumatur F N quæ in E G parabola ordinatim [d] applicetur ad axem E F ſumptaque F L æquali I C C, ponantur F, N O, & N, Q M æquidiſtantes K L, F E: erit igitur N L rectangulum æquale rectangulo B C. & R Q quadrata æqualia quadratis B C. vlterius ſi inter P Q, Q O mediæ poni intelligantur, producent illæ parabolam æqualem E G G, id eſt A B B: hoc eſt parabolam producent habentem ad axem latus rectum æquale lateri recto axeos B B; rectangula igitur P Q O parabolam producunt A B B. ſed P Q O rectangula vnà cum quadratis Q R, quadrata producunt P R quæ ordinatim poſita ſunt in parabola E G G ad axem E F; quadrata igitur A B, vnà cum quadratis B C parabolam producunt E G P. Quod erat demonſtrandum.

d Per 5. de parabola.

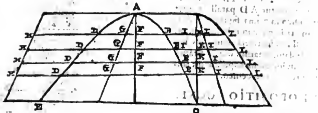
Idem eſt, ſi hyperbolæ adiungatur quadratum aut rectangulum.

PROPOSITIO CCXLII.

DAta ſit parabola A B C, & eiuſdem altitudinis hyperbola A D E, habentes communem axem A F, ad quem ordinatim poſitæ ſint F B, F D.

Dico quadrata B F, F D ſimul ſumpta producere hyperbolam.

Demonſtratio.



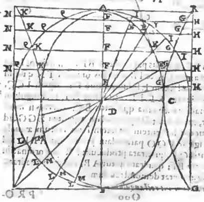
a Ex conuerſa 192. huius.
b Ex 193. de parabola.

POnatur ex A linea A G occurrens F D lineis in G G, & A G parallela H H, vt F G H rectangula æqualia ſint quadratis F D: patet [a] H H eſſe in directum. fiant iterum F B quadratis æqualia rectangula G F I: conſtat [b] quoque I I eſſe rectam lineam. deinde I K rectæ æquales fiant F G; patet & K K eſſe rectam lineam, rectangula igitur I K F æqualia ſunt quadratis B F. & I K F H rectangula æqualia quadratis F D: vnde I K H rectangula æquantur quadratis B F, F D. ſi autem I K H, rectangulis æqualia ponantur quadrata K L, puncta K L L ad hyperbolam ſunt, igitur ſi B F, F D quadratis æqualia ponantur quadrata, patet illa quoque eſſe ad hyperbolam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXLIII.

POnatur ellipſeos axis maior A B, ex centro D, poſitis quotuis diametris D E, fiant E F parallelæ D C diametro coniugatæ A B; & fiant rectis D E, æquales E, F G.

Dico G G eſſe ad eandem hyperbolam cuius centrum D.



c Ex elementis.

Demonſtratio.

FIant rectis F G æquales F K, & deſcribatur circulus ſuper axe A B, & perficiatur quadratum N H, erit itaque rectangulum I E L ad I E L, rectangulum quemadmodum eſt [c] rectangulum Q E P ad Q E P, rectangulum hoc eſt vt quadratum F E ad F E quadratum. vnde vt eſt F E quadratum ad quadratum F E, ita ſimiliter eſt H G N rectangulum ad rectangulũ H G N cùm ex constructione D E ſint æquales F G vel F K; & D I æquales F H vel F N, eſt autem quadratum

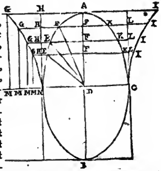
quadratum FE ad FE, quadratum vt rectangulum [a] AFB, ad AFB rectangulum, hoc eſt RHO ad RHO: igitur GHK rectangulum eſt ad reetaugulum GHK, vt rectangulum RHO ad RHO rectangulum. ergo GG, KK ſunt ſectiones [b] oppoſitæ habentes centrum D. Quod fuit demonſtrandum.

a 4. De ellipſi.
b Ex 36. huius.

PROPOSITIO CCXLIV.

Lubet propoſitionem præcedentem nonnihil aliter demonſtrare.

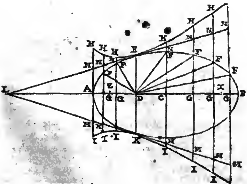
Demonſtratio.



Sit itaque ellipſis ABC cuius centrum D, axis maior AB, minor DC: cui parallelæ ponantur FH; & rectis DE fiant æquales E, FG, & E, FI. Dico GG, II eſſe oppoſitas ſectiones, quarum centrum D: ponantur HH, LC axi parallelæ: erit itaque quadratum DE, æquale quadratis EF, FD, igitur etiam quadratum FG iiſdem æquabitur: ablato igitur communi quadrato EF, remanebit rectangulum GEI, æquale FD quadrato. vnde vt eſt FD quadratum ad FD quadratum, hoc eſt quadratum GM ad GM quadratum, ita eſt rectangulum GEI ad GEI rectangulum, eſt autem & HEL rectangulum ad HEL, rectangulum id eſt EHK ad EHK, vt quadratum FD ad FD, quadratum ſiue HN ad HN quadratum, igitur & GHI rectangulum reliquum ad rectangulum GHI eſt, vt quadratum FD ad FD quadratum; (nam GEI rectangulum æquatur rectangulis GHI, & HEL) igitur vt rectangulum GHI ad GHI, ita FD quadratum ad quadratum FD, id eſt HN ad HN quadratum; quare GG, II ſunt [c] oppoſitæ ſectiones, quarum centrum eſt D punctum. Quod fuit demonſtrandum.

c Ex conuerſa 36. huius.

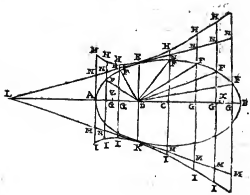
PROPOSITIO CCXLV.



Ponatur AB axis maior ellipſeos, cuius centrum C: aſſumpto verò puncto quodam D in axe AB, quod inter centrum C & punctum foci conſtitutum ſit, ducantur ex eo rectæ DF. ex punctis quoque FF ponatur FG, ordinatim ad axem AB. fiant autē rectis DF, ęquales F, GH, GI. Dico puncta HH, II eſſe ad hyperbolas oppoſitas.

Demon-

Demonſtratio.



ACta per D recta EK normali ad AB, ponantur per E & K cõtingentes ellipſim, rectæ EL, KL, occurrentes rectis GH, in N & M: conuenient igitur EL, KL in puncto a quodam L, quod in AB producta eſt, quoniam rectis DF æquales poſitæ ſunt F, GH, & F, GI, igitur quadrata FG, GD æqualia ſunt quadratis HG, hoc eſt rectangulis HFI, vnà cum quadratis FG. vnde ablatò communi quadrato FG, remanet HFI rectangulum æquale quadrato GD: quare vt eſt quadratum GD, ad GD quadratum id eſt NE quadratum ad quadratum NE, ſic rectangulum HFI ad HFI, rectangulum, eſt autem oſtenſum NFM, rectangulum eſſe ad rectangulum NFM vt NE, quadratum ad quadratum NE: reſiduum igitur rectangulum HNI ad HNI eſt, vt quadratum NE ad NE quadratum. igitur per conuerſam 36. huius erunt HH, II ſectiones oppoſitæ. Quod demonſtrandum fuit.

a 34. De ellipſ.

PROPOSITIO CCXLVI.

SIt ellipſeos ABC, focus D; aſſumpto autem in axe puncto E inter focum & verticem ellipſeos A, ducantur ex E ad perimetrum ellipſeos quotcunque EF; & per F rectæ ponantur F, GH, normales ad AC & æquales EF.

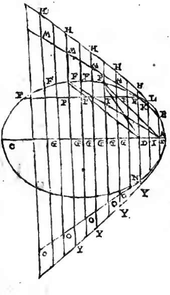
Dico BHH, eſſe ad eandem hyperbolam.

Demonſtratio.

EX foco D, erigatur ordinatim ad axem DFN & per F & N, contingentes ponantur FM, NO. diuiſa deinde bifariam ED in I, ponatur IK parallela DF, occurrens contingenti FM in L. quoniam igitur D focus eſt ellipſeos, & IK, EB normales ad AC, rectæ DK æqualis b eſt IL, prout contingenti occurrit: ſed DK rectæ æqualis eſt EK, (quia ED in I biſſecta eſt) rectæ igitur EK, IL æquales ſunt: ſed per hypotheſim rectæ EK æqualis eſt IL, prout occurrit figuræ ABH. punctum igitur L communis interſectio eſt figurę BHH & lineam IK, FM: fiant deinde GH lineis, æquales GY: erunt igitur HG quadrata æqualia quadratis MG, vnà cum rectangulis HMY: quia verò rectę EF, per hypotheſim æquales ſunt GH, & DF æquales ipſis GM, quadrata EF, DF æqualia ſunt quadratis

b 139. De ellipſ.

dratis H G, M G : adeoque EF quadrata ſuperant quadrata M G id eſt DF, rectangulis HMY. ſed EF quadrata quoque ſuperant quadrata DF rectangulo EDG bis ſumpto a vnà cũ quadrato ED: rectangula igitur EDG bis ſumpta vnà cum quadrato ED, æqualia ſunt rectangulis HMY: rurſum ſi EDG rectangulis æqualia fiant quadrata, b producent illa parabolam, & ſi parabolę illi addatur ED quadratum; producet c illud vnà cum parabola, parabolam; igitur & HMY rectangulis ſi æqualia fiant quadrata, producent illa parabolam. ſimiliter MPO rectangulis æqualia fiant quadrata, producent d illa hyperbolam; quæ addita parabolæ, quam HMY producit; generabit e hyperbolam; igitur ſi HPY rectangulis, (quę æqualia ſunt HMY, MPO) æqualia fiant quadrata, producent illa quoque hyperbolam: cui ſi addantur quadrata PG, producent illa ſimul f cum hyperbola, hyperbolam. ſed HPY rectãgulis vnà cum quadratis PG, æqualia ſunt quadrata HG, id eſt EF, quadrata igitur EF hyperbolam producunt cuius ordinatim ad axem poſitæ ſunt EF, id eſt GH: hyperbola igitur eſt HH, YY.



a Ex ele-mentis.

b 293. De parabola.

c 241. huius

d 192. huius.

e 242. huius.

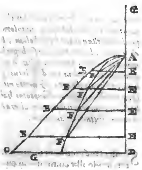
f Ibidem.

PROPOSITIO CCXLVII.

HYperbolam ABC cuius axis AD communis eſt parabolæ ex qua orta eſt, reducere ad parabolam.

Conſtructio & demonſtratio.

POſitis ad axem AD in hyperbola ordinatim lineis BE; fiant EB lineis æquales AF. dico AFF eſſe parabolam quę produxit hyperbolam ABC: ponatur AG latus tranſuerſum hyperbolæ; quoniam igitur ABC hyperbola orta ex parabola communem cum illa habet axem, rectangula GEA æqualia ſunt quadratis BE, id eſt per conſtruct. quadratis AF, id eſt quadratis AE, EF: ablatis igitur communibus quadratis AE, manent GAE rectangula æqualia quadratis EF: vnde vt AE ad AE, ſic FE quadratum ad quadratum FE: parabola eſt igitur AFF, & eadem ex qua orta eſt hyperbola ABC.

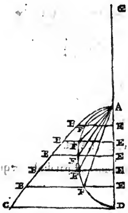


Scholion.

NOta: propoſitione hac nos illas reducere tantum voluiſſe hyperbolas ad parabolas è quibus orta, quæ communem cum parabolis axem habent: id eſt hyperbolas rectas, illæ enim ex parabola producuntur, per translationem linearum A F *in* F, E B*: vnde omnes illæ hyperbolæ latus tranſuerſum æquale habent lateri recto parabolæ; adeoq; cum* G E A *rectangula æqualia habeant quadratis* A F *id eſt* B E*; vnde hyperbola* A B C *aſymptotos habet rectum continentes angulum: ſi quis autem volet reducere hyperbolas obliquas, id eſt quæ oriuntur ex translatione quadratorum* A E, E F, *in quadrata* E B *(quando* A D *axis parabolæ non eſt ſed diameter,) is potentias linearum quæ ordinatim ad hyperbolam ponuntur, transferat: quam materiam ne longior ſim, ſtudio omittendam duxi.*

PROPOSITIO CCXLVIII.

HYperbolam A B C, quæ A D axem habet communem cum ellipſi ex qua orta eſt, reducere ad ſuam ellipſim.



Conſtructio & demonſtratio.

PAtet ex 219. vel 220. huius, cuius ſit conuerſa.

Scholion.

HYperbolæ communem habentes axem in ellipſi ex qua oriuntur, aſymptotos habent acutum angulum continentes: intelligantur enim circulus & ellipſis communem habere axem maiorem, & ad illum ordinatim lineas poni. deinde ſubtenſæ angulorum rectorum in circulo transferri in normales ad axem: producent illæ parabolam communem cum circulo axem habentem, & latus rectum æquale diametro circuli. Rurſum ſubtenſæ angulorum rectorum in parabola illa, transferantur in ordinatim poſitas ad axem parabolæ, producent illæ hyperbolam, habentem latus tranſuerſum, æquale lateri recto parabolæ, ex qua oritur; & aſymptotos rectum angulum formantes: iterum ſubtenſæ angularum rectorum in ellipſi, ponantur normaliter ad axem, producent illæ quoque hyperbolam, habentem latus tranſuerſum æquale axi ellipſeos, adeoq; & æquale, lateri tranſuerſo hyperbolæ, ortæ mediatè ex circulo, cuius diameter, axis maior eſt ellipſis: quoniam igitur hyperbola orta ex illa ellipſi, ordinatim poſitas minores habet, quàm circulus eodem axe deſcriptus; patet illas minores quoque eſſe ordinatim poſitis in parabola, ex circulo illo orta: & multo minores, quàm hyperbola ex parabola illa orta: ſed hyperbola ex parabola ſic orta, aſymptotos habet angulum rectum formantes; igitur hyperbola ex ellipſi orta, eundem habens cum altera axem, & latus tranſuerſum commune, aſymptotos habet acutum continentes angulum.

Corollarium.

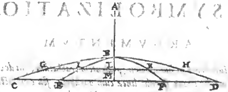
SImili planè methodo reducũtur parabolæ ad parabolas, & circulos è quibus oriuntur, modo illæ communem cum parabolis aut circulis è quibus oriuntur habeant axem, reduci etiam poteſt parabola ad ellipſim ex qua oritur, vti propoſit. 333. de parabola oſtendi, ſed praxis illa requirit translationem linearum ſecundum potentias.

PRO-

PROPOSITIO CCXLIX.

HYperbolam quamcunque reducere ad hyperbolam cuius aſymptoti rectum continent angulum.

Conſtructio & demonſtratio.



SI A B latus tranſuerſum hyperbolæ C B D & ordinatim ad A B, poſitę ſint H G, D C occurrentes A B in L & M. Fiat A L B rectangulo æquale quadratum L I, vel L K; item A M B rectangulo æquale M E quadratum vel M F: patet ex 60 huius hyperbolam eſſe F K B I E cuius aſymptoti rectum continent angulum.

Scholion.

Ex præmiſſis propoſitionibus manifeſta eſt praxis quâ ex hyperbola reliquæ ſectiones educi poſſint, quæ communem cum hyperbola axem habent: ſit enim A B C *hyperbola, (vide figur. 147. huius) cuius axis* A D, *& aſymptoti rectum angulum continent. ſi* E E *ordinatim poſitas transferas in* A F: *patet* A F F *eſſe parabolam.*

Si verò A B C *hyperbolæ aſymptotos habeat acutum obtinentes angulum;* E B *ordinatim ad axem poſita ſi transferantur in* A F, *conſtat ex* 148. *huius* A F F *eſſe ellipſim.*

Cæterùm innumeræ penè ſuperſunt praxes educendi parabolas, ellipſes, circulos, ex hyperbola, à quibus conſultus abſtineo, ne multitudo lectorem fatiget, contentus, viam ſatis amplam & praxes plurimas ſimiles Parte hac protuliſſe; quas induſtrius Geometra, ad infinitas penè extendere facile poterit.

SPIRALIS ET PARABOLÆ SYMBOLIZATIO.

ARGVMENTVM.

DIſtuli ſtudio in hunc locum, præſentem tractatum, qui de conuenientia ac ſymbolizatione ſpiralis lineæ cum parabola, ſeu coni rectanguli ſectione tractat, vt coronidem imponam ſectionibus conicis, quas huc vſque exponere lucubrationibus hiſce conatus ſum. Admirãda certè ſymbolizatio & ſimilitudo eſt harum duarum figurarum parabolæ nimirum & ſpiralis, quam excogitauit atque ſuo ingenio commentus eſt Archimedes: vt viam ſibi ſterneret ad circuli quadraturam exhibendam: quæ res me non exiguo temporis ſpatio, ſollicitum habuit, neque enim vel hac hora, mihi in animum inducere poſſum, quid mouerit Archimedem, per ſpiralem lineam, circuli quadraturam indagare: maximè affirmando, eius contingente inuentâ, repertam quoque fore lineam rectam, quæ cum circuli perimetrô, æqualitatis rationem contineat. methodus enim demonſtrationis, qua Archimedes in hac materia vtitur, vſque adeò ſecreta eſt & inuoluta, vt mihi nunquam occurrere potuerit, qua ratione Archimedi inciderit, per contingentem ſpiralis lineæ, deueniri poſſe ad lineam rectam reperiendam, quæ perimetro circuli ſit æqualis; quæ etenim affinitas eſſe poteſt, ſpiræ cum circulo, maximè ſi contingentem eius conſeras cum perimetro circuli? ante annos circiter viginti quinque, cùm in ſpeculationem, quam explicare intendo, incidiſſem, planè mihi perſuaſeram veriſſimam me reperiſſe viam, qua Archimedes adinuenit, circuli perimetrum æqualem eſſe lineæ illi, quam contingens ſpiralis aſſignat: illo tenore qui ab eodem authore libro de ſpirali declaratus; ſed ab hac opinione me ſemouere conatus eſt anno vigeſimo quinto huius ſæculi, P. Chriſtophorus Grimbergerus, P. Clauij (cuius & ego per aliquot annos domeſticus auditor fui) indiuiduus comes, cuius opera Clauij lucubrationes, magnum pondus & auctoritatem acquiſiére: vix enim ſequentem ſpeculationem eidem viro explicueram, cùm ſubiungeret eam nimis pulchram ſibi videri, quam vt Archimedes ſuppreſſam eam voluerit, quæ pulchritudine ſua ſi non excederet, ſaltem non inferior eſſet Archimedæâ contemplatione, quam poſteris de ſpiralis lineæ natura reliquit. Nihilominùs difficulter à perſuaſione mea ſemoueri me patior; tuum igitur benigne Lector, iudicium exſpecto & rogo vt bene perſpecto, quem ſubiungemus diſcurſu, ſententiam tuam libere eloquaris; donec alia tibi via vel ratio occurrerit, explicandi Archimedis artificium quo connexionem perimetri circularis, cum lineâ per contingentem ſpiralis inuentâ, repererit. Antiquis enim valde ſolenne fuit, artificium adinuentionis celare, quo admirabilior euaderet propoſitionis veritas, celata methodo, quæ ad eius cognitionem perueniendi viam fecit. Intentum itaque præſentis partis eſt, oſtendere parabolæ naturam eandem eſſe cum natura

ſpiralis

Digitized by Google

ſpiralis figuræ, & proprietates omnes, ab Archimede in ſpirali figura explicatas, reperiri ad vnguem etiam in parabola, & per contingentem parabolæ, etiam pari ratione, qua per tangentem ſpiralis, poſſe aſſignari lineam perimetro circuli æqualem. Ordiemur itaque comparationem ipſam, origines vtriuſque figuræ inter ſe conferendo. deinde ſingulas propoſitiones tum ab Archimede, tum etiam à Pappo Alexandrino allatas, quæ de ſpiralis figuræ natura tractant, parabolæ adaptando.

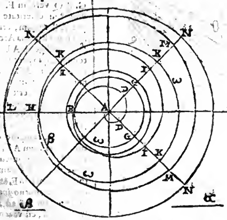
SPIRALIS.

PROPOSITIO PRIMA.

SPiræ & parabolæ in ipſa geneſi mira ſimilitudo oſtenditur.

Spirarum geneſim hanc tradit Archimedes in libro de ſpiralibus definitione prima.

SI in plano recta linea altero termino manente, æquali celeritate circumlata redeat deinceps eò vnde profecta eſt: ſimul verò cum linea circumuoluta, feratur punctum pari velocitate ſibi ipſi, ſecundùm rectam lineam ducto, motus initio ab immobili termino: iſtud punctum lineam ſpiralem in plano deſcribet.



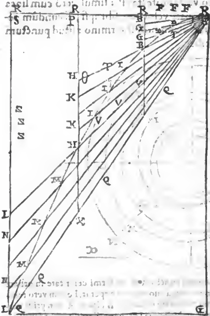
DAta ſit recta linea A B quæ manente puncto A & vniformi celeritate in orbem moueatur donec in eum locum redeat, à quo moueri cœperat. Eodem verò tempore punctum A percurrat vniformi celeritate rectam A B, ita vt A non prius perueniat in B quam recta A B, primam reuolutionem peregerit. Feretur igitur punctum A motu neque recto neque circulari, ſed compoſito ex vtroque. Lineam compoſito iſto motu puncti A deſcriptam Archimedes ſpiralem vocat. Quod ſi ſumatur B H, ipſi A B æqualis, & punctum B percurrat rectam B H, eodẽ tempore, quo manente puncto A recta A H in orbem vertitur, deſcribetur ſpira ſecundę reuolutionis. eundem in modum deſcribetur ſpira reuolutionis tertiæ, quartæ atque ita in infinitum.

Vidimus ſpirarum origines; ad originem parabolæ veniamus.

APPLICATIO.

DAtum ſit triangulum ABGB, cuius latus AFB. producatur infinite verſus S: per verticem anguli A, ducta ſit RG, parallela BB etiam infinita, quæ motu vniformi, & ſemper manens ad BB parallela, feratur per rectam AS, donec congruat lineæ BB: eodem autem tempore linea ABS, manente puncto A, moueatur donec congruat rectæ ATB. Sed hic motus ſic peragi debet vt AB, BB in æquè multas æquales partes diuiſis, quo tempore RQ vnam æqualium partium rectæ AB abſoluit, eodem etiam ABS abſoluat vnam æqualium partium rectæ BB, & ſic deinceps, hæc autem vniformitas non ſumitur ſecundùm vniformitatē motus ſecundùm ſuas partes, ſed ſecundùm partes ſpatij quod per motum decurritur. quæ partes æquales inter ſe exiſtunt. Interſecabunt ſe perpetuo in motu illo rectæ AS, RG in punctis D, D.

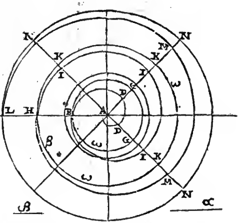
Dico interſectionibus illo motu factis parabolam deſcribi.



Demonſtratio.

SVmatur quoduis punctum interſectionis D, quando igitur AS, RQ, ſe interſecant in puncto D, AS quidem perueniat in G, RQ verò in F. Et quoniam vniformi celeritate RQ fertur per AB rectam, erit (quemadmodum ex ptima Archim. de ſpir. facile colliges) AF ad AB, vt tempus, quo percurritur AF ad tempus quo AB. Rurſum quoniam AS vniformi celeritate percurrit BB, erit BG ad BB vt tempus, quo percurritur BG ad tempus, quo percurritur BB. Sed AB, BB ex hypotheſi percurruntur eodem tempore quod ponatur eſſe α: item AF, BG tempore eodem pertranſeuntur, quod ponatur eſſe β, cùm RQ recta tum perueniat in F, & AFS in G, quando ſe mutuo interſecant in D. ergo tam AF ad AB, quàm BG ad BB, eſt vt tempus α ad β. Ergo AF eſt ad AB, vt BG ad BB. Ergo diuidendo AF eſt ad FB, hoc eſt AT ad TB, vt BG ad GB, hoc eſt quemadmodum patet ex elementis (quoniam BB, RQ, ſunt parallelæ) vt FD ad DT. Ergo per 5. Archimedis de quadrat. parabolæ punctum D eſt ad parabolam. Similiter oſtendimus omnia puncta interſectionum DDD eſſe ad parabolam. Quod erat demonſtrandum.

Similitudinem porro ſic oſtendemus: motus rectæ ABS per lineam BB, manente puncto A fixo, repræſentat motum circularem rectæ AB qui fit in ſpirali manente puncto A: motus autem rectæ RQ per rectam AB, ſemper ad BB parallelus



rallelus exhibet fluxum puncti A in ſpirali per rectam AB, punctum igitur A in parabola refert principium ſpiræ A; recta AFB vel ATB, eam quæ eſt principium circulationis, nempè ipſam AB; linea BGGB peripheriam BGGB primi circuli; ſingulæ verò parallelarum FDT peripherias ſingulas, quæ primo circulo concentricæ per ſingula lineæ AB puncta ducuntur; lineæ autem ADG, (partes ipſius AS) diametros ADG repræſentant, Ex quibus conſequens eſt ſpiralem ipſam ADB à parabola ADB, & circulum primum à triangulo BAB adumbrari.

Vides igitur, niſi fallor amice Lector, quantum in ipſo ortu, atque à primis (vt ita loquar) incunabilis ſymbolizent ſpiralis & parabola.

PROPOSITIO II.

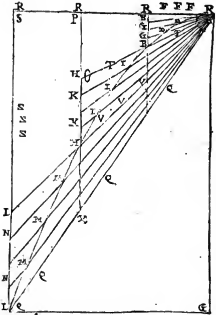
IIſdem poſitis, nimirum figurâ parabolicâ, ſumatur BP, ipſi AB æqualis, ductaque PHKH parallela ad BGB, occurrat illi in H recta ATBZ infinita, iam congruens ipſi AIB, fiatque HKH æqualis ipſi PH, & iungatur AVH. Deinde quo tempore ABHZ, manente puncto A, mouetur vniformi celeritate per lineam HKH donec congruat rectæ AYVH, eodem infinita illa linea RQ, iam congruens ipſi BB, motu ſemper vniformi & ad rectas BGB, PH parallelo percurrat lineam BP, donec congruat rectæ PHKH. Interſecabunt iterum ſe perpetuò in punctis I.

Dico interſectionibus II, illo motu factis eandem parabolam continuari.

Demonſtratio.

ASſumatur quoduis I punctum, eodemque planè diſcurſu oſtendemus eſſe BO ad OP, hoc eſt YV ad VH, vt HK ad KH, quò propoſ. 1. oſtendimus AT eſſe ad TB, vt BG ad GB. Deinde cùm AY ſit ad YH, vt AB ad BP, AB autem ſit ad BP, vt PH ad HKH, cùm ex conſtructione tam AP, quàm P,KH biſectæ ſint in B & H; etiam AY eſt ad YH, vt PH ad H,KH: ſed YH eſt ad VH, vt HKH ad KH, (iam enim oſtendimus diuidendo YV eſſe ad VH,

vt



vt H K ad K H.) Ergo æqualitate A Y eſt ad V H, vt P H ad K H. quare cùm etiam Y V ſit ad V H, vt K K ad K H, erit per 24. 5. tota A Y V ad V H, vt tota P H K H ad K H, hoc eſt vt O I ad I V. Ergo per 5. Archimed. de quadratura parabolæ punctum I, eſt ad parabolam. Similiter oſtendemus de omnibus I I punctis. Punctum quoque B ad parabolam eſſe eſt manifeſtum, nam A Y eſt ad Y H, vt A B ad B P, hoc eſt, vt P H ad H, K H (quia vtraque A P, P, K H biſecta eſt in B & H) hoc eſt vt B G B ad B Y. Denique quod ſint ad eandem parabolam, inde patet quod omnes lineæ A G, A I ex eodem puncto A egrediantur. Vera igitur ſunt, quæ oportebat demonſtrare.

APPLICATIO PARABOLÆ.

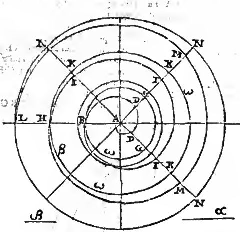
REpræſentat igitur ſegmentum parabolicum ſecundum B H Y A, ſpiram ex ſecunda reuolutione: triangulum verò H A H, circulum ſecundum; recta H K H perimetrum ſecundi circuli, B H, Y H, B P ſecundam in ſpirali lineam B H referunt.

Quod ſi ſumpta P S æquali rurſum ipſi A B, ducatur parallela S L cui occurrat A Y; H Z in L, & factâ L N L dimidia ipſius S L, iungatur A X L; ac tum moueri pergant modo ſupra explicato infinitæ illæ lineę R L Q, A L Z, ſuis iterum interſectionibus M M continuabunt eandem parabolam, & ſegmentum quidem A H L X A repræſentabit tertiam reuolutionem: triangulum L A L tertium circulum referet: Atque ita procedendo vlterius iuxta methodum iam præſcriptam, quartam etiam & quintam reuolutionem, & ſic deinceps in infinitum in parabola exhibebimus.

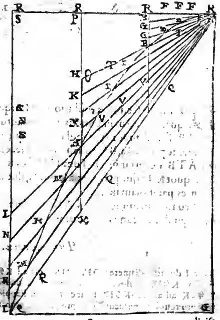
Quæ cùm ita ſint nónne iure meritò ſpiralem eſſe dixerim euolutam ſiue expanſam parabolam? Verùm id planius adhuc fiet ex ſequentibus propoſitionibus; nihil ſiquidem de ſpirali vel Archimedes vel Pappus demonſtrarunt, quod viciſſim in parabola non exhibebimus. Quod priuſquam proſequamur, lubet duobus adhuc ſequentibus Theorematis eandem analogiam ampliùs declarare.

PRO-

PROPOSITIO III.



Ata ſit ſpiralis A D B, cuius primus circulus diuiſus ſit æqualiter in punctis G; & ex principio ſpiræ ducantur ad puncta G quotuis rectæ A G, ſecantes ſpiralem in D.



Sit prætereà parabola A D B, cuius tangens A B; ſubtenſa A T B; diameter B B ſecta in æquè multas æquales ac fuit ſecta perimeter in punctis G: ducanturque ad puncta G rectæ quotuis A G, ſecantes parabolam in D:

Dico omnes rectas A G in parabola, ſimiliter ſectas eſſe à parabola, vt rectæ A G in ſpirali ductæ à ſpirali diuiſæ ſunt.

Demonſtratio.

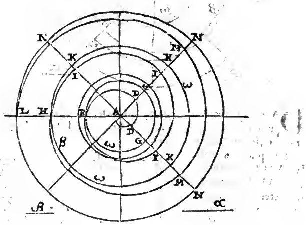
PEr D duc diametrū F D T, ſiue (quod idem eſt) parallelam ad B B. A D eſt ad D G, vt A T ad T B, hoc eſt per 5. Archim. de quadratura parabolæ, vt F D ad D T, hoc eſt vt B G ad G D; hoc eſt (quoniam tam B B quàm peripheria primi circuli ex hypotheſi

diuiſa ſunt in partes æquales æquè multas) vt arcus B G ad arcũ reliquum G ω G B; hoc eſt per 19. Pappi l.4. vt in ſpirali A D, ad D G. Ergo à primo ad vltimum in parabola A D eſt ad D G, vt in ſpirali A D ad D G. Quod erat demonſtrandum.

Hinc rurſum collige analogiam vtriuſque figuræ:

Punctum A in parabola	Repræſentat	Principium ſpiræ A.
Tangens A B, & ſubtenſa A B.		Rectam in ſpirali primam A B quæ etiã cauſa eſt cur littera B bis ponatur.
Diameter B B.		Perimetrum primi circuli B G B.
Triangulum B A B.		Primum circulum.
Rectæ A D G in parabola		Rectas A D G in ſpirali.
Segmentum parabolicum A D B T.		Spacium ſpirale primum A B G A.

PROPOSITIO IV.

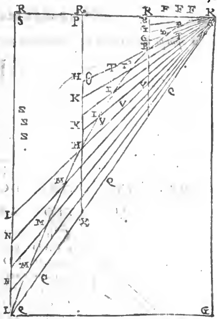


DEtur ſpiræ ſecunda reuolutio B I H, ſitque ſecundus circulus H K K, æqualiter ſectus in punctis K : ducanturq; rectę A K ſecantes ſpirã in I. Poſitis deinde in parabola iiſdem quę propoſitione tertia, ſumatur è tangente producta, B P æqualis ipſi A B, & ex P duc diametrum P H K A, cui A T B occurrat in H. Tum H H ſeca in totidem æquales, in punctis K, in quot ſecta fuit peripheria ſecunda, ducanturque tandem rectæ A K ſecantes parabolam in I.

Dico rurſum omnes rectas A K in eadem proportione ſecari à parabola, & ſpirali ex ſecunda reuolutione nata.

Demonſtratio.

PEr I ducatur diameter O I V. H K λ eſt ad K θ H, vt arcus H K ω K φ ad arcum K β H, ſimiliter enim vtraque ſunt diuiſa. ſed K K I ad I I G, vt arcus H K ω K ad arcum K β H, ſicut colliges ex Pappi 19. lib. 4. idem enim diſcurſus facit pro reuolutione ſecunda qui pro prima : ergo recta H K λ in parabola eſt ad K θ H, vt



KθH, vt φKIϖ ad ϖIG: quod erit in memoriam reuocandum cùm paulò poſt ex æquo argumentabimur; ergo etiam componendo & inuertendo HθKλ eſt ad HH, vt GIϖ ad GKφ. ſed HH ipſi PH, & AG ipſi GK ex hypotheſi æqualis eſt; ergo HθK eſt ad HP, vt GIϖ ad AG: Ergo ex æquo HKλ eſt ad PH, vt φKIϖ ad AG. ergo per 24. 5. HKλ eſt ad KP, vt KIϖ ad IA. ſed vt HKλ ad KP, ſic VI, ad IO, hoc eſt per 5. Archim. de quadrat. parabol. HV ad VAH, hoc eſt in parabola λKI ad IA. Ergo vt in ſpira φKIϖ ad IA, ſic in parabola KI ad IA. Quod erat demonſtrandum.

Deinde ex diametro AB producta plures ſumantur æquales ipſi AB, vt PS, &c. & ex puncto S ductâ diametro SNL, cui AVH occurrat in L, ducantur quotcunque rectę AN, ſecantes parabolam in MM. & diametri partem LL in æquales partes in punctis N: ducantur autẽ & in ſpira reuolutionis tertię HMM quotuis rectæ AN, ſecantes ſimiliter perimetrum tertij circuli in punctis N, N, ac ſecta fuit LL, ſpiram verò in punctis MM:

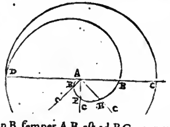
Dico rurſum rectas omnes AMN ſimiliter à ſpirali & parabola diuiſas eſſe. Quod ſimili ferè diſcurſu demonſtrabitur quo priùs.

Ex his, ſimilitudinis ſcema deduco huiuſmodi.

Segmentum parabolicum BHYAB.	Repræſentat	Secundum ſpirale ſpacium.
Triangulum HAH.		Secundum circulum.
Recta HH.		Peripheriam ſecũdi circuli HKKH.
Singulæ rectæ BH, YH, BP.		Rectam in ſpira ſecundam BH.
Rectæ in parabola AIK.		Rectas in ſpirali AIK.
Segmentum parabolicum HLXA.		Tertium ſpirale ſpacium.
Triangulum LAL.		Tertium circulum.
Recta LL.		Tertij circuli peripheriam LMNL.
Singulæ rectæ HL, XL, PS.		Tertiam in ſpira rectam HL.
Rectę AMN in parabola.		Rectas AMN in ſpirali.

PROPOSITIO V.

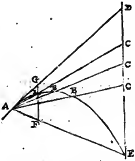
Pappi propoſ. 19. collectionum Mathem. l. 4. applicatur parabolæ.



HAnc præmitto Archimedæis, quod primam ſpiralis proprietatem, ex ipſa eius definitione immediatè profluentem contineat. Pappi ſenſus hic eſt:

Si ex ſpiræ principio A ad peripheriam circuli ducantur rectæ A B C ſpiralem ſecantes in B, ſemper A B eſt ad B C, vt arcus D C ad arcum C M D.

APPLICATIO PARABOLÆ.



SIt parabola A B E, cuius tangens ſit A D, ſubtenſa A E, ex E verò ducta diameter E D occurrens tangenti in D. Ducantur autem quotcunque rectæ A B C ſecantes parabolam in B, & diametrum in C. Itaque punctum A, in parabola, principium ſpiræ A, diameter verò D E perimetrum circuli repræſentat.

Dico A B eſſe ad B C, vt D C ad C E.

Demonſtratio.

PEr B ducatur diameter G B F, hoc eſt parallela ad D E. Per 5. Archim. de quadr. parab. vt G B eſt ad B F, ſic A F ad F E, hoc eſt A B ad B C: ſed vt G B ad B F, ſic D C ad C E. Ergo A B eſt ad B C, vt D C ad C E. Conueniunt igitur in hac prima proprietate helix & parabola. Quod erat demonſtrandum.

Huius propoſitionis demonſtratio ferè in præcedenti demonſtratione inuoluitur. Placuit tamen eam ſeorſim applicare, quòd Pappi ſit, & primam ſpiralis proprietatem contineat.

PROPOSITIO VI.

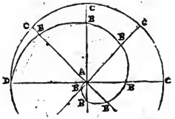
Archimedis 12. parabolæ applicatur.

AB hac Archimedem delibare incipio, quod prima ſit earum, quibus ſpiralium proprietates demonſtrantur.

Archimedes ſic habet: ſi in ſpiralem vnâ quidem circumuolutione deſcriptam à principio ſpiralis (A) rectæ quotlibet (A B C) cadant quę æquales inter ſe angulos (D A C, C A C, C A C) contineant; ſeſe mutuo æqualiter (hoc eſt exceſſu æquali) excedent.

APPLI-

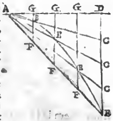
APPLICATIO PARABOLÆ.



SIt parabola A B E quam tangat A D, ſecet verò D E conueniens cum tangente in D, & parallela diametro, iungaturq; A E. Secetur deinde D E in quotlibet partes ęquales D C, C C, C C, & ex A ducantur quotlibet rectæ A B C. Linea igitur D E, repræſentat perimetrum circuli D C D; æquales verò rectæ D E partes C C, referunt æquales angulos, ſiue arcus æquales C C; rectæ tandem A B in parabola quæ protractæ abſcindunt æquales partes C C, exhibent lineas A B in ſpirali æquales angulos ſiue arcus continentes.

Dico A E æqualium ſui partium continere vnam plus, quàm ſecunda contineat A B; ſecundam verò A B æqualium ſui partium complecti vnam plus, quàm contineat tertia A B, & hanc rurſum partium ſui æqualium vnam plus continere quàm contineat quarta, & ſic deinceps.

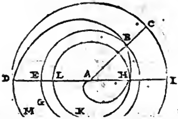
Demonſtratio.



PEr puncta B ducantur G B F parallelæ ad D E. Quoniam igitur parallelæ ſunt G B F ad D E, G B eſt ad B F, vt D C ad C E. ſed per 5. Archimed. de quadr. parab. etiam A F eſt ad F E, vt G B ad B F. Ergo A F eſt ad F E, vt D C ad C E. Patet igitur ex elementis cùm D E ſit æqualiter ſecta in punctis C, etiam E A in punctis F æqualiter eſſe diuiſam. Atque inde vlterius ob ſectarum G B F æquidiſtantiam eſt manifeſtum ſingulas A B C lineas à parallelis G B F ſectas eſſe æqualiter. Perſpicuum itaque eſt A E vnam plus æqualium ſui partium continere quam contineat ſecunda A B; ſecundam verò æqualium ſui partium complecti vnam plus, quàm contineat tertia; & ſic de cæteris. Sed cùm in ſpirali A D, A B, A B, ſeſe mutuo æquali exceſſu ſuperent, etiam prima A D æqualium ſui partium continet vnam plus quàm ſecunda A B; & hæc æqualium ſui partium vnam amplius quàm tertia A B & ſic de cæteris. Et hîc igitur ſymbolizant ſpiralis & parabola. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

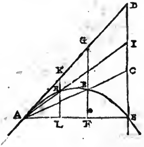
Archimedis 14. applicatur parabolæ.



SI in ſpiralem ex prima reuolutione ortam incidant duæ lineæ (A H, A B) à puncto quod principium eſt ſpiralis, & producantur ad perimetrum vſque primi circuli (in I & C) eandem rationem inter ſe habebunt iſtæ in ſpiralem incidentes, quam arcus circuli medij inter terminum ſpiræ (D) & limites linearum productarum in circumferentia factos, ſumptis in conſequentia arcubus à fine ſpiralis (hoc eſt quàm arcus, D M I, D M C.)

Ex quo ſequitur, ſi centro A per B & H ducantur circuli F B G, L H K, quod A L ſit ad A F vt arcus D M I ad arcum D M C.

APPLICATVR PARABOLÆ.



SIt parabola A B E quam tangat A D, ſecet verò diameter D E, iungaturq; A E. Ex puncto A educanrur rectæ A H I, A B C, & per puncta H, B ducantur L H K, F B G parallelæ ad D E.

Recta igitur A E circuli diametrum A D, rectę verò A H I, A B C, ductæ à principio ſpiræ A H I, A B C repræſentant, linea autem D I C E, refert peripheriam D C I ac proinde rectæ D I, D C arcus D M I, D M C exhibent. Denique parallelæ L H K, F B G referunt circulos concentricos ſeu parallelos L H K, F B G.

Dico A L eſſe ad A F, vt D I ad D C: planè vt in ſpirali A L erat ad A F, ſicut arcus D M I ad arcum D M C.

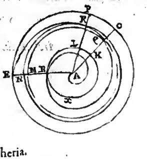
Demonſtratio.

PEr 5. Archimedis quadr. parab. vt A L ad L E ita K H eſt ad H L, hoc eſt D I ad I E; & vt A F ad F E, ita G B eſt ad B F, hoc eſt D C ad C E: Quare ex elementis patet A L eſſe ad L F, vt D I, ad I C. Ergo hic etiam conueniunt ſpiralis & parabola. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Archimedis 15. parabolæ applicatur.

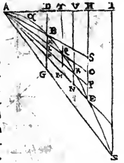


SI in helicem in ſecunda reuolutione factam rectæ (AQ, AR) ceciderint à principio helicis, eandem rationem huiuſmodi rectæ ad inuicem, quam dicti arcus (B X K, B X L) cum tota circuli (B K L) circumferentia ſimul aſſumpta habebunt.

Hoc eſt A Q erit ad A R, vt arcus B X K cũ tota peripheria B X K L, ad arcũ B X L vnà cum circumferentia tota B X K L.

Ex quo ſequitur, ſi centro A per P & R ducantur circuli QM, RN, rectam AM futuram ad AN, vt arcus B X K cum tota peripheria ad arcum B X L cum tota peripheria.

APPLICATVR PARABOLÆ.



DAta ſit parabola A B E cuius diameter ſit E H, tangens A H, quâ biſectâ in D, ex D fac D B parallelam ad H E, iunganturq; A B, A E. Patet igitur ex 4. primis propoſ. huius, ſegmenta parabolica A B, B R E F referre ſpiralia ordine ſpacia. A L B quidẽ referre primum; B R E F verò ſecundũ: Rectam quoque D B exhibere peripheriam primi circuli. Producatur modò D B in F. Quoniam A H biſecta eſt in D, etiam A E biſecta eſt in F. Quare cùm per 5. Archim. de ſpir. D B ſit ad B F, vt A F ad F E, etiam D F biſecta eſt in B, & æquales ſunt B F, B D. Cùm igitur D B referat peripheriam primi circuli, referet etiam B F.

Ducantur deinde rectæ A Q, A R ſecantes parabolam in Q & R, rectam verò D B F in K, & L; & quoniam tam B F quàm B D, vt antè oſtendi, refert primi circuli peripheriam, eius partes B K, B L referent primæ peripheriæ partes B X K, B X L. Itaque tota D K refert totam peripheriam cum arcu B X K, & tota D L totam peripheriam cum arcu B X L. Denique per Q, & R ducantur parallelæ T M, V N, quæ exhibebunt peripherias M Q, N R. Rectæ autem A M, A N ſiue A, T, A V, repræſentabunt in ſpirali rectas A M, A N.

Dico A M eſſe ad A N, ſiue A T, ad A V, vt D K ad D L.

Demonſtratio.

CVm parallelæ ſint, T M, D F; erit T Q ad Q M, vt D K ad K F; vtque V R ad R N, ſic D L ad L F. Sed per 5. Archim. de parabola, vt T Q ad Q M, ſic A M ad M E; vtque V R ad R N, ſic A N ad N E: quare vt A M ad M E, ſic D K ad K F; & A N ad N E, vt D L ad L F. Patet igitur ex elementis A M eſſe ad A N,

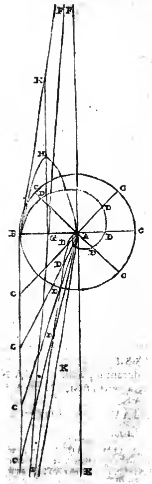
AN, vt DK eſt ad DL. Ergo hic etiam ſymbolizant ſpiralis & parabola. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

EX his perſpicuum eſt, Archimedis manifeſtum quod propoſitioni 15. ſubiungitur eodem planè diſcurſu poſſe accommodari.

PROPOSITIO IX.

Archimedis 18. *applicatur parabolæ.*

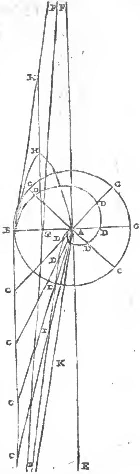


SI ſpiralem ex prima circumuolutione ortam recta linea (BF) tetigerit in termino ſpiræ (B:) à puncto verò quod eſt principium ſpiræ, quædam (AF) ducatur ad angulos rectos ei, quæ eſt principium circumuolutionis (nempè AB) ducta incidet in tangentem, & ipſius quę pars media erit (nempè AF) inter tangentem & principium ſpiræ, æqualis erit peripheriæ primi circuli (CC.)

Atque hoc eſt illud theorema, quod hactenus Geometræ admirati ſunt. Nos qua ratione conueniat parabolæ videamus.

APPLICATIO.

DVcatur AE ad angulos rectos ipſi AB, deſcribaturque parabola ADB cuius axis ſit AE, tangens verò BA. Ducta deinde BCB parallela axi, inferius occurrat parabolæ in B, iungaturque BE parallela ad BA. Denique peripheria circuli & recta BB in æquè multas æquales partes diuidantur per rectas ADC. Igitur per propoſ. 3. huius, rectæ ADC in ſpirali & parabola ſimiliter ab vtriuſque perimetro in punctis D, diuiduntur. Ex quo patet rectam BCB, prorſus peripheriam BCB repręſentare: circulum verò à triangulo ABB ſpiralem, cuius princi-



principium A, terminus B, à parabola, cuius item A eſt quaſi principium, B autem terminus, aptiſſimè exhiberi.

Tangat iam parabolam in termino ſuo B recta B F occurrens axi E A producto, in F, auferet hæc ab axe producto per 35.1.con. rectam A F, æqualem ipſi A E, hoc eſt ipſi B C B, quã oſtendimus repræſentare peripheriam circuli; planè quemadmodum tangens ſpiralem in termino ſpiræ B, auferebat ex eâdem linea æqualem eiuſdē circuli peripherię. Non minus igitur parabolæ, quàm ſpirali conuenit hæc proprietas. Quod erat demonſtrandum.

Quòd ſi A E ſiue B B æqualis ponatur peripherię primi circuli, transferaturq; parabola A D B K ad partem alteram in H, (quod fiet ſi ex G puncto medio rectæ A B erigatur pro axe G H quæ ſit quarta pars A E, ſiue A F.) Aliter, & fortaſſe adhuc maior orietur ſimilitudo. Nam ſi B F tangat parabolam in B, dico quod abſcindat A F æqualem peripheriæ primi circuli. Producatur enim axis G H in K; eritque per 35.1.con. K G biſecta in H, adeoque G K dupla eſt ipſius G H. Eſt verò & F A dupla ipſius K G, cum F A ſit ad K G, vt A B ad G B. Ergo F A quadrupla eſt axis H G. ſed etiam A E, hoc eſt ex hypotheſi peripheria primi circuli, ex conſtructione quadrupla eſt ipſius H G. Æquales igitur ſunt, recta F A, quæ aufertur à tangente parabolam, & peripheria primi circuli.

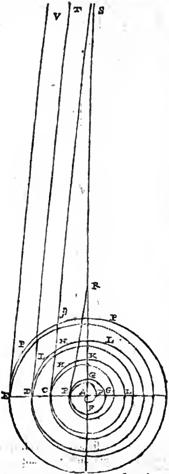
Iam ſubſumo: atqui recta, quæ ſpiralem tangit in eodem puncto B, etiam abſcindit rectam A F æqualem peripheriæ primi circuli: omnimoda igitur vtrimque ſimilitudo. Quod oportebat oſtendere.

Corollarium.

EX his ſequitur, poſito quod recta A F æqualis ſit peripheriæ axis parabolę G H quarta pars ipſius A F, lineam F B ſpiram & parabolam in eodem B puncto contingere.

PROPOSITIO X.

Archimedis 19. cum manifeſto 8. parabolæ applicatur.



AT ſi ſpiralem ex ſecunda reuolutione ortam in termino (C) tetigerit recta linea, & à principio ſpiræ (A) ducatur aliqua ad angulos rectos lineæ, quæ ſit initium reuolutionis: ipſa concider in tangenrem, & erit recta media, inter tangentem & principium ſpiræ (recta nempè AS) dupla circumferentiæ ſecundi circuli.

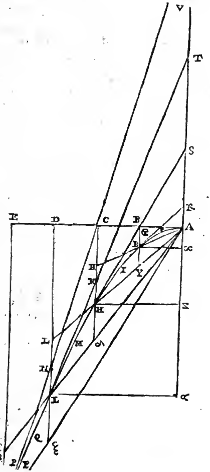
Hoc ipſum modò demonſtrandũ eſt. quod ſi ſpiralem ex quacunque circumuolutione natam tangat quędam recta in termino ſpiræ, tum ab initio ſpiralis ducatur linea recta ad principium reuolutionis, cadet in tangentem, totuplexq; erit circumferenriæ circuli, quotus eſt numerus reuolutionis denominatus ab eodem numero.

APPLICATIO PARABOLÆ.

DAta ſit ſpiralis quotuis reuolutionum & parabola, ABLP, cuius axis ſit Aα, rangens AE, ex qua ſume tot æquales partes AB, BC, CD, DE quot reuolutionibus data ſpiralis conſtat, & ex punctis B, C, D, E, ducantur diametri ſecantes parabolam in B, H, L, P, iunganturque AB, AH, AL, AP, quæ producantur in H, L, P. Paret igitur ex propoſitionibus primis, præſertim ex 4. huius, ſingula ſegmenta parabolica ABF, AHIB, ALMH ſingula ordine ſpiralia ſpacia; ſingulas verò rectas BGB, HKH, LNL, PβP ſingulas quoque ordine ſuo peripherias BGB, HKL, LNL, PβP per omnia repræſentare. Deinde punctam A principium ſpiræ, puncta verò B, H, L, P, terminos ſpirarum B, C, D, E referunt. Axis demum AX, qui normalis eſt ad AE productus exhibet lineam quæ à principio ſpiræ ad AE normalis ducitur.

Dico igitur, ſi ſegmentum parabolicum AHIB referens ſecundum ſpacium

ſpacium tangat in termino ſuo H recta HS abſcindi AS duplam rectę HKH quæ refert ſecūdam peripheriam HKH: & ſi tertium ſegmentum parabolicum ALMH repræſentans tertium ſpacium in termino ſuo L tangat LT, abſcindi AT triplam ipſius LNL, quę referebat tertiam peripheriam LNL. Atque ita deinceps ſemper, &c.

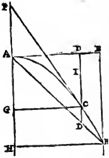


Demonſtratio.

DVcantur BX, HZ, Lα, &c. parallelæ ad AE, & BB, CH, DL, &c. producantur in γ,δ,ξ,&c. CH eſt ad HKH, vt BB ad BY, hoc eſt per 5. Archim. de ſpir. vt AY ad YH, hoc eſt vt AB ad BC. Quare, cùm ex conſtr. AB, BC æquales ſint, etiam CH, HKH æquales ſunt. Ergo CKH, hoc eſt AZ, hoc eſt per 35. 1. conico. AS, dupla eſt ipſius HKH. ſimiliter DL eſt ad LNL, vt CKH ad Hδ, id eſt vt Aδ ad δL, id eſt vt AC ad CD. Quare cùm AC dupla ſit CD ex conſtr. etiam DL dupla eſt ipſius LNL. Ergo DNL hoc eſt Aα, hoc eſt per 35. 1. conic. AT, tripla eſt ipſius LNL. Eadem erit in cæteris demonſtratio. Mirabiliter igitur rurſum ſymbolizant ſpiralis & parabola. Quod erat demonſtrandum.

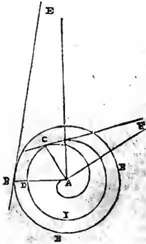
PROPOSITIO XI.

Archimedis 20. applicatur parabolæ.



SI ſpiralem in prima reuolutione factam recta linea tetigerit non in termino ſpiræ (B) à contactu verò (C) ad principium volutæ, recta iungatur (AC,) tum centro quidem principio volutæ, interuallo verò illa iuncta (interuallo nempè A C) circulus deſcribatur: à principio præterea ſpiralis agatur aliqua ad rectos angulos ei, quę à contactu ad principium helieis iungitur (nempè A F,) cadet in tangentem (C F,) & erit recta (C F) inter concurſum & principium helicis, æqualis arcui deſcripti circuli, qui intercedit inter contactum & ſectionē, qua ſecat deſcriptus circulus principium reuolutionis, capto in antecedentibus arcu à puncto, qui eſt in principio circumuolutionis (hoc eſt arcui (D I C.)

APPLICATIO.



DAta ſit ſpiralis A C B, & parabola A C B cuius axis ſit A H, tangens A B, diameter B B ſubtenſa A B. Fiat vt in ſpirali A D ad D B, ita in parabola A D ad D B, & ducatur D C D parallela B B. Quoniam igitur (vt oſtendi in 13. huius) A D B tam ſuperior quàm inferior repręſentat, primam rectam in ſpirali A D B, quemadmodum recta B B refert peripheriam B B, ita recta D C D refert peripheriam D C I D. Ex quo iam ſequitur arcum D I C exhiberi à recta D I C.

Dico igitur ſi recta quæpiam tangat parabolam in C, abſcindi ex axe producto A F æqualem ipſi, D I C, quæ repræſentabat arcum D I C, planè vt in ſpirali tangens C F auferebat A F æqualem eidem arcui D I C.

Demonſtratio.

DVcatur C G parallela ad A B, per 35. 1. Conic. F A æqualis eſt A G, hoc eſt D C. rurſum igitur habetur ſimilitudo. Quod erat demonſtrandum.

Manifeſtum Archimedis 9. quod propoſitioni 19. ſubiungitur, eâdem prorſus ratione applicandum lectori relinquo.

PRO-

PROPOSITIO XII.

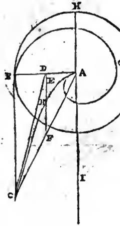
Archimedis 24. applicatur parabolæ.

COmprehenſum à ſpirali ex prima reuolutione nata & prima linea (A B) quæ principium eſt reuolutionis, ſpacium tertia pars eſt primi circuli.

APPLICATIO.

SIt A G B prima voluta cum ſuo circulo B H, & prima recta A B, deſcribatur autem parabola axem habens A I ac proinde tangentem A B, ductâque B C parallelâ axi, iunge A C. Manifeſtum igitur eſt ex ijs quę diximus 1. & 3. propoſit. ſpiralem à parabolæ ſegmento A E C, circulum verò à triangulo A B C repręſentari.

Dico A E C ſegmentum parabolę tertiam eſſe partem, trianguli A B C.



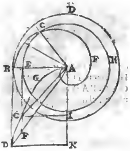
Demonſtratio.

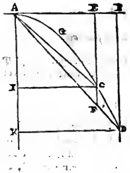
BIſectâ A B in D; iunge C D, & duc D F parallelam ad B C, hoc eſt ad A I. Per 5. Archim. de quad. parabol. D K eſt ad K F, vt A F ad F C, hoc eſt vt A D ad D B. Quare cùm A D ſit par ipſi D B, erit & D K ipſi K F. Ergo per 33. 1. Conic. C D tangit parabolam in C. Atqui parabola A B C eſt duæ tertiæ trianguli A D C cuius duo latera tangunt parabolam, (per propoſ. 137. libri noſtri de parabola) ac proinde vna tertia trianguli A B C, quod duplum eſt alterius. Igitur etiam hæc nobiliſſima ſpiralium proprietas conuenit parabolæ. Quod erat demonſtrandum.

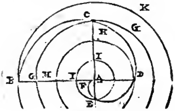
PROPOSITIO XIII.

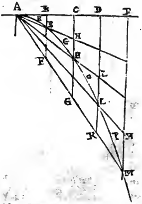
Pappi 21. l. 4. applicatur parabolæ.

PAppus l. 4. Collectionum Mathematicarum prop. 21. demonſtrat nõ ſolũ, quod fecit Archimedes, totum ſpacium ſpirale primum B C F A B tertiam eſſe partem circuli primi B H: ſed etiam ex principio ſpiræ A ductâ vtcunque A C, & centro A per C deſcripto circulo E C H, ſpacium ſpirale C F A C tertiam eſſe partem ſectoris E H C.







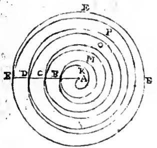


Hancquoque proprietatem in parabola demonſtrabimus. ſit enim parabola A C D cuius tangens ſit A B, diameter B D, & ducta A C, ex C duc C E parallelam ad B D. quemadmodum ergo triangulum A B D repræſentat circulum primũ A B D, ita triangulum A E F dici poterit referre circulum A E C H, proindeque triangulum A C E repræſentate ſectorem E H C, & quemadmodum parabola A C D refert ſpiralem B C F A, ita ſegmentum parabolicum A C G exhibere poterit ſegmẽtum ſpirale A F C. Quare cùm iuxta ea quæ diximus prop. præcedenti, triangulum A E C triplum ſegmenti A C G. Etiam hîc ſymbolizatio eſt manifeſta. Quod erat demonſtrandum..

Obſeruandum hîc eſt ſegmenta parabolæ A B K, A H G B, A L O H, A M P L, repræſentare poſſe non ſolùm ſingula volutę ſpacia, etiam ex pluribus reuolutionibus orta, ſed etiam eiuſdem B C D E F ſpacij ſpiralis ſegmenta, ſit vt ſegmentum parabolæ A B K reſpondeat ſegmento ſpirali A F E, ſegmentum verò A H G B ſegmento E A D & ſic deinceps. Hoc tamen vlterius annotandum: quando ſegmenta parabolica referunt ſpacia diuerſarum reuolutionnm, ſingularum reuolutionum peripheriæ (vt in præcedẽtibus ſæpius dictum) repræſentantur à lineis B B, H H, L L, M M, ipſis verò circeulis, vt prop. 4. huius diximus, triangula B A B, H A H, L A L, M A M reſpondent: quando verò ſegmenta parabolica repræſentant ſegmenta eiuſdem circumuolutionis, ſicut ante ſegmentum A B K referebat primum ſpacium B C D F F, ita iam tota parabola A M O repræſentat primum ſpacium B C D E F, & totum triangulum M A E totum primum circulum A B K exhibet quod ante faciebat triangulum B A B: peripheriæ autem ſegmentorum G G, H H, I I, à lineis D K, C G, B F, circuli quoque G A G, H A H, I A I à triangulis K A D, G A C, F A B repræſentantur. Quod hoc loco, quamuis prop. 11. huius inſinuauerim, placuit claritatis gratiâ paulò fuſius explicare.

PROPOSITIO XIV.

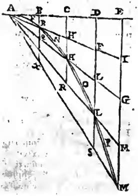
Archimedis 25. applicatur parabolæ.



SPatium ſub helica (B M C) ex ſecunda reuolutione deſcripta & recta linea ſecunda, eius quæ eſt in principio reuolutionis (B C) ad ſecũdum circulum, hanc habet rationem, quam habent 7. ad 12. quæ eadem eſt quam habent hæc duo, nempè quod comprehenditur ſub radio ſecundi circuli & radio primi circuli, & tertia pars quadrati exceſſus, quo excedit radius ſecundi circuli, radium primi circuli, ad quadratum à radio ſecundi circuli, hoc eſt quam habet rectangulum C A B cum vna tertia quadrati B C, ad quadratum A C.

Manifeſti autem Archimedis, quoniam verboſius eſt, quàm vt illud libeat deſcribere, ſenſum paucis reddo: eſto ſpiralis & quacunque reuolutione orta D E: eam habet proportionem ad ſuum circulum E, quam rectangulum D A E, vna cum quadrati D E tertia parte ad quadratum A E.

APPLICATIO.



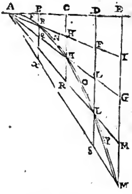
ESto parabola A H M, cuius tangens in quotlibet æquales partes in punctis B, C, D, &c. diuidatur, ductiſq; diametris B B, C H H, D L L, E M M, ex A per puncta B, H, L, M, ad parabolam poſita ducantur A B H, A H L, A L M. Patet igitur ex ſæpè iam demonſtratis, ſegmenta parabolica A B K, A H N B, &c. ſingulas reuolutiones referre, rectas verò B B, H H, L L, &c. repræſentare ſingulas ordine peripherias, ac proinde à triangulis A B B, A H H, A L L, A M M ſingulos circulos exhiberi: rectas verò A K, A L, &c. ſiue A B, A C, &c. diametris in ſpirali A B, A C, A D E reſpondere.

Dico primò ſegmentum A H N B eſſe ad triangulum A H H, vt 7. ad 12. hoc eſt vt rectangulum B A H cum vna tertia quadrati B H, ad quadratum A H.

Demonſtratio.

IVngatur B H, & producatur A H, in F, I: & B B, in Q. Triangulum H B A C (vt patet ex elementis) quadruplum eſt trianguli B A B: ſed triangulum B A B

per



per 12. huius triplũ eſt ſegmẽti B A K: Ergo H A C duodecuplum eſt ſegmenti B A K. Et quoniam per 5. Archim. de quad. parab. B B eſt ad B Q, vt A Q ad Q H, hoc eſt vt C B ad B A, eſtque A B par B C, etiam B B par eſt ipſi B Q; ac proinde & C H ipſi H H. Quare etiam triangulũ H A H æquale eſt triangulo H A C, ſed H A C, vt iam oſtendi, eſt duodecuplum ſegmẽti A B K: ergo & H A H eiuſdem eſt duodecuplum. Ergo A B H triangulum dimidium ipſius H A H, eſt ſextuplum eiuſdem ſegmenti. Atqui, vt oſtendimus in libro de parabola, a ſegmentum B H N, æquatur ſegmento A K B. Ergo A B H triangulum ſextuplum eſt ſegmenti B N H. Ex quo manifeſtum iam eſt ſegmentum parabolicũ A H N B eſſe ad triangulum H A H vt 7. ad 12. quare etiam hic, &c.

a Prop. 169. lib. de parabola.

Dico ſecundò: quoduis ſegmentum parabolicum (verbi gratia) quartum, A M P L, eſſe ad ſuum triangulũ M A M vt rectangulum L A M, vna cum vna tertia quadrati L M, ad quadratum A M.

Producantur A R L in M & A B H, A H L, in I, G & B B in X, iunganturque L M. E I eſt ad I M 2, vt B B ad B X, hoc eſt per 5. Archim. de quad. parab. vt A X ad X M, hoc eſt vt A B ad B E. ſed A B eſt ipſius B E vna tertia E I ipſius E M 2 eſt vna tertia. Ergo E I ipſius E M 2 eſt vna quarta. Rurſum M M eſt ad M E, vt S L ad L D, hoc eſt vt M S ad S A, hoc eſt vt E D ad D A. ſed E D eſt vna tertia ipſius D A. Ergo & M M vna tertia eſt ipſius M E. Ergo M M eſt vna quarta ipſius M E 2. Cùm igitur tam E I quàm M M eiuſdem M E ſint vna quarta, æquales erunt inter ſe, ac proinde etiam triangula M 2 A M, E A I æqualia ſunt. Deinde, vt patet ex elementis, triangulum B A B eſt ad triangulum E A I, vt quadratũ A B ad quad. A E. hoc eſt vt quad. D E ad quad. A E, hoc eſt vt quad. L M ad quadratum A M: ergo tertia pars trianguli B A B hoc eſt ſegmentum parabolicum A B K, hoc eſt (vt rurſum in libro noſtro de parabola oſtendimus) ſegmentum L M P, eſt ad triangulum E A I, vt tertia pars quadrati L M ad quadratum A M. Atqui antè oſtendi triangula E A I, M A M eſſe æqualia: ergo ſegmentum L M P eſt ad triangulum M A M vt vna tertia quadrati L M ad quadr. A M. Prætereà rectangulum L A M 2 eſt ad quad. A M per 1. 6. vt A L ad A M: ſed etiam par eandem, triangula A M L, M A M ſunt ad inuicem vt A L ad A M. Ergo triangulum A M L ad triangulum M A M eſt ſicut rectangulum L A M, ad quadratum A M. Quare, cùm antè oſtenſum ſit etiam ſegmentum L M P eſſe ad triangulum M A M vt vna tertia quadrati L M ad quadratum A M, erit per 24. 5. triangulum A M L cum ſegmento L M P, hoc eſt totum ſegmentum parabolicum A M P L, ad triangulum M A M vt rectangulum L A M cum vna tertia quadrati P M ad quadratum A M, hoc eſt ſegmentum parabolæ eſt ad ſuum triangulum, vt ſpirale ſpacium ad ſuum circulum.

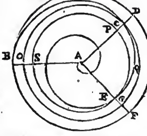
Quare in hac etiam proprietate pulcherrimè ad amuſſim ſpiralis & parabola ſymbolizant. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XV.

Archimedis 26. applicatur parabolæ.

Comprehenſum ſpacium ſub ſpirali quæ eſt minor ea quæ ex vna reuolutione fit, nec habet terminum principium ſpiralis, & rectis quæ à termi-

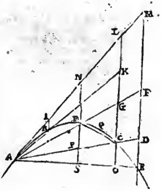
à terminis ipſius in principium ſpiralis ducuntur; ad ſectorem habenrem radium æqualem maiori earum quæ à termino ad principium ſpiralis ducitur: arcum verò qui intercipitur inter ductas rectas ſecundùm eaſdem partes ſpiralis hanc habet rationem; quam habent hæc duo, rectangulum comprehenſum ſub rectis à terminis in principium ſpiralis ductis, & tertia pars quadrati exceſſus quo maior dictarum linearum ſuperat minorem ad quadratum maioris linearum à terminis ad ſpiralis principium coniunctarum.



Senſus eſt, quod ductis à principio helicis rectis A C D, A E F; & centro A per C circulo deſcripto G C O, ſpirale ſpacium C A E ſit ad ſectorem circuli A C G vt rectangulum C A E cum vna tertia quadrati G E, ad quadratum A C.

APPLICATIO.

Esto parabola A E B, cuius tangens ſit A M, diameter M B, ſubtenſa A B; & centro A per E ducto in ſpirali circulo ſecante A B in S fiat vt in ſpira ad C D, ita in parabola A O ad O B, vtque in ſpira A E ad E F, ita in parabola A S ad S B, & per puncta, S, O ductis parallelis C L, S E N, per E & C ducantur A E F, A C D. ſpiralis igitur à parabola, diameter A B à ſubtenſa A B, peripheriæ per B, C, E, à parallelis B M, O L, S N; circuli demum A B, A C, A E, à triangulis A B M, A O L, A S N repræſentantur. Et quoniam ex conſtr. ſubtenſa A B ſecta eſt in O & S, vt diameter A B in O & S, & per 5. Archim. de quadratura parabolæ, O L, S N in C, & E, ſimiliter ſectæ ſunt vt A B in O, & S, hoc eſt vt A B in ſpirali in O, & S, hoc eſt vt A B & A F in C & E, hoc eſt per ig. l. 4. apud Pappum, vt peripheria per O in punctis C, G; manifeſtum eſt ſectorem A C G repræſentari à triangulo A C G, vti & ſpacium ſpirale A C E à ſegmento A C Q E exhibetur.



Dico igitur ſegmentum A C Q E eſſe ad triangulum A C G, vt rectangulum O A S vna cum vna tertia quadrati O S ad quadratum A O, planè quemadmodum ſpirale ſpacium erat ad ſectorem, vt rectangulum C A E cum vna tertia quadrati G E ad quadratum A C, ſiue vt rectangulum O A E cum vna tertia quadrati G E ad quadratum A O. Pro conſtructione ſume A I æqualem N L, ductâque per I diametro I H, per H

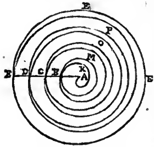
ducatur A H K, iungaturq; E C. Quibus peractis eâdem ratiocinatione concludetur propoſitum quâ in ſecunda parte propoſitionis 14. vſi ſumus. Iterum ergo conueniunt ſpiralis & parabola. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

ARchimedis propoſitio 28. ſimili ferè via applicabitur, cùm enim ſector A C G à triangulo A C G repræſentetur, manifeſtum quoque eſt illius partem P C G E à trapezio P C G E; ac proinde ſegmentum G E Q C à mixtilineo G E G C, & ſegmentum E Q C P à mixtilineo E Q C P repræſentari.

PROPOSITIO XVI.

Archimedis 27. applicatur parabolæ.



SPaciorum comprehenſorum ſub ſpiralibus & rectis lineis quæ in circulatione ſunt, tertium quidem ſecundi duplum eſt: quartum verò triplum: quintum autem quadruplũ, & ſemper quod ſequitur, ſecundùm numeros qui deinceps ſunt multiplex eſt ſecundi ſpatij.

Sumit hîc Archimedes ſpacia non more ſolito ſed pura prout inuicem non includunt. ſecundum igitur ſpacium hîc eſt, id quod dempto primo ſupereſt ex ſecundo: tertium id quod demptis primo & ſecundo & ſic deinceps. Sic loqui voluit Archimedes vt certam numerorum progreſſionem haberet. Nos hac ſpaciorum acceptione, quamuis etiam in parabola ad vnguem conueniat, quod tetrica ſit nonnihil & à communi conceptu aliena, hoc loco prætermiſsâ, ea ſolum camparabimus quæ de ſpaciis integris, ad ſenſum definitionis quintæ libri ſpiral. acceptis in hac propoſitione demonſtrantur: cuiuſmodi eſt quod quarum partium primum ſpacium eſt 1; earum ſecundum ſit 7; tertium 19; quartum 37. &c. Ex quo deducitur etiam illud, quod quarum partium primum eſt vnum, earum primum cum ſecundo ſit 8, & tria prima 27, & 4. prima 64. Quæ omnia parabolæ ad amuſſim accommodabimus.

APPLICATIO.

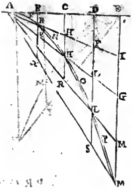
DAta ſint voluta quotlibet ſpirarum, & parabola, diameter M E, ſubtenſa A M, tangens A E in tot partes æquales ſecta, quot ſpiras habet voluta: & ab æqualium diuiſionum punctis, ducantur B B, C H H, D L L, diametro parallelæ, iunganturque A B H F I, A Q L G, A R L M.

Dico quarum partium ſegmentum primum parabolæ, cum A B E eſt 1. earum ſecundum A H N B eſſe 7; tertium 19. quartum 37.

Demon-

Demonſtratio.

Dveantur rectæ B H, H L, L M. quod primum ad ſecundum ſit vt 1. ad 7. iam oſtenſum eſt in demonſtratione prop. 14. huius. Quod autem tertium ſit 19. ſic demonſtro. Producantur C H, D L, in R, S. ex ijs quæ ſub initium demonſtrationis pro 2. aſſertione Prop. 14. allatę diximus, patet lineas S L, F D, imò & L L, L F omnes inter ſe æquales eſſe. Triangulum igitur L A L, eſt triangulum F A D, ſed triangulum F A D, cùm ſit ad triangulum B A B in duplicata ratione D F ad B B, eſt nuncuplum ipſius B A B, hoc eſt vigintiſeptuplũ ſegmẽti A B K A, vtpote partis tertiæ ipſius B A B ᵃ quemadmodum in libro de parabola demõſtrauimus: Ergo etiam triangulum L A L eſt vigintiſeptuplum ſegmenti A B K A. Cùm autẽ A C ſit ſubſeſquialtera ipſius A D, etiam A H ipſius A L, ac proinde & triangulũ A H L trianguli L A L ſubſeſquialterum eſt. Ergo cùm L A L ad ſegmentũ A B K A ſit vt 27. ad 1. L A H ad A B K, erit vt 18. ad 1. Atqui ſegmenta H L O, A B K, vt in libro de parabola ᵇ oſtẽdimus, ſunt æqualia: Ergo addito ad triangulum A H L, ſegmento H L O, totum ſegmentum A H O L A eſt ad ſegmentum A B K vt 19. ad 1.



a Ad Scholium prop. 174. de parabola.

b 169. De parabola.

Similiter demonſtrabimus triangulum M A M, hoc eſt I A E, eſſe decuploſextuplum trianguli B A B, ac proinde triangulum A M L eiuſdem eſſe duodecuplum, hoc eſt trigecuploſextuplum ſegmenti A B K: cui ſi addas ſegmentum L M P, quod æquale eſt ſegmento A B K, fiet ſegmentũ totum A M P L A ad ſegmentum A B K vt 37. ad 1.

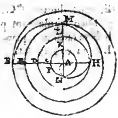
Ex quibus denique illud etiam eſt manifeſtum, quod, cũ A B K ſit 1, A H N A 7; A L O A 19, A M P A 37; ſegmentum A H N K A, hoc eſt prima duo ſint 8; ſegmentum verò A L O N K A, hoc eſt tria prima, 27: ſegmentũ autẽm A M P O N K A, hoc eſt quatuor prima ſint 64.

Quare in his quoque tam multis tamque miris proprietatibus ſpiralis, & parabola conueniunt. Quod erat demonſtrandum.

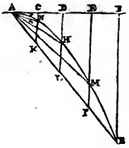
PROPOSITIO XVII.

Pappi 22. libri 4. parabolæ applicatur.

PAppus Collectionum Mathematicarum libro quarto propoſitione vigeſima ſecunda illis quæ ab Archimede propoſitione vigeſima ſeptima demonſtrantur, hoc inſuper addidit Theorema; ſi recta quæ eſt in principio circulationis producta in B, per A principium ſpiræ normaliter diuidatur recta M N, ſegmenta quoque A F N, A G N H, H A M, M A B eandem ſeruare rationem, quam 1, 7, 19, 37.



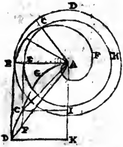
APPLICATIO.



QVod ipſum in parabola exactè repræſentatur. Diuidatur parabolæ tangens in 4. partes æquales ductiſq; diametris CK, DL, EP, BB, iunge AN, AH, AM, AB. Per ea igitur, quæ ad propoſitionem decimam tertiam huius obſeruauimus, manifeſtum eſt, ſegmentum ſpirale AFNG à parabolico AFNG, ſpirale itē ANH à parabolico AGNH,& ſic deinceps, repręſentari. Quare cū prop. 16. huius oſtenſum fuerit eam eſſe ſegmentorum parabolicorum rationem, quæ eſt inter 1, 7, 19, 37, iſtud etiam Pappi theorema exactè conuenit parabolæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Archimedis 29. applicatur parabolæ.



SI in ſpiralem ex vna reuolutione ortam à principio ſpiralis recta linea ceciderit (AC:) ſpacium comprehenſum ſub ſpirali & linea prima (AB) eam habet rationem ad ſpacium comprehēſum ſub prima ſpiralis parte (AFC) & linea incidente, (AC,) quam habet cubus primæ lineæ (AB) ad cubum lineæ incidentis (AC.)

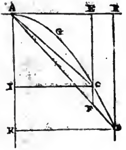
APPLICATIO.

ESto parabola AGCD,& ducto centro A circulo rectam AB ſecante in E, per E ducatur ECF diameter iungaturque AC:

Dico ſegmentum parabolæ ADG ad ſegmentum ACG, eandem habere rationem quam cubus AD, ad cubum AF: hoc eſt quam cubus BA ad cubum AE.

Demon-

Demonſtratio.



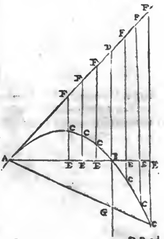
DVcatur diameter A K, & C I, F K ad diametrum ordinatim applicatæ. Quoniam igitur per 24. Archim. de quad. parab. parabolæ D A K, C A I ſeſquitertiæ ſunt triangulorum D A K, C A I, parabola eſt ad parabolam vt triangulum ad triangulum, hoc eſt, totum eſt ad totum vt ablatum ad ablatum. Ergo reliquum ſegmentum D G A eſt ad reliquum ſegmentum C G A, vt totum ad totum ſiue ablatum ad ablatum. ſed (vt demonſtrat Clauius ex Commandino ad 23. 6.) proportio ablati trianguli D A K ad ablatum triangulum C A I componitur ex proportionibus D K ad C I, & K A ad I A, hoc eſt ex duplicata rationis D K ad C I per 20. 1. Conicorum. Ergo proportio ſegmenti D G A ad ſegmentum C G A componitur ex proportionibus D K ad C I, & duplicatâ rationis D K ad C I. Ergo proportio ſegmenti D G A ad ſegmentum C G A triplicata eſt rationis D K ad C I, hoc eſt rationis B A ad E A, vel D A ad F A. Ergo proportio ſegmenti D G A ad ſegmentum C G A eadem eſt quæ cubi B A ad cubum E A, aliter autem pleraque in libro de parabola demonſtrata inuenies, ſed nolui meis demonſtrationibus propoſitiones Archimedæas contingere.

Conueniunt igitur etiam in hac tam eximia proprietate ſpiralis & parabola. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

H*Actenus parabolæ applicauimus quidquid notatu dignum de ſpiralibus vel Archimedes vel Pappus demonſtrauit. Et quidem iſta ſufficiebant vt me promiſſione mea exſoluiſſe videri poſſem. Sed cùm non exiguum ſimilitudinis campum supereſſe viderem; ſtatui alias nonnullas parabolæ proprietates viciſſim ſpirali applicare; omnino tamen paucas è multis, ne dum appendix extreſcit in librum, prolixitas lectori moleſtiam afferat.*

PROPOSITIO XIX.



EGregia eſt parabolæ proprietas quam prop. 3. de quadratura parabolę Archimedes demonſtrat, noſq; in hoc libro non ſemel citauimus. Parabolam tangat A D, & ſecet diameter eius D B, iungaturque A B. Ducantur deinde quotuis F C E parallelę diametro. Erit perpetuo A E ad E B, vt F C ad C B.

Verùm, quod Archimedes aut neglexit aut nō aduertit, eadem proprietas reperitur extra parabolam. Nam ſi producatur A B ducanturque diametro parallelę F E C, ſemper A E eſt ad E B vt F C ad C E.

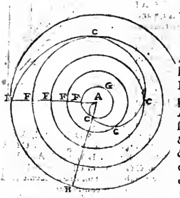
Demonſtratio.

EX A ad vnum punctorum C ducatur A G, cui D B occurrat in G F E eſt ad E C, vt

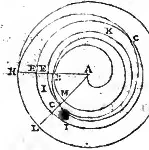
 D B ad

DB ad BG, hoc eſt per primam Theorematis partem ab Archimede demonſtratam vt AG ad GC, hoc eſt vt AB ad BE. Ergo componendo FC ad CE, vt AE ad BE.

APPLICATVR SPIRALI.



PRima pars theorematis. centro A deſcribantur quotcunque concentrici radium AB ſecantes in punctis F, & ſpiralem in punctis C. Patet igitur ex 19. Pappi l. 4. arcum FC eſſe ad reliquā peripheriam CGF, vt AF eſt ad FB. Atqui peripheria tota FEG, reſpondet in parabola rectæ FCF, & arcus FC qui extra ſpiram eſt rectæ FC extra parabolam poſitæ, arcus quoque CGF, intra ſpiram cadens rectæ CE intra parabolam. Conſtat igitur rurſum ſimilitudo. Quæ erat demonſtranda.



Secundam partem ſic applicabimus. ſit ſpira duarum reuolutionum & ducantur peripheriæ concentricæ ECK ſecantes ſpiram in punctis C. Erit igitur ductā per C rectā RML, MC ad ML, id eſt BE ad BH, vt arcus HL ad totam peripheriam ſecundi circuli, hoc eſt vt arcus EIC ad totam peripheriam ECK. ſed BH æqualis eſt AB: Ergo BE eſt ad AB vt arcus EIC ad peripheriam ECK: & inuertendo AB eſt ad BE vt peripheria ECK ad arcum EIC. Atqui peripheriæ ECK quæ totæ ſunt extra primam ſpiram, reſpondent rectis FEC, quæ totę ſunt extra parabolam: arcus verò EIC inter AH & ſpiram ſecundam poſiti reſpondent rectis EC poſitis inter rectam AE, & ſecundum parabolæ ſegmentum repræſentans ſecundam ſpiram. Manifeſta igitur eſt vtriuſque analogia: quam oportuit demonſtrare.

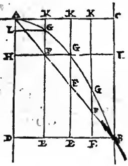
PRO-

PROPOSITIO XX.

PArabolæ A G B diameter ſit A D, ad quam ordinatim ducta ſit D B, & iungatur A B. Ducantur deinde quotuis diametro parallelæ E K ſecantes A B in F & parabolam in G:

Dico K G, K F, K E ſiue C B, eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.

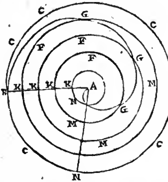


PEr G & F ordinatim applicētur L G, H F I. Quoniam D B eſt ad H F, vt D A ad H A, per 22. 6. etiam quadratum D B eſt ad quadratum H F, hoc eſt ad quadratum L G, vt quadratum D A ad quadratum H A. Atqui per 20. 1. conic. D A eſt ad L A, vt quadratum D B ad quadratum L G: ergo etiam D A eſt ad L A, vt quadratum D A ad quadratum H A: ergo ratio D A ad L A duplicata eſt rationis D A ad H A. Ex quo patet D A, H A, L A, ac proinde E K, F K, G K eſſe in continua analogia. Quod erat demonſtrandum.

APPLICATIO.

SIt iam ſpiralis A G B; & principium circulationis A B; deſcribantur quotuis primo circulo B C concentrici, ſecantes ſpiralem in punctis G, & A B in K.

Dico arcum K M G, circulum K M G F, & peripheriam B C C eſſe in continua analogia.



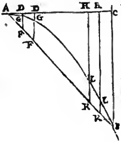
Demonſtratio.

PEr G ducatur recta A G C. Arcus K M G eſt ad periſheriam K M G F, vt arcus B C C N ad peripheriam totam B C C, ſed arcus B C C N eſt ad peripheriam B C C, ſicut recta A G ad A C, per 19. Pappi lib. 4. ergo arcus K M G eſt ad peripheriam K M G F, vt A G ad A C, hoc eſt per Pappi 11. lib. 5. vt peripheria K M G F ad peripheriam B C. Quod erat demonſtrandum.

Similitudo in eo ſita, quod peripheriæ parallelæ id eſt concentricæ K M G F referant parallelas K F, K F (vt prop. 13. huius declarauimus:) Arcus verò K M G qui ſunt extra ſpiram referant lineas K G extra parabolam: Peripheria denique B C rectam C B, ſiue K E repræſentet.

PRO-

PROPOSITIO XXI.



PArabolam ſubtendat quæuis recta AB, & ſumptis æqualibus AF, BK, ducantur diametri DGF,HLK.

Dico ſemper FG, KL eſſe æquales.

Demonſtratio.

a 47. De parabola.

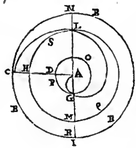
ESt GF ad LK, vt rectangulum AFB ad rectangulum AKB.vti demonſtrauimus in libro de a parabola. Atqui rectangula ſunt æqualia, cum ex hypoth. AF, KB æquales ſint. Ergo & rectæ FG, KL, æquales ſunt.

APPLICATVR SPIRALI.

SVmptis in recta AC æqualibus AD, CH, centro A per D & H, deſcribantur peripheriæ concentricæ ſecantes ſpiralem in G & L.

Dico arcum GOD arcui HL æqualem eſſe.

Demonſtratio.



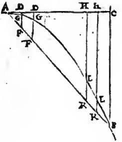
PEr G & L ducantur rectę AMB, ALN. Peripheria HQLS eſt ad arcum LSH, vt AN ad LN per 19. Pappi l. 4. hoc eſt vt AC ad HC, hoc eſt quia ex hypoth. æquãtur HC, AD, vt CA ad DA, ſed ratio CA ad DA, componitur ex rationibus CA ad HA, & HA ad DA: Ergo ratio peripheriæ HQLS ad arcum LSH componitur ex hiſce duabus rationibus CA ad HA, & HA ad DA. Similiter ratio eiuſdem peripheriæ HQLS ad arcum GOD, componitur ex rationibus peripheriæ HQLS ad peripheriam DGO, (hoc eſt per 11. l. 4. Pappi, radij HA ad radium DA) & peripheriæ DGO ad arcum GOD (hoc eſt rectæ CA ad HA:) nam arcus DPG eſt ad arcum GOD vt arcus CBI ad arcum BIBC, hoc eſt per 19. Pappi lib. 4. vt AG ad GB: ergo componendo peripheria DGO eſt ad arcum GOD, vt AB ad BG; hoc eſt vt AC ad CD, hoc eſt vt CA ad HA. Ex ijſdem igitur rationibus componitur ratio peripheriæ HQLS ad arcum LSH, & ratio eiuſdem peripheriæ HQLS ad arcum GOD: quare eandem ad vtrumque arcum peripheria HQLS rationem habet. Ergo æquales ſunt arcus illi. Quod erat demonſtrandum.

Similitudo in eo poſita, in vtraque figura ſumptæ fuerunt æquales, in parabola nempè AF, BK, in ſpira AD, CH, peripheriæ per D, & H referunt diametros DF, HK Tam arcus verò GOD, LSH, qui oſtenſi ſunt æquales eſſe, quàm lineæ FG, KL, quas ſimiliter æquales eſſe demonſtrauimus, intra figuras ſuas exiſtunt, arcus nempè intra ſpiram, lineæ verò intra parabolam.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Iſdem poſitis quæ ſuperiori propoſitione,
. Dico D G,G F,L H eſſe proportionales.



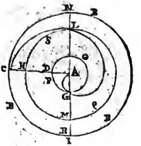
Demonſtratio.

HAnc propoſitionem eog or ex meis lucubrationibus demonſtrare,eo quod Archimedis non ſimilius demonſtrationem reperies propoſitione centeſima ſeptuageſima libri noſtri de parabola.

APPLICATVR SPIRALI.

Iſdem quoque poſitis in ſpirali,
Dico ſemper arcus D P G , G O D , H Q L eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.



ARcus DPG eſt ad arcum GOD, vt arcus C B I ad arcum B I N C hoc eſt per 13. Pappi lib.4. vt A G ad G I, ſiue A D ad D C. ſimiliter arcus H Q L eſt ad arcum L S H, vt arcus C I N ad arcum, C N hoc eſt vt A L ad L N, ſiue A H ad H C. ergo inuertendo arcus L S H eſt ad arcum L Q H, vt C H ad H A , hoc eſt vt A D ad D C, (cùm ex hypoth. C H, A D,ſint æquales) hoc eſt, ſicut iam oſtendimus vt arcus D P G ad arcum G O D : ſed arcus H S L per præced. æqualis eſt arcui G O D ; ergo etiam arcus G O D eſt ad arcum H Q L, vt arcus D P G ad arcum G O D. ſunt igitur tres arcus D P G, G O D, H Q L in continua analogia. Quod erat demonſtrandum.

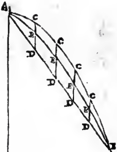
Similitudo in eo poſita quod arcus D P G extra ſpiram, rectam D G extra parabolam ; arcus D O G intra ſpiram rectam G F intra parabolam ; arcus denique H Q L iterum extra ſpiram, rectam H L rurſum quoque extra parabolam repræſentent.

Corollarium.

EX poſitis licet inferre etiam ſpatium ſpirali linea & circuli perimetro D B G, terminatum æquari ſpatio ſpirali L C & arcu L H clauſo : & in hoc ſymbolizatio perſeuerat, nam A G F, L B K parabolica ſpatia inter ſe ſunt æqualia.

PROPOSITIO XXIII.

SIt parabola A C B, quam ſubtendat A D B. Ducantur diametri C D, quas biſeca in punctis E.
Dico puncta E eſſe ad parabolam, quæ ſit dimidia primæ.



Demonſtratio.

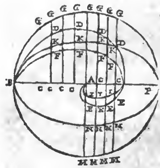
a 47. De parabola.

REctangula A D B inter ſe eandem habent proportionem quam rectæ C D; vt a oſtendimus in libro de parabola. ſed rectæ E D ſunt inter ſe vt rectæ C D, cùm ſint earum dimidiæ: ergò & rectæ E D ſunt inter ſe vt rectangula. Ergo puncta E ſunt ad parabolam per propoſit. 329. de parabola. Quod erat primum.

Cogitentur deinde in parabola A C B ductæ eſſe rectæ C C, in parabola verò A E B rectæ E E, ſic vt vtrique inſcripta ſint trapezia C C D D E E, D D. facilè oſtendetur (quod breuitatis cauſa hîc omitto) tot duci poſſe diametros C D ac rectas E E, & tot proinde Trapezia inſcribi, vt ſi auferantur, ex vtraque parabola relinquantur ſuperficies minores datâ. Atqui Trapezia parabolæ A C B ſimul ſumpta dupla ſunt, Trapeziorum parabolæ A E B ſimul ſumptarum, vt patet ex elementis cum rectæ C D duplæ ſint rectarum E D ergo per ea quæ in libro b progreſſionum demonſtrauimus, parabola A C B dupla eſt parabolæ A E B. Quod facilè etiam quiuis Geometra Archimedæo diſcurſu aut Euclidæo lib. 12. demonſtrabit. Puncta igitur E ſunt ad parabolam quæ dimidia ſit primæ. Quod erat demonſtrandum.

b 81. De progreſſ.

APPLICATVR SPIRÆ.



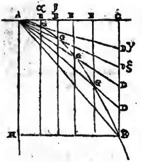
INtra ſpiralem A E D B ducantur D C, D C; E C, E C parallelæ inter ſe, adeoque normales ad rectam C A B, & biſecentur in punctis F, F, I, I.

Dico puncta F F; I, I eſſe ad ſpiralem, quæ dimidia ſit ſpiralis primæ ac proinde etiam hic ſpiralem cũ parabola ſymbolizare: ſed hæc ſecunda ſpira non erit circularis, at elliptica. Quod futura ſit dimidia ſpiralis primæ eodem modo demonſtrabitur quo in parabola. Quod futura ſit ſpiralis elliptica ſic oſtendo. Rectæ D C, D C; E C, E C producantur vſque ad peripheriam circuli in G & M; & biſeca rectas G C in K. rectas verò M C in N. Erunt puncta K, K; E, E ad ellipſim vt colligitur ex Archimed. 5. de conoid. Quoniam igitur rectę D C ſunt ad rectas F C, vt rectæ G C ad rectas K C, nam ex conſtructione vtræque biſectæ ſunt. Erunt permutando & inuertendo rectæ K C ad rectas F C, vt rectæ G C ad rectas D C. Similiter oſtendemus rectas N C eſſe ad rectas I C, vt rectæ M C ad rectas E C. habet igitur ſeſe quoad hanc proprietatem ellipſis ad ſpiralem ſecundam, vt circulus ad primam. Sed clarius adhuc oſtendamus propoſitum. Per Archimed. 5. de Conoid. circulus G Q eſt ad ellipſim K K, vt B P, hoc

eſt

eſt G A M, ad K A N hoc eſt vt G A ad K A. Quare cùm ex hypotheſi G A biſecta ſit in K, circulus duplus erit ellipſeos, ſed etiam ſpiralis prima dupla eſt ſecundę. Ergo vt circulus ad ellipſim ita ſpira prima ad ſecundam: & permutando vt circulus ſe habet ad ſpiram primam hoc eſt ſuam, ita ellipſis ad ſecundam hoc eſt etiam ad ſuam, ac proinde ſicut circulus triplus eſt ſui ſpacij nempè ſpiralis ſpacij, ſic & ellipſis tripla erit ſpiralis ſpacij ſui A I F B. Meritò itaque dicetur ſpiralis elliptica. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV.



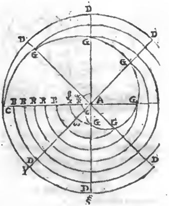
PArallelogrammum rectangulum A E habeat latera A C, C E ſimiliter diuiſa in punctis B, & D, ductiſque B Q parallelis ad A H, ex A per puncta D deſcribantur rectæ quæ parallelis occurrant in punctis G.

Dico puncta G eſſe ad parabolam.

Demonſtratio.

PArallelarum vna B G producatur donec occurrat ipſi A E in puncto F. A F eſt ad F E, vt A B ad B C, ſed A B eſt ad B C vt C D ad D E, ſunt enim A C, E E ſimiliter ſectæ ex hypotheſi. Ergo A F eſt ad F E, vt C D ad D E; hoc eſt (quemadmodum ex elem. facilè demonſtrabitur) vt B G ad G F. Ergo patet ex 5. Archim. de quadratura parab. punctum G eſſe ad parabolam. Similiter oſtendemus de quibuslibet punctis D. Patet igitur propoſitionis veritas.

APPLICATIO SPIRALI.



PEripheria primi circuli eiuſque radius A C ſimiliter ſint diuiſa in punctis D, D, & B, B: Ductis autem ex centro A ad puncta D rectis A, D, centro A per ſingula puncta B ducantur arcus B G, ea ratione quam figura exhibet, occurrentes lineis A D in punctis, G:

Dico puncta G ad ſpiralem eſſe.

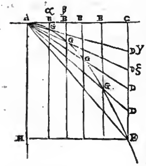
Demonſtratio.

CVm enim radius A C, & peripheria circuli ſimiliter ſint diuiſæ in punctis, B, B, & D D, erit vt A B, ad B C, hoc eſt vt A G ad G D, ita arcus C D ad reliquam peripheriam D D C. Ex quo patet punctum G ad ſpiralem eſſe. Similiter oſtendemus de reliquis G punctis.

Similitudo in eo ſita, quod A ſpiræ principium puncto A in parabola; radius A C, &

peripheria D D, ſimiliter diuiſæ, rectis A C, CE ſimiliter quoque ſectis; arcus concentrici B G, B G parallelis B G; rectæ demum A D in ſpirali, rectis A D in parabola reſpondeant ad amuſſim quemadmodum ad propoſ. 13. huius docuimus. Conuenit igitur ſpiralis cum parabola. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.



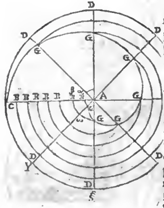
Parabolę tangens ſit A C, diametri verò illam ſecantes B G, B G quotcunque. Per puncta G, G, ex A ducantur rectę quæ occurrant diametrorum vltimæ C E, in punctis D D:

Dico rectas A C, CE ſimiliter eſſe ſectas & æquales proinde fore omnes D D, ſi B B fuerint æquales.

Demonſtratio.

IVngatur A E, & parallelarum vna B G occurrat ipſi A E in F. A B eſt ad B C, vt A F ad F E, hoc eſt per 5. Archim. de quad. parab. vt B G ad G F; hoc eſt vt C D ad D G. ſimiliter oſtendemus in ſingulis punctis, B, B & D, D ſimiliter eſſe ſectas rectas A C, C E. Conſtat igitur veritas theorematis.

APPLICATIO SPIRALI.



SIt ſpiralis A G C: & centro A ductę ſint quotcunque concentricæ peripheriæ B G occurrentes ſpirali in punctis G, G; ducantur autem ex A per puncta G, ad primi circuli peripheriam rectæ A D, A D.

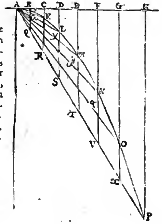
Dico peripheriam D D D, & rectam A C ſimiliter eſſe diuiſas. demonſtratio ſimilis eſt demonſtrationi præcedentis petita ex ipſa generatione ſpiralis. Similitudo in eo ſita, quod peripheriæ B G, concentricæ ſeu parallelę, parallelas ſeu diametros B G; rectæ A C, ipſam A C in parabola, & peripheria D D D extimam diametrum C E repręſentet. Rurſum igitur conuenit ſpiralis cum parabola. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

DAta ſit parabola A M P, quam tangat A H diuiſa in continuè proportionales A B, A C, A D, &c. ductiſque diametris B I, C K, D L, E M, &c. iunge A I, A K, A L, A M, &c.

Dico ſegmenta omnia parabolica A I, AIK, AKL, AIKLM, AIKLMN, eſſe continuè proportionalia.



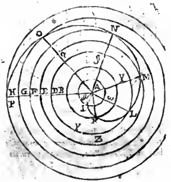
Demonſtratio.

QVoniam ſunt in ratione continua lineæ A B, A C, A D, &c. etiam cubi harum linearum erunt in proportione continua. Atqui per 18. huius ſegmēta tota parabolica A I, A K I A, A L I A, A M I A, &c. eandem inter ſe proportionem habent quā cubi AB, AC, AD, AE, &c. Ergo etiam dicta ſegmenta ſunt in continua. Ergo per 1. l. noſtri progreſſionum etiam ſunt illorum differentiæ, ſegmenta nempè A I, A I K, A K L, Aω LM, &c. continuè proportionalia. Quod erat demonſtrandum.

APPLICATVR SPIRALI.

DAta ſit ſpiralis A I N H, cuius linea, quæ eſt in principio circulationis, nempè A H diuiſa ſit in continuè proportionales AB, AC, AD, &c. ac centro A interuallis B, C, D, E, F, G deſcriptis circulis qui ſpiram ſecent in I, K, L, M, N, O, iungantur A I, A K, A L, &c.

Dico ſegmenta omnia ſpiralia A I, A I K, A I K L, A I K L M, &c. eſſe continuè proportionalia.

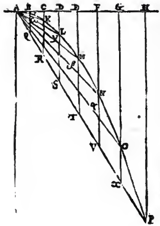


Demonſtratio.

PLanè eadem quæ in parabola, ſeruatis etiam iiſdem vtrobiq; litteris: quandoquidem enim per 29. Archim. de ſpirali, ſegmenta ſpiralia tota AβI, AKβA, ALβA, AMβA, &c. vt cubi rectarū A I, A K, A L, A M, &c. hoc eſt rectorum A B, A C, A D, A E, &c. ſintque hi in continua, ob continuam ſuorum laterum rationem, etiam dicta ſegmenta ſpiralia erunt in continua ratione; ac proinde eorum differentiæ ſegmenta nempè A H O α A, A O N β A, A N M γ A, &c. erunt continuè proportionalia. Quod erat demonſtrandum.

Symbolizat igitur rurſum mirabiliter vtraque figura. Nam A K in ſpirali ipſi A H in parabola ſiue A P : B I Q, verò C K R, D L S, &c. peripherijs B I, C K, D L, &c. reſpondent. Vnde & ſegmenta ſegmentis reſpondeant neceſſe eſt.

PROPOSITIO XXVII.

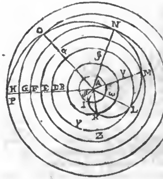


SIt parabola AMP quàm tangat AH. Ducantur diametri BI, CK, DL & quotuis aliæ ſecantes parabolam in punctis I, K, L, &c. iungánturq́; AI, AK, AL, AM, &c.

Dico ſegmenta omnia parabolica contenta parabolæ perimetro & rectâ ſubtenſa, nempè AI, AKIA, AILαA, AIMγA, &c. omnibus triangulis ABI, ACK, ADL, &c. eſſe proportionalia.

Demonſtratio petenda ex ijs, quæ diximus prop. 12. huius, quæq́ue ſub finem libri de parabola demonſtrauimus propoſitione 236. ſingula illa triangula eſſe tripla ſingulorum ſegmentorum ſibi incluſorum.

APPLICATIO.



SIt iam ſpiralis ANH; & centro A ductis quotcunque concentricis ſpiralem ſecantibus in punctis, I, K, L, M, &c. iungantur AI, AK, AL, AM, &c.

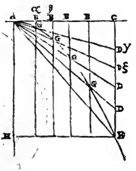
Dico ſegmenta ſpiralia AβI, AβIKA, AβILαA, AβIMγA, &c. ac denuo totum ſpirale ſpacium ſectoribus ABI, ACK, ADYL, AEZM, &c. Et toti denique primo circulo proportionalia eſſe.

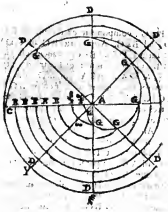
Demonſtratio facilis eſt ex ijs quæ à Pappo l. 4. prop. 21. & ab Archimede prop. 24. demonſtrantur: ſinguli enim ſectores tripli ſunt ſegmentorum ſpiralium ſibi incluſorum; totus etiam primus circulus, ſpiralis ſpacij totius triplus eſt. Ex quibus patet propoſitum. Similitudo etiam ex prop. 13. & alibi ſæpius iam repetitis eſt manifeſta; triangula enim ABI, ACK, &c. ſectoribus ABI, ACK ac cætera cęteris in vtraque figura reſpondent.

PROPOSITIO XXVIII.

Sit parabola A G E, quam tangat A C, ſecet verò diameter C E, iungaturque A E. Ducantur deinde quotuis diametri occurrentes parabolæ in G; punctis G G ducanturque A G D:

Sit quoque ſpiralis A G G & primus circulus C D D, radius A C. Centro autem A ducantur totidem arcus concentrici quot in parabola ductæ fuerant diametri, qui ſpirali occurrant in punctis G, & radium A C ſimiliter diuidant in punctis B, vt ſecta fuerat in parabola A C. Denique ex A per G puncta ducantur rectæ A G D.



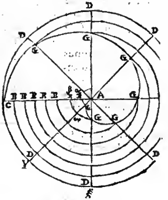


Dico primò omnes rectas A G D in ſpirali ſimiliter eſſe diuiſas quemadmodum ſunt A G D in parabola. Diametrum quoque C E in parabolâ & peripheriam C D D ſimiliter eſſe ſectas, ac proinde lineas C D, D D, D E, arcubus G D, D D, D C, eſſe proportionales; in ſpirali enim A G ſunt ad G D, vt A B ad B C, hoc eſt ex datis, vt A B ad B C in parabola, hoc eſt vt A G ad G D, quod erat primum. Deinde per 19. Pappi lib. 4. arcus C D Y eſt ad peripheriam reliquam vt A G ad G D, hoc eſt vt A B ad B C, hoc eſt ex datis vt in parabola A B ad B C, hoc eſt per 25. huius vt C D ad D E. ſimiliter igitur diuiſæ ſunt recta C E & peripheria D D, quod erat alterum è demonſtrandis.

Dico ſecundò ſingulas diametros B G, B ω G, &c. ſingulis arcubus concentricis B G, B ω G, &c. eſſe proportionales.

Demon-

Demonſtratio.

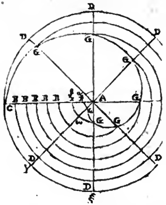


RAtio BG ad BωG, componitur ex rationibus BG ad CDY, & CDY ad CDξ, & CDξ ad BωG. Atqui ratio BG ad CDY, eadem eſt cum ratione ABα ad AC: & ratio CDξ ad BωQ, eadem eſt cum ratione AC ad ABβ, ergo ratio BG ad BωG, componitur ex his tribus rationibus ABα ad AC, & & CDY ad CDξ, & CA ad BβA. Similiter ratio arcus BG ad arcum BωG componitur, ex his tribus rationibus, arcus nempè BG ad arcum CDY, (hoc eſt rectæ ABα ad AC) & arcus CDξ ad arcum BωG (hoc eſt rectæ AC ad rectam ABβ.) Atque hæ tres rationes æquantur tribus prioribus; nam ratio ABα ad AC, in ſpirali eadem eſt cum ratione ABα ad AC in parabola, & ratio arcus CDY ad arcum DYDξ per Aſſert. 1. eadẽ eſt cum ratione rectæ CDY ad rectam DYDξ. adeoque etiam componendo ratio arcus CDY ad arcum CDξ eadem eſt cum ratione rectæ CDY ad rectam CDξ: Denique ratio AC ad ABξ, in ſpirali eadem eſt cum ratione AC ad ABβ in parabola. Ergo cùm ratio rectæ BG ad BωG, & ratio arcus BG ad arcum BωG ex iiſdem rationibus componantur, eædem ſunt ſiue æquales. Simili diſcurſu oſtendam ſingulas rationes rectarum cæterarum BG ad BG, eaſdem eſſe cum rationibus ſingulis cæterorum arcuum BG ad BG. Quare diametri BG, BG, arcubus BG, BG, proportionales ſunt: quod erat demonſtrandum.

Dico tertiò. Singula triangula CAD, DAD, ſectoribus ſingulis CAD, DAD proportionalia eſſe, triangula enim ſe habent vt baſes CD, DD, & ſectores vt arcus CD, DD. Sed lineæ CD, DD, arcubus per Aſſert. 1. præced. ſunt pro portionales. Ergo & triangula ſectoribus proportionalia ſunt.

Dico 4. Singula triangula BAG, BAI, &c. vna cum poſtremo CAE ſingulis ſectoribus BAG, &c. vna cum circulo toto primo proportionalia eſſe.

Demonſtratio.



Triangula B A G, B A G cùm angulum ad B æqualem habeant, rationem habent adinuicem compoſitam ex laterum AB, B G, rationibus, vt demonſtrat Clauius ad 23. 6. Similiter ſectores B A G, B A G adinuicem rationem habent compoſitam ex rationibus ſemidiametrorum A B, A B, & arcuum B G, B G. Atqui ex hypotheſi ratio AαB in parabola ad AβB, æqualis eſt rationi AαB ad AβB in ſpirali; ratio item B G diametri ad diametrum BωG, eadem eſt cum ratione arcus B G ad arcum BωG per Aſſert. 2. propoſit. præcedent. Ergo ratio compoſita ex rationibus, AαB ad AβB, & B G ad BωG, hoc eſt ratio triangulorum ABG, AβBG eadem eſt cum compoſita ex rationibus AαB ad AβB in ſpirali, & arcus B G ad arcum BωG; hoc eſt cum ratione ſectoris AαBG, ad ſectorem ABωG. Igitur permutando patet triangula ſingula B A G ſingulis B A G ſectoribus eſſe proportionalia. Quod erat demonſtrandum.

Dico quintò. Singula ſegmenta parabolica quæ lineis rectis A G, & curuis A G G continentur, ſingulis ſpiralibus ſpaciis quæ viciſſim lineis rectis A G & curuo ſpiralis ambitu A G G, continentur eſſe proportionalia.

Nam ſingula ſegmenta parabolica per 27. huius ſingulis triangulis B A G ſunt proportionalia. Rurſum per eandem ſingula ſpiralia ſpacia ſingulis ſectoribus B A G proportionalia ſunt. Atqui per Aſſert. quartam triangula ſingula B A G, ſectoribus B A G ſingulis proportionalia ſunt. Ergo & ſegmenta parabolica ſegmentis ſpiralibus ſunt proportionalia. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

Vides benigne Lector ſymbolizationes inter duas figuras ſpiralem & parabolicam eſſe tales qua magnam ſuſpicionem homini mouere ſint nata. Archimedemq; huc via in cognitionem linea qua perimetro circuli aqualis eſſet, deueniſſe.

QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER SEPTIMVS

DE DVCTV PLANI IN PLANVM.

ARGVMENTVM.

DIuiditur liber hic omnis, in decem partes.

Prima ſuperficies exhibet & communes interſectiones, ortas ex ductu rectilinei in rectilineum: deinde corpora ſic producta inter ſe comparat.

Secunda ſuperficies contemplatur & communes interſectiones, natas ex ductu plani circularis in rectilineum: & corpora ſic producta exhibet.

Tertia vniuerſales quaſdam continet propoſitiones, reliquis fundamentales.

Quarta in comparationem adducit corpora, orta ex ductu rectilinei in rectilineum, cum illis quæ exſurgunt ex ductu partium circularium in ſe, vel in alias circulares.

Quinta agit de æquationibus ſolidorum, quæ gignuntur ex ductu partium circularium, in alias circulares.

Sexta ampliorem continet comparationem corporum ex ductu plani circularis in circulare, cum iis, quæ oriuntur ex ductu partium circularium in ellipticas, parabolicas, hyperbolicas.

Septima contemplatur corpora nata ex ductu plani parabolici in parabolicum.

Octaua corpora huc vſque ex vario planorum inter ſe ductu nata, reducit ad corpora determinatam habentia altitudinem & baſim, vt eorum notitia habeatur.

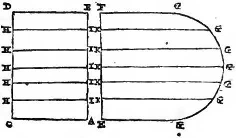
Nona vſum docet & praxim libri huius; illique applicat lineares propoſitiones, partim ex Euclide & Pappo Alexandrino, partim ex primo libro noſtro petitas.

Decima parabolas exhibet virtuales: quæ, quales & cui vſui aptæ ſint, ſuo loco patebit.

I.

DVctum plani in planum voco, corporis cuiuſcunq; efformationem, ex duabus ſuperficiebus eandē habentibus aut æqualē baſim ortam.

EXPLICATIO.

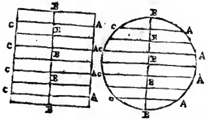


POnantur ſuperficies duæ A B C D, E F G, æquales habentes altitudines A B, E F: quibus proportionaliter ſeu in eadem ratione diuiſis, ducantur ipſis A B, E F orthogonæ & inter ſe parallelæ I H, K G: intelligatur verò plano A B C D, planum, E F G ad angulos rectos imponi, ſecundùm lineas A B, E F: deinde B D, I H, A C lineas, ductas in E G, K G, F G, rectangula producere quorum baſes ſunt B D, I H, A C, altitudines verò E G, K G, F G: patet ex illa rectangulorum constructione corpus produci cuius baſis eſt rectangulum A B C D & altitudo planum E G F: porrò corpus illud voco, corpus ortum ex ductu plani in planum. quod autem aſſumam ſuperficies, & ſingulas lineas in alias duci ad angulos rectos, id facilitatis cauſa præcipuè feci, & vt certa ac determinata in omni ſuperficierum in inuicem ductu inclinatio ſeruaretur: vnde in poſterum ductum omnem ſuperficierum & linearum in ſe vel in alias, ad angulos rectos fieri, ſupponam.

I I.

Ductum plani in ſe voco, cū data ſuperficies plana in aliam ſibi æqualem ac ſimilem ſimiliterq; conſtitutam ſecundùm omnes partes, ducitur.

EXPLICATIO.



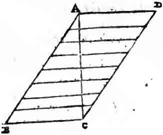
SIt A B ſuperficies quæuis, cui addatur in directum, æqualis ac ſimilis ſimiliterque poſita figura B C; corpus igitur ex ductu ſuperficiei A B in ſe, idem eſt cum corpo-

corpore orto ex ductu A B plani in planum B C; cùm ſingulæ lineæ A B ductæ in ſe, idem producant, quod A B ductæ in B C. vnde definitio hæc ferè cum prima coincidit.

III.

Ductum plani in ſe ipſum ſubalternè, voco cùm plana ſuperficies ducitur in aliam æqualem ſibi ac ſimilem, non ſimiliter tamen conſtitutam, ſed inuersè.

EXPLICATIO.



Sit A B C triangulum cui adijciatur in directum triangulum A D C, æquale ac ſimile, diſſimiliter tamen conſtitutum: corpus ex A B C ductum in ſe ſubalternè, voco corpus ortum ex ductu A B C, in planum A D C, inuersè poſitum: quantum autem differat planum ductum in ſe, ab eodem ducto in ſe ſubalternè, ſuo loco patebit.

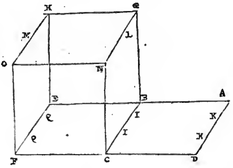
DVCTVVM PLANI
IN
PLANVM
PARS PRIMA

Superficies primò exhibet, & quales ſint determinat, vti & communes interſectiones ortas ex ductu rectilinei in rectilineum: deinde corpora ſic producta inter ſe comparat.

PROPOSITIO PRIMA.

QVadratum in ſe ductum, producit cubum.

Demonſtratio.



QVadratum ABC ductum in ſe, id eſt per ſecundam huius ~~diſtinctionem~~ definitionem in quadratum BEFC, illi æquale & indirectum appoſitum, exhibeat figuram BGHON: dico illam eſſe cubicam. ponantur quoruis lineæ KIQ æquidi-
a Ex 1. Defin. huius. ſtantes ABE. AB linea ducta in BE planum [a] exhibet BGHE rectum ad planum BEFC; ſimiliter KI ducta in IQ, planum producit ILMQ, rectum ad idem planum BEFC: normales igitur ſunt BG, IL lineæ ad planum BEFC, adeoque
b 6. Vndecimi. [b] parallelę: & quia puncta BIC indirectum ſunt lineæ BG, IL in eodem ſunt plano: ſimiliter HE, MQ lineę, rectæ ſunt ad planum BEFC, & inter ſe æquidiſtantes, & in eodem plano, & quia GB, LI, NC lineæ, æquales ſunt rectis AB, KI
c Ex elementis. inter ſe æqualibus, æquales quoque ſunt lineæ GB, LI, NC, & puncta [c] GLN in
d Per elementa. directum: ſimiliter puncta HMO in directum ſunt. quare & GH, LM, NO in eodem quoque [d] ſunt plano. eadem de cauſa rectæ GH, LM, NO æquales ſunt BE, IQ, CF, id eſt AB, KI, id eſt GB, LI, NC; quadrata igitur ſunt plana GC, GO, HF ac proinde anguli HGB, HGN, GBC, GBE recti ſunt: vnde corpus GHOFEBC, cubus eſt; quadratum igitur in ſe ductum, producit cubum. Quod erat demonſtrandum.

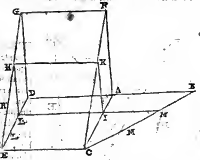
PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO II.

TRiangulum rectangulum ductum in quadratum, aut rectangulum eiuſdem altitudinis, producit corpus, habens quatuor hædras planas quarum communes interſectiones, lineæ ſunt rectæ.

Demonſtratio.



TRiangulum rectangulũ A B C, ductum in rectangulum, aut quadratum A D E triangulo in directum appoſitum figuram producat F G E C A D; dico itaque F A C, G D E, F G C E ſuperficies eſſe planas, & G H E, F K C communes interſectiones, lineas eſſe rectas. ponantur quotuis M I L, æquidiſtantes B A D, [a] recta B A ducta in A D, planum producat A F G D, rectum ad planũ A D E C; ſimiliter M I ducta in I L, planum producat rectangulum I K H L ad rectos angulos plano A D E C, lineæ igitur F A, K I, rectę quoque ſunt ad planum A D E C, & inter ſe parallelæ: quia verò F A æqualis eſt A B, & I K rectæ M I æqualis, vt B A ad M I, id eſt A C ad I C, ſic F A ad K I: in directum igitur ſunt puncta [b] F K C: & F A C ſuperficies plana eſt. ſimiliter oſtenditur, puncta G H E eſſe in directum, & G D E ſuperficiem eſſe planam. deinde quia G D lineæ æqualis eſt F A, & L H ipſi K I æqualis, æquidiſtant autem F A, K I, ipſiſque G D, H L, rectæ F G, K H [c] æquales ſunt A D, I L, & F G, K H, C E lineæ in eodem ſunt plano, Triangulum igitur rectangulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] Ex 1 definit. huius.

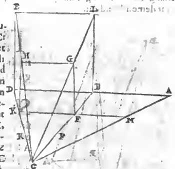
[b] Ex elementis.

[c] Ex elementis.

PROPOSITIO III.

TRiangulum rectangulum in ſe ductum, pyramidem producit quæ baſim habet quadratam.

Demonſtratio.



TRiangulum rectangulum A B C, ductum in ſe, figurã exhibeat B L E D C: dico illam eſſe pyramidẽ quæ baſim habet quadratam. A B ducta in ſe vel in B D illi æqualem, quadratum producit, rectum [d] ad planum B C D. Similiter M F ducta in ſe vel in F K, quadratum producit rectum ad planum B C D, cùm igitur ex hypotheſi, rectæ B D, F K parallelæ ſint, æquidiſtant [e] plana B L E D, F G H K: & rectæ L E, G H, item L B, G F, & E D, H K parallelæ ſunt: & quia L B æquatur rectæ A B & F G, rectæ M F: vt A B ad M F, id eſt B C ad F C, ſic L B ad F G; in directum igitur ſunt L G C, & L B C ſuperficies eſt plana; ſimiliter oſtenduntur E H C in [f] directum eſſe & E D C exhibere ſuperficiem planam. deinde quia L B, E D, item G F, H K lineę æquales ſunt, & E H C, L G C lineæ rectę; ſuperficies igitur omnes

[d] Ex 1 defin. huius.

[e] Schol. 18. vndecimi.

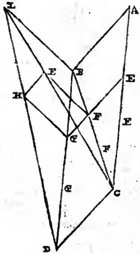
[f] Ex elementis.

præte

præter baſim quadratam, figuræ L E D B C planæ ſunt & triangulares ad punctum C concurrentes, vnde & figura pyramidalis eſt, quæ baſim habet quadratam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

Triangulum rectangulum in ſe ductum ſubalternè, pyramidem producit quæ baſim habet triangularem.



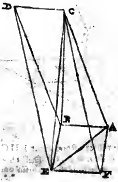
Demonſtratio.

Triangulum rectangulum A B C, ductum in ſe ſubalternè, id eſt in triangulũ B C D, figuram producat L B C D. dico illam eſſe pyramidalem, quæ baſim habet triangularem. erigatur ex B linea L B, recta ad planum A B C: & A B lineæ æqualis: ponanturque quotuis E F G parallelæ A B. linea E F ducta in F G rectangulum producit H E F G, rectum a ad planum B C D; quare F E, H G lineæ quoque rectæ ſunt, ad planum B C D, & L B lineę parallelæ. quia verò L B, F E æquales ſunt rectis A B, E F; vt A B eſt ad E F, id eſt B C ad F C, ſic L B eſt ad E F; in directum igitur ſunt L, E, C, & L B C ſuperficies plana eſt & triangularis cuius latera B L & C L, concurrunt in L. ſimiliter oſtendetur, L, H, D puncta in directum eſſe & L B D ſuperficiem eſſe planam & triangularem deſinentem in L: & quia L E C, L H D lineæ rectæ ſunt & E H æquidiſtat F G, adeoque & C D, rectæ E H, C D quoque in eodem ſunt plano & C L D triangulare planum deſinens in L: quare cùm illæ ſuperficies triangulares ſint & concurrent in L, pyramis eſt figura L B C D, habens baſim B C D triangularem. Triangulum igitur rectangulum ductum in ſe ſubalternè, &c. Quod erat demonſtrandum.

a Ex 1. defin. huius.

PROPOSITIO V.

Triangulum rectangulum ductum in ſe ſubalternè æquale eſt dimidio pyramidis quæ reſultat ex ductu eiuſdem trianguli in ſe.



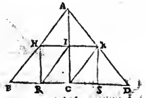
Demonſtratio.

Sit triangulum A B C ductum in B C D triangulum æquale & ſimile, ſubalternè poſitum; ſitq; F E B C A pyramis orta ex ductu A B C trianguli in ſeipſum, & D C E B pyramis orta ex ductu A B C in ſe ſubalternè. dico pyramidẽ A F E B C duplam eſſe pyramidis C B E D: planum A B C ductum in ſe b exhibet pyramidem, quadratam A B E F baſim habentem. quia verò angulus A B C rectus aſſumitur, et ſic B C altitudo pyramidis ex triangulo A B C in ſe ducto exhibitæ; ducta

b 3. Huius.

ductâ igitur diagonali A E, & plano per A E & punctum C. erit pyramis ex baſi A E B, & altitudine B C, dimidia pyramidis ex baſi quadrata A B E F & communi altitudine B C. ſed pyramis C E B D, æqualis eſt pyramidi A B E C, cùm baſis A B C, ſit æqualis C B D, & altitudo B E, communis; igitur pyramis E B C D, ex ductu A B C in B C D ſubalternè poſiti, dimidio pyramidis A F E C B eſt æqualis, quæ æqualis eſt pyramidi ex ductu A B C trianguli in ſe. Quod fuit demonſtrandum.

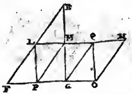
PROPOSITIO VI.



Sint A B C, E F G triangula rectangula, inter ſe ſimilia & æqualia, diuiſiſq; A C, E G bifariam in I & M, agantur per I & M lineæ H I, L N, parallelæ rectis B C, F G.

Dico corpus ortum ex ductu plani B H I C in ſe, ad corpus ex ductu F L M G in ſe ſubalternè, eam habere rationem, quam habent quatuordecim ad tredecim.

Demonſtratio.



Fiant lineis H I, B C æquales indirectũ I K, C D, iunganturque K D, item L M lineę æqualis fiat G O, & F G lineæ æqualis M N, iunganturque N O, erit igitur M N O G ſubalternè poſita ad L M G F demittantur ex H & L lineæ H R, L P parallelæ rectis A C, E G: iunganturque R I, P M. Planum B H I C ductum in ſe ſiue in I K C D æquale eſt corporibus ortis ex ductu B H R a in I D, H R I in I D, & R I C ducto in I D, ſed. planum B H R ductum in I D, æquale eſt corporibus ortis ex ductu B H R in I C K, in C K S & in S K D: & H R I planum ductum in I D eſt æquale plano H R I ducto in I C K, in C K S, & in S K D: dein planum R I C ductum in planum I D æquale eſt plano R I C ducto in I C K, in C K S, & in S K D: igitur planum B H I C ductum in ſe æquale eſt plano B H R ducto in I C K, in C K S, in S K D: & plano H R I ducto in I C K, in C K S, in S K D, vnà cum plano R I C ducto in I C K, in C K S, in S K D: eſt autem planum B H R ductum in C K S, æquale B H R ducto in ſe, & B H R in S K D æquale B H R in ſe ducto, item H R I in I C K, æquale H R I in ſe, item R I C in C K S, æquale R I C in ſe, vti & R I C in S K D: dein B H R in C I K dimidium eſt B H R in ſe, & H R I in C K S dimidium H R I in ſe, vti & H R I in S K D, inſuper & R I C in I C K, dimidium R I C in ſe: igitur planum B H I C ductum in ſe æquale eſt plano B H R in ſe ducto bis; plano H R I in ſe ſemel, & plano R I C in ſe bis; id eſt quinque quantitatibus quarum ſingulæ æquales ſunt B H R ductæ in ſe; quibus ſi addideris quatuor quantitates B H R in I C K, H R I in C K S & in S K D, item R I C in I C K quarum ſingulæ dimidium ſunt B H R ductæ in ſe; erit planum B H I C, ductum in ſe æquale ſeptem quantitatibus, quarum ſingulæ æquales ſunt B H R ductę in ſe: id eſt quatuordecim b quantitatibus, æqualibus B H R ductæ in ſe ſubalternè.

a Ex 1. ſecundi elementorum.

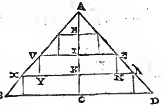
b 6. huius.

Eodem modo oſtenditur planum F L M G ductum in ſe ſubalternè, id eſt in planum G M N O æquale eſſe tredecim quantitatibus quarum ſingulæ æquales ſunt F L P ſiue B H R in ſe ſubalternè ductæ: nam F L P, in M G Q eſt æquale H B R in I C K, quæ eſt pars decimaquarta B C I ducti in I C D. Cui ſi adiungas L F P in Q O N, illi æquale & F L P in G Q O, habebis duplum B H R in I K C, additis

 inſu-

inſuper LPM in MGQ & QON, & QGO, habebis noncuplum: quibus ſi adiunxeris PM in MGQ & QON, & GOO, fient tredecim. vnde BHIC ductum in ſe ad FLMG ductum in ſe ſubalternè eam habet rationem quam quatuordecim ad tredecim.

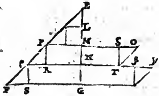
PROPOSITIO VII.



SInt ABC, EFG triangula rectangula, ſimilia inter ſe & æqualia: diuiſiſq; AC, EG ſimiliter in quotuis partes æquales, punctis H, I, K; L, M, N, agantur per H, I, K; L, M, N lineæ parallelæ rectis BC, FG.

Dico XI planum ductum in ſe, æquari plano QM ducto in ſe ſubalternè, vnà cum XVY ducti in ſe ſubalternè. idem eſt de reliquis.

Demonſtratio.

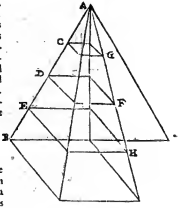


PLanum XI ductum in ſe ſiue in planum Iλ, æquale eſt plano YI ducto in Iλ, & XVY in Iμ; vnà cum XVY ducto in μZλ: planum verò QM ductum in ſe ſubalternè, id eſt in planum NO, æquale eſt plano RM ducto in NO (id eſt YI in Iλ) & QPR in MT (id eſt XVY in Iμ) vnà cum QPR in SOT (id eſt XVY in ſe ſubalternè:) igitur exceſſus quo XI ductum in ſe excedit QM ductum in ſe ſubalternè, eſt ille quo XVY ductum in ſe ſiue in μZλ, ſuperat QPR ductum in SOT, ſiue in ſe ſubalternè. ſed XVY ductum in ſe ſuperat QPR ductum in ſe ſubalternè, plano XVY ducto in ſe ſubalternè. igitur planum XI ductum in ſe ſuperat QM ductum in ſe ſubalternè, plano XVY ducto in ſe ſubalternè, ſiue XI ductum in ſe æquale eſt QM ducto in ſe ſubalternè vnà cum XVY in ſe ſubalternè: Quod erat demonſtrandum.

PRO-

Corollarium primum.

QVæ hîc de diuiſione lineæ A C vel E G, in quatuor partes æquales dicta ſunt, extendere poteris ad quaſuis ſubdiuiſiones in partes æquales: modò ſint numero pares in vtraque linea, vbique enim inuenies fundamentum diſcurſus in demonſtratione explicati. Imò etiam extendere poteris ad ipſum triangulum V X Y, ducti in ſe, ad idem triangulum ductum in ſe ſubcõtrariè. nam, vt patet ex præcedentibus, ex ſola additione V X Y in ſe ſubcontrariè ducti fiet æqualitas cum V X Y ducti in ſe.



Corollarium ſecundum.

OPeræ pretium videtur hîc adiungere methodum reperiendi proportionem inter partes pyramidis diuiſæ per interualla æqualis altitudinis. nam F C pars pyramidis vel coni, habet rationem ad partem pyramidis A G C, quam habet quatuordecim ad duo, ſicut propoſitione ſexta huius docuimus: ad cognoſcendam autem rationem partis G D ad F E, ſic procedatur. ſumatur exceſſus quo F C, excedit A G C, qui eſt 12. Deinde huic exceſſui adijciatur ipſum F C, (eſt autem F C 14.) reſultabit numerus 26. tandem denuo 12. addantur, exſurget ſumma quæſita ſcilicet 38. nam ratio F C ad F E, eſt vt 14. ad 38. Quod ſi vlterius pergere deſideras, iiſdem inſiſte veſtigiis. Rationem enim F E ad H B, eâdem praxi reperies ſumendo ſcilicet vt priùs exceſſum quo F E ſuperat F C, qui eſt 24. Cui adiungatur ipſum F E. quod oſtendimus eſſe 38, reſultabit ſumma 62 huic ſummæ addantur 12. & exſurget ſumma quæſita 74. nam ratio F E, ad H B, eſt vt 38. ad 74. Hanc praxim ſi continuò obſeruaueris, poteris in immenſum in indaganda ratione progredi partium pyramidis aut coni, dummodo interualla eandem ſortiantur altitudinem.

Corollarium tertium.

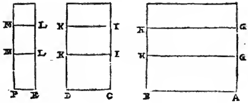
HInc etiam manifeſtum, pyramidem aut conum qui tali ratione ſectus eſt vt altitudines continuo æquales ſint inter ſe, non admittere rationem incommenſurabilitatis inter ſuas partes hoc modo ſectas. cùm enim per numeros continuo reperiatur earundem proportio, fit vt ſemper partes eam inter ſe contineant rationem quam numeri ipſi per quos producuntur, inter ſe ſortiuntur.

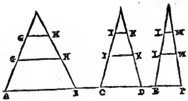
PROPOSITIO VIII.

SI triangula vel rectangula tria eandem habeant altitudinem & baſes continuè proportionales:

Dico corpus ortum ex ductu primi rectanguli vel trianguli, in tertium, æquale eſſe illi, quod exſurgit ex ductu medij in ſe.

Demonſtratio.





SInt AB, CD, EF baſes continuè proportionales, rectangulorum vel triangulorum GH, IK, LM eandem habentium altitudinem: dico planum GH ductum in LM æquale corpus proferre illi quod oritur ex plano IK ducto in ſe. planũ HG ductum in LM, parallelopipedum producit, habens planum GH baſim & altitudinem EF: planum verò IK ductum in ſe, parallelopipedum producit habens IK baſim & altitudinem CD. ſed parallelopipeda illa baſes habent altitudinibus reciprocè proportionales, cùm ſit vt planum GH ad IK planum, baſis ad baſim id eſt AB, ad CD, ſic reciprocè CD ad EF, altitudo ad altitudinem; corpus[a] igitur ortum ex ductu HG in LM, æquale eſt corpori, orto ex IK ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

[a] Per 34. vndecimi.

PROPOSITIO IX.

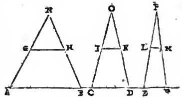
HAbeant trapezia tria in eadem altitudine conſtituta, baſes continuè proportionales; latera verò quæ altitudines terminant, baſibus æquidiſtent, & in eadem cum illis ſint proportione.

Dico primum trapezium, ductum in tertium, corpus proferre æquale illi quod emergit ex ductu medij in ſe.

Demonſtratio.

HAbeant AGB, CID, ELF trapezia tria in eadem altitudine poſita baſes AB, CD, EF continuè proportionales: latera verò GH, IK, LM quæ altitudines terminant, æquidiſtent baſibus AB, CD, EF. & in eadem cum illis ſint ratione: dico, GB ductum in LF, quantitatem efferre æqualem illi, quam profert ID ductum in ſe. productæ AG, BH conueniant in N & CI, DK in O, EL, FM verò in P. vt GH ad AB, ſic IK eſt ad CD, & LM ad EF, ex hypotheſi, igitur vt ANB trian-

a triangulum ad triangulum G N H, ſic C O D ad I O K, & E P F ad L P M: & permutando, conuertendo, & iterum permutando vt G B trapezium ad I D, ſic G N A triangulum ad triangulum I O K, & vt I D ad L F, ſic I O K ad L P M: ſed trapezia G B, I D, L F ſunt in[b] ratione baſium vel linearum G H, I K, L M, quę baſibus ſunt proportionales; igitur & triangula G N H, I O K, L P M ſunt vt baſes G H, I K, L M: in eadem igitur ſunt c altitudine triangula A N B, C O D, E P F. quare A N B triangulum ductum in triangulum E P F, corpus producit [d] æquale illi quod exſurgit ex C O D, ducto in ſe. ſed eadem de cauſa triangulum G N H ductum in L P M, æquale eſt I O K ducto in ſe; reſiduum igitur trapezium A G H B ductum in reſiduum L M E F, æqualem [e] molem generat illi, quæ oritur ex I K C D ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.



a Ex elementis.

b Ex 1. ſexti.

c Ex eadem

d 8. huius.

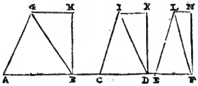
e Ex 19. quinti.

PROPOSITIO X.

Iiſdem poſitis iungantur B G, D I, F L.

Dico planum A G B ductum in G H B, & C I D in I K D, tandem E L F ductum in L M F in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.



Planum A G B ductum in planum G H B, pyramidem producit [f] habentem baſim, triangulum G H B, & altitudinem A B: ſimiliter planum I C D ductum in I K D, & E L F ductum in L M F pyramides producunt, quarum baſes ſunt triangula I K D, L M F; altitudines verò C D, E F. ſed per hypotheſim triangula G B H; I K D, L M F in eadem altitudine conſtituta, proportionalia ſunt g in ratione baſium G H, I K, L M; & A B, C D, E F altitudines proportionales quoque ſunt; eandem igitur continuant rationem pyramides, productę ex A G B in G H B, & C I D in I K D, denique L E F in L M F. Quod erat demonſtrandum.

f 4. huius.

g Ex 1. ſexti.

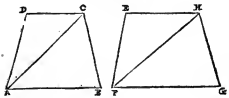
PROPOSITIO XI.

Iiſdem poſitis:

Dico planum A D C ductum in F G H, æqualem proferre magnitudinem, illi quæ oritur ex A B C ducto in F E H.

Demon-

Demonſtratio.



a 4 huius. PLanum A D C ductum in planum F G H, pyramidem producit habentem [a] baſim triangularem F GH, & altitudinem D C. ſimiliter A BC quantitas, ducta in ſuperficiem F E H pyramidem producit, cuius baſis triangulum eſt A B C, & altitudo E H. ſed [b] pyramides illæ æquales ſunt, cùm baſes habeant reciprocè altitudinibus proportionales: eſt enim baſis A B C ad baſim F G H, vt A B ad F G, id eſt D C ad E H, altitudo ad altitudinem reciprocè; planum igitur A D C ductum in planum F G H, æqualem profert molem illi, quæ producitur ex ductu plani A B C in planum F E H. Quod erat demonſtrandum.

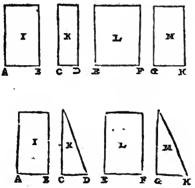
b 34. vndecimi.

PROPOSITIO XII.

SI quatuor rectangula vel triangula in eadem conſtituta altitudine, baſes habeant proportionales:

Dico corpus ortum ex ductu primę ſuperficiei in quartam, æquari corpori orto ex ductu ſecundæ quantitatis in tertiam.

Demonſtratio.



REctangula vel triangula I,K, L,M, eandem habentia altitudinem, baſes A B,CD, E F, G H habeant proportionales: dico planum I ductum in planum M, æquari K plano, ducto in L. planum I ductum in M planum, parallelopipedum producit habens baſim, planum I, & altitudinem G H : ſimiliter K ſuperficies ducta in ſuper-

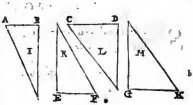
ſuperficiem L, parallelopipedum producit habens baſim K, & altitudinem EF: a 34. undecimi.
ſed parallelopipeda illa inter ſe æqualia ſunt, a cùm baſes habeant altitudinibus reciprocè proportionales (nam baſis I ad baſim K eſt vt AB ad CD, id eſt ex hypotheſi EG ad GH, altitudo ad altitudinem reciprocè) planum igitur, I ductum in M, corpus producit æquale illi, quod oritur ex ductu K in L. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

SI quatuor lineæ fuerint proportionales, & ſuper illis triangula in eadem exſtructa altitudine, ſubalternè ponantur.

Dico primum triangulum ductum in quartum, æqualem efferre quantitatem illi, quæ producitur ex ductu ſecundi in tertium.

Demonſtratio.



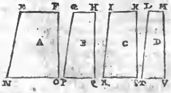
SVper AB, EF, CD, GH lineis proportionalibus, in eadem conſtituantur altitudine triangula I, K, L, M; & K quidem ſecundum, primo I, quartum verò M, tertio L ſubalternè ponatur; dico I ductum in M, æquari K ducto in L. Triangulum I ductum in M pyramidem b producit habentem baſem triangularem I & altitudinē GH: b 4. huius. ſimiliter planum K ductum in L pyramidi æquatur habenti baſim K, & altitudinem CD: ſed pyramides illę inter ſe c æquales ſunt, cùm baſes habeant altitudinibus reciprocè proportionales; c Ex 34. undecimi. corpus igitur quod emergit ex I ducto in M, æquale eſt corpori orto ex ductu K in L. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

TRapezia quatuor in eadem conſtituta altitudine, baſes habeant proportionales; latera verò quę baſibus opponuntur, iiſdem ęquidiſtent, & eandem ſeruent cum baſibus proportionem.

Dico corpus quod exſurgit ex ductu primi plani in quartum, æquari corpori orto ex ductu ſecundi plani in tertium.

Demonſtratio.



HAbeant A, B, C, D, trapezia in eadem altitudine conſtituta, baſes NO, PQ, RS, TV proportionales, & EF, GH, IK, LM lineas baſibus æquidiſtantes, in eadem cum baſibus proportione. dico planum A ductum in planum D, æquari B ducto in C. planum A ductum in D, corpus producit habens baſim planam A, & altitudinem TV. ſimiliter B ductum in C, corpus generat habens baſim B & altitudinem TV, ſed corpora illa, inter ſe æqualia ſunt, d quia baſes d Ibid. habent altitudinibus reciprocè proportionales; planum igitur A ductum in D æquatur plano B ducto in C. Quod fuit demonſtrandum.

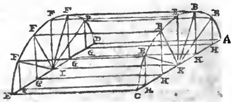
DVCTVVM PLANI IN PLANVM PARS SECVNDA

Superficies contemplatur & communes interſectiones natas ex ductu plani circularis in rectilineum, deinde corpora ſic producta exhibet.

PROPOSITIO XV.

SEmicirculus ductus in rectangulum eiuſdem altitudinis, ſuperficiem producit cylindricam.

Demonſtratio.



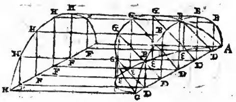
SIt ABC ſemicirculus & ADEC rectangulum eiuſdem cum ſemicirculo altitudinis. dico ſemicirculum ABC ductum in rectangulum, ſuperficiem producere cylindricam. K centrum ponatur ſemicirculi: aſſumptiſque in AC punctis quibuſuis HH erigantur ex H & K, normales ad AC, erunt illæ quoque rectæ ad planũ ADEC; cùm ABC ductum in ADEC, ad rectos illi inſiſtat angulos, ex hypotheſi poſita in defin. prima huius; parallelæ igitur ſunt HB, KB. ponantur deinde in plano AEC, lateri AD æquidiſtantes KI, HG: & HB, KB lineæ ductæ in HG, KI, plana exhibeant HBFG, KBFI: quoniam igitur HB, KB rectę ſunt ad planum AEC & HGKI, parallelæ, plana quoque HBFG, KBFI [a] recta ſunt ad
a 14. vndecimi. idem planum, & inter ſe æquidiſtant; parallelę igitur ſunt lineæ BF, BF; item FG, FI quæ rectæ quoque ſunt ad planum AEC, adeoque & in eodem exiſtunt plano. deinde cum HB, KH lineis, æquales ſint FG, GI, & anguli illis contenti recti, iunctæ FI quoque, æquales ſunt iunctis BK: ſed BK lineæ ſemidiametri ſunt ſemicirculi ABC, adeoq; & inter ſe æquales, igitur & IF lineæ quoque æquales ſunt, & DFE puncta ad ſemicirculum æqualem ABC: quare & BF, æquidiſtantes HG, adeoque & axi KI, ſuperficiem producunt cylindricam.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

SEmicirculus ductus in ſe, ſuperficies duas producit cylindricas, quarum communis interſectio, figura eſt elliptica.

Demonſtratio.



SEmicirculus ponatur A B C: dico illum in ſe ductum vel in ſemicirculum A E C illi æqualem, ſuperficies producere cylindricas B G, G E; quarum communis interſectio A G C figura eſt elliptica. facto ſuper A C rectangulo A F C, ſumantur in A C, puncta quæuis D, è quibus ad A C normales erigantur D B: ponanturque D F in plano A F C æquidiſtantes A F. rectæ D B ductæ in D F ſuperficiem producunt [a] cylindricam B H, igitur & B G lineæ quæ pars ſunt B H, ad ſuperficiem ſunt cylindricam. Similiter oſtendetur G E ſuperficiem eſſe cylindricam. quod verò A G C figura ſit elliptica, ſic oſtendo: iungantur D G. rectæ D B ductæ in ſe, quadrata generant D B G E, quorum diametri ſunt D G: quia verò quadrata illa, [b] recta ſunt ad planum A C F, & A F, D F parallelæ, plana A B G E æquidiſtant, & triangula quoque D E G parallela ſunt: quia verò D E G anguli ſunt recti, & D E, G E lineæ æquales, anguli E D G, E G D ſemirecti ſunt: in eodem igitur ſunt plano, [c] lineæ D G: rurſum cùm D G diametri ſint quadratorum D B G E, quadrata D G dupla ſunt quadratorum D B: vnde vt B D quadratum ad quadratum D B, id eſt rectangulum A D C ad rectangulum A D C, ſic D G quadratum ad quadratum D G: ellipſis [d] igitur eſt A G C. vocetur autem corpus conſtans ſuperficiebus B G, G E; vngula: cuius proprietates, & cubaturam ſuo loco trademus.

[a] 15 huius.

[b] Ex hypotheſi in 1. defin. huius.

[c] Educitur ex elemẽtis.

[d] 4. De ellipſi.

PROPOSITIO XVII.

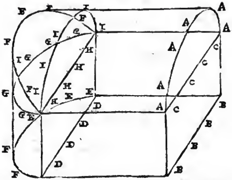
SEmicirculo ſi rectangulum eiuſdem altitudinis in directum adijciatur.

Dico totam illam quantitatem in ſe ductam ſuperficies producere cylindricas, quarum communis interſectio figura eſt elliptica.

 Demon-

Digitized by Google

Demonſtratio.

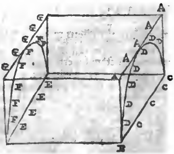


SEmicirculo AC, in directum adijciatur rectangulum CB eiuſdem cum ſemicirculo altitudinis: dico figuram ACB ductam in ſe, ſuperficies producere cylindricas AF, FE, quarum communis interſectio FF figura eſt elliptica. fiat conſtructio
a Ex 1. ſecundi. quam indicat figura. planum ACB ductum in ſe, æquatur a AC ducto in ſe, & CB in ſe ducto, vnà cum AC ducto in CB bis. ſed AC ductum in ſe, eſt HI ductum in HG. & CB in ſe ductum, eſt parallelopipedum CBDH; prætereà AC ductum in CB bis, eſt AC ductum in CH, vnà cum HG ducto in HD; planum igitur ACB ductum in ſe æquatur HI ducto in ſe, CB ducto in ſe, id eſt corpori CBDH, & AC ducto in CH, vnà cum HG ducto in HD: planum autem HI
b 16. huius. ductum in ſe vel in HG, ſuperficies producit b cylindricas IF, FG, & FF commu-
c 15. huius. nem interſectionem ellipticam, item AC ductum in CH ſuperficiem c producit cylindricam AI; tandem HG ductum in HD, ſuperficiem producit cylindricam GE, planum igitur ACB ductum in ſe, ſuperficies producit cylindricas AIF, FGE, quarum communis interſectio FF, figura eſt elliptica.

PROPOSITIO XVIII.

SEmicirculo ſi rectangulum circumſcribatur:
Dico figuram concauam quę extima ſemicirculi perimetro & rectis lineis intercipitur, ductam in totum rectangulum, corpus producere habens cylindricam ſuperficiem concauam & extimas tres planas.

Demonſtratio.



SEmicirculo CDB rectangulum circumſcribatur CAB, dico planum DA ductum in rectangulum CAB, corpus producere habẽs ſuperficiem concauam cylindricam. Rectangulum CAB ductum in ſe, vel in rectangulum BEC æquatur CDB ſemicirculo ducto in rectangulum CAB vel CBE, vnà cum DA ſuperficie ducta in rectangulum CBA vel BE: ſed CBD ſe-

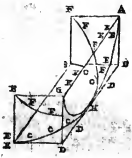
CBD ſemicirculus ductus in rectangulum CAB vel BE, ſuperficiem producit a cylindricam DE: reſiduum igitur planum AD quod ſemicirculo CBD congruit ductum in rectangulum CAB vel CBE, concauam producit ſuperficiem cylindricam, quæ DF ſuperficiei congruit. a 15. huius.

PROPOSITIO XIX.

Semicirculo ſi rectangulum circumſcribatur:
Dico figuram concauam (quæ extima ſemicirculi perimetro & rectanguli lateribus intercipitur) ductam in ſe, ſuperficies duas producere cylindricas, quarum communis interſectio figura eſt elliptica.

Demonſtratio.

Semicirculo ABG rectangulum circumſcribatur ADG. dico DB figuram ductam in ſe, ſuperficies duas cylindricas producere, quarum communis interſectio figura eſt elliptica: ſuper DD linea rectangulum ponatur EDE æquale ADG: dein EDE, ſemicirculus inſcribatur ECE, patet illum æquari ſemicirculo ABG, & DB, DC lineas omnes æquari. Oſtenſum eſt prætereà figuram concauam BD, ductam in ADG rectangulum, exhibere ſuperficiem cylindricam: atqui BD id eſt DC, pars eſt illius rectanguli, etiam DB ductum in DC producet ſuperficiem cylindricam. quia verò DB ad DB, eandem habent rationem quam DC ad DC, etiam DB ad DB, eandem habebunt rationem quam DF ad DF, quę diagonales ſunt quadratorum DB. quare cùm BB & CC ſint ad eoſdem circulos, ex conſtructione patet b FF eſſe ad eandem ellipſim, cùm DB minor ſit diagonale DF.



b Ex 18 & 16. huius.

PROPOSITIO XX.

Iiſdem poſitis, ſi figura concaua ducatur in ſuum ſemicirculum cui congruit, dico ſuperficiem produci cylindricam.

Demonſtratio.

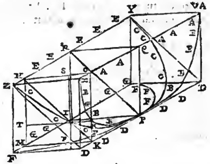
Demonſtratum eſt DB ductum DK rectangulum, c exhibere ſuperficiem cylindricam. ſed DB ductum in BK eſt pars DB in DK ducti, igitur etiam DB in BK exhibent ſuperficiem G cylindricam. c 19. huius.

PROPOSITIO XXI.

SIt ſemicirculus ABB, inſcriptus rectangulo ADD, cui æquale ſit conſtitutum DG ad angulos rectos, ſemicirculum GFF continens æqualem AB. ducatur autem eo ſitu AB ſemicirculus in ſemicirculũ FG.

Dico ſuperficies oiiri cylindricas, & communem interſectionem CC fore ellipticam.

Demonſtratio.



DVcatur totum rectangulum AD, in DG rectangulum; & ponantur diagonales DE. quoniam igitur AD, AE æquales ſunt, vtpotè latera eorundem quadratorum, erunt quoque diagonales DE, inter ſe æquales, ac proinde triangula rectangula EAD ſunt Iſoſcelia: vnde DE [a] planum eſt. agatur deinde quodcunque planum KOHM parallelum planis DGY, DFZ: ſimiliter, diuiſa ſuperficie AA bifariam rectâ QR parallela AY, per QR ponatur alterum planum ijſdem DGY DFZ planis æquidiſtans. Quoniam OK ductũ in KM, æquatur KN in ſe ducto & NO, hoc eſt IS in ſe ducto, vnà cum rectangulo KNO bis ſumpto, hoc eſt rectangulis NS, IM, ſimul ſumptis. Igitur figurę NKL, [b] SIT quadratæ ſunt, quarum diagonales ſunt KI, IH. oſtenſum eſt autem BD ductum in ſe [c] producere ſuperficiem cylindricam; igitur lineæ NI, IL, hoc eſt omnes BC, CF, ſunt in ſuperficie cylindricâ.

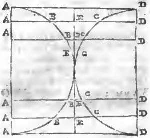
a Per elementa.

b Ex elementis.

c 19. huius.

Quia verò eſt vt quadratum QP ad ON quadratum, hoc eſt SI, ſic quadratum PR ad IH, quadratum (illorum nimirum dupla) eſtque rectangulum VQX ad VOX, hoc eſt YRZ ad YHZ, vt quadratum PQ ad ON quadratum, (quia PQ, ON normales ſunt ad VX diametrum in ſemicirculo VBX) etiam quadratum PR ad IH, quadratum eandem habebit rationem, quam rectangulum YRZ ad YHZ. quare YPIZ hoc eſt [d] CC, ſunt ad eandem ellipſim; quæ exhibet communem interſectionem planorum AB, FG. Quod erat demonſtrandum.

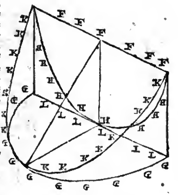
d 4. De ellipſi.



Scholion.

P*Ropoſitum ſit* AB, *ductum in* CD, *diſtinguere à ductu* AB, *in ſe: nam cùm* AB, *lineæ ſint æquales* CD, *videtur prorſus idem corpus debere produci cum illo quod producitur per ductum* AB, *in ſe: longè tamen eſt diuerſum. ſit enim quadratum* AD, *quod diuidat* EE *linea bifariam lateribus quadrati æquidiſtans, & deſcripti ſint æquales ſemicirculi* AB *&* CD, *& ducatur* AB, *in* CD *vt propoſit. 21. poſtulabat, orietur figura cuius* dimi-

dimidium eſt F G, *figura autem inſcripta huic corpori ſcilicet* F H K, *eſt dimidium* A B *ducti in ſe; igitur* A B, *ductum in ſe longè diuerſum corpus producit ab illo quod oritur ex* A B *ductoin* C D. *quare corpus ex* A B *ducto in* C D, *æquale eſt illi quod exſurgit ex* A B, *ducto in ſe ſimul cum* A B, *ducto in* B C, *ſiue quod in idem recidit* A B, *ductum in* C D, *æquale eſt corpori quod exſurgit ex* A B *ducta in totum* B D. *itaque ad complementum Cylindri qui conſurgeret ex baſi* A B, *in altitudinem* A D *nihil aliud requiritur quàm* A B *ductum in ſe, vt facilè cognoſci poteſt ex figura* F G, *cui ſi addatur dimidium* A B, *ducti in ſe, habebitur integer Cylindrus baſim habens* A B; *ſeu* L G, *& altitudinem* F L; *figura igitur* F G *continet dimidium* F H, *ducti in ſe, ſimul cum* H L *ducto in* L G, *quibus ſi addideris reliquum dimidium corporis ex* F H, *in ſe ducti, ſimul cum* H L *ducto in* L G, *exſurget figura quam vocauimus hac propoſitione natom ex* A B, *ducta in* C D, *reuera autem eſt figura orta ex* A B, *ducta in ſuperficiem* B D, *vt explicatum eſt. quod ſi diſpliceat hac nomenclatura, vocetur figura* F G, *dimidium illius corporis quod oritur ex ductu* A B, *in ſuperficiem* B D.

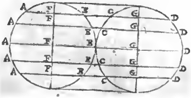


PROPOSITIO XXII.

SInt duo circuli æquales A B, C D, ſeſe tangentes exteriùs, & ducatur A B, in C D, etiam in eodem ſitu.

Dico ſuperficies produci Cylindricas.

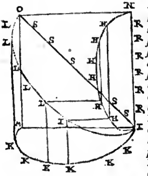
Demonſtratio.



POnantur F F, G G diametri circulorum parallelæ, & A B C D lineæ; normales ad F F, G G diametros: erunt igitur B D lineæ æquales F G, vt patet ex elementis: ſed A B circulus ductus in F G altitudinem, producit cylindrum; igitur & A B circulus ductus in B D, cylindrum producit. ſed A B circulus ductus in circulum C D, pars eſt A B ducti in B D; igitur & A B circulus ductus in C D, circulum, ſecundùm mentem præcedentis propoſitionis ſuperficies producit cylindricas: *quod verò communis interſectio ſit ellipſis, vide Scholion quod hic appono: in quo corpus ipſum de quo propoſitio eſt, exprimitur, & explicatur.*

 Scho-

Scholion.

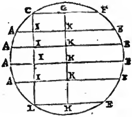


N*Ota: id quod producitur per* A B, *ductum in* C D, *ſunt duæ partes cylindri inter ſe æquales ſicut contingit in ſcemate* H H *circuli ducti in* K K *circulum; nam* H L *ſunt parallelæ* I M. *ergo ſunt in cylindri ſuperficie eodem modo* K L, *cùm ſint parallela* N I. *ſunt ſimiliter in ſuperficie cylindrica. vnde cùm hîc ſint duo cylindri æquales habentes baſes & altitudines vt ſunt* N O L I, *habens baſim* H H, *&* O M K I. *habens baſim* K K, *ſintq́; altitudines* N O, O M, *hoc eſt* N I, I M, *inter ſe æquales, manifeſtum eſt produci hîc cylindricum corpus æquale cylindro qui habet baſim* K K, *& altitudinem* I M, *quod in idem recidit cum eo quod ſupra dictum eſt æquale corpori quod producitur ex ductu baſeos* A B, *in altitudinem* F G. *quare patet* H L, *ſuperficiem eſſe cylindricam, vti etiam eſt* K L, *quod propoſitio aſſerebat. Deinde quod* L L *ſit ellipſis, inde patet quod* R S *lineæ ſint æquales* S T *& lineæ* H L *ſint æquales* L K, *vnde* N R I *ad* N R I, *rectangulum eſt vt* O S I *rectangulum ad* O B I *rectangulum hoc eſt vt quadratum* R H *ad* R H, *vel* S L *ad* S L *quadratum.*

PROPOSITIO XXIII.

CIrculum ABC ſecet recta quævis CL non per centrum ducta. Dico AI ductum in IB ſuperficiem producere cylindricam, & communem interſectionem fore ellipſim.

Demonſtratio.

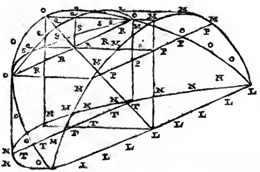


DVcatur per centrum recta HG parallela CL; AK ductum in KB æquale eſt AI ducto in IB & IK, ducto in ſe, vt patet ex [a] elementis. ſed AK ductum in KB. ſuperficies producit [b] cylindricas, quarum communis interſectio eſt elliptica; igitur & AI ductum in IB, (nimirum pars AK ducti in KB) ſuperficies producit cylindricas, quarum communis interſectio eſt elliptica. Quod fuit demonſtrandum.

a 4. ſecundi.
b 16. huius.

Scholion.

Scholion.



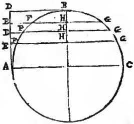
Sicut ſemicirculus in ſe ductus producit figuram M N, *ita quoque* A I, *pars circuli in ſe ducta producit aliquam partem corporis* M N, *quam in ipſo* M N, *hac praxi inueniemus. ſit enim* A I *pars circuli æqualis parti* M P, *ita vt* P P, *ſit parallela* L L *diametro: igitur* A I *ductum in* I B. *æquale eſt* A I, *ducto in* I K *bis, & ſimul* A I, *ducto in ſe ſemel: verùm* A I, *ductum in* I K *bis, æquale eſt corpori orto ex ductu* M P, *in* P R, *& ex* T N *hoc eſt* M P *ducto in* T R. *quæ quoniam ſunt æqualia inter ſe, erunt æqualia & ſimilia ſolido quod fit ex* A I, *plano ducto in* I K *bis. Igitur ſupereſt* A I, *ductum in ſe, quod repræſentatur per* Q R *hoc eſt* M P, *hoc eſt* A I, *ducto in* R S, *hoc eſt* Q R, *in ſe; patet igitur* Q O *&* O S, *eſſe cylindricas ſuperficies, & ipſam* O O *eſſe ellipticam lineam, vt oſtendimus propoſitione 16. huius libri.*

PROPOSITIO XXIV.

Circulum A B C cuius diameter A C, contingat in A linea A D, quam in D ſecet tangens D B, parallela diametro A C.

Dico F E ductum in E G, ſuperficies producere cylindricas, quarum communis interſectio eſt elliptica.

Demonſtratio.



Planum F F ductum in E G, æquale eſt E F ducto [a] in E H, & E F ducto in H G. ſed tam E F [b] ductum in E H, quàm E F ductum in H G ſiue F H, ſuperficies producit cylindricas; igitur & E F ductum in E G, ſuperficies producit cylindricas, communem vero interſectionem figuram eſſe ellipticam patet ex Scholio prop. 21. huius, igitur, &c. Quod fuit demonſtrandum.

a 1. *ſecundi.*
b 10. *huius.*

Corollarium.

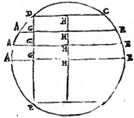
Propoſitio quoque vera eſt, ſi D A linea circulum non contingat, ſed tangenti æquidiſtet: demonſtratio ferè eadem eſt cum priori.

PROPOSITIO XXV.

Circulum A B C ſecent duæ quæuis lineæ D C, E F parallelæ inter ſe & æquales; iunganturq; D E.

Dico G B in ſe ductum, ſuperficies producere cylindricas, quarum communis interſectio figura eſt elliptica.

Demonſtratio.



a 5. ſecundi. b 16. huius. c 15. huius. d Ex 16. huius.

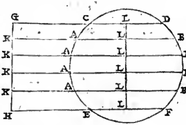
Ducatur per centrum recta H H, parallela D E: G B ductum in ſe, æquale G H ducto in ſe, & H B ducto in ſe,[a] vnà cum G H ducto in H B bis: ſed tam H B ductum in ſe[b] quàm G H ductũ[c] in H B, corpus producit cylindricum; igitur G B ductum in ſe, ſuperficies producit cylindricas. rurſum cùm H B ductum in ſe, communem[d] producat interſectionem ellipſin, exhibebit & G B ductum in ſe, ellipſim pro communi interſectione; igitur, &c. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVI.

Secent A B C circulum duę quæuis parallelæ & æquales lineæ C D, E F: quas extra peripheriam productas ſecet orthogonalis quæuis G H.

Dico K B ductum in ſe, ſuperficies producere cylindricas, quarum communis interſectio eſt ellipſis.

Demonſtratio.



e Ex 4. ſecundi. f 15. huius. g 16. huius.

Agatur per centrum circuli recta L L parallela G H. K B ductum in ſe æquale eſt K L ducto in L B bis,[e] & K L ducto in ſe, vnà cum L B, ducto in ſe: ſed[f] K L ductum in L B corpus producit cylindricum, & L B ductum in ſe ſuperficies producit cylindricas quarũ communis interſectio,[g] ellipſis eſt; igitur & K B ductũ in ſe, ſuperficies producit cylindricas quarum communis interſectio eſt ellipſis. Quod fuit demonſtrandum.

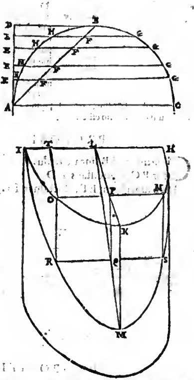
PROPOSITIO XXVII.

Semicirculum A B C cuius diameter A C contingat in A linea A D, quam in D ſecet contingens quædam D B, parallela diametro A C, iunganturq; A B.

Dico E F ductum in G H, corpus producere cylindricum cuius ſuperficies habent communem interſectionem ellipſim.

Demon-

Demonſtratio.



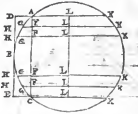
SIt HIK, baſis cylindri æqualis ABC ſemicirculo & diametro HI diuiſâ in L bifariam, ducatur LK, eidem orthogonaliter. fiat autem LK, æqualis KM; & ducatur LM, erit itaque triangulum ABD æquale LKM triangulo; cùm AD, & DB æquales ſint ſemidiametro CD, ob BD parallelam AC, & AD contingentem in A; eſt autem circulus KIH, æqualis CB, quare etiam LK æqualis DB. Igitur quoniam KM, axi parallela eſt, vt pote orthogonaliter poſita ad LK, erit quoque AB æqualis LM. Ducantur igitur NO, parallelæ HI, diuidentur illæ bifariam in punctis PP. Deinde ducantur PQ æquidiſtantes KM, erunt illæ æquales PL. Fiat denique ſectio per M punctum & lineam HI, exhibebitur a IRMSH ſemiellipſis, eritque LM in plano HIMS: cùm ſit KM, æqualis KL, vti etiam PQ, æqualis PL. Igitur etiam OR & NS, ipſis PQ æquales erunt: nam ducta OT quæ æquidiſtet KL erit OT æqualis OR, cum PL ſit in plano eodem cum OT, & LQ cum TR; & OT ſit æqualis PL. quare cùm ſint OR & NS, æquidiſtantes PQ erit rectangulum NOR, æquale rectangulo EFHG, cum ſint æquales lineæ, ſed NO, in OR, ductæ producunt cylindrum; igitur etiam EF, ductæ in HG, cylindri portionem efformabunt, illam ſcilicet quam exhibet ſectio HIMK. patet igitur veritas propoſitionis.

a Per ſecu- ndum.

PROPOSITIO XXVIII.

ESto ABC ſegmentum circuli quodcunque, quod in B contingat linea DE, parallela AC.

Dico FG ductum in GH, corpus producere cylindricum cuius ſuperficies communem habent interſectionem, ellipſim.



Demonſtratio.

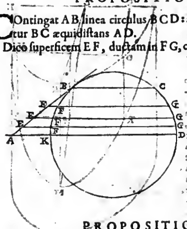
a 19. huius. b Ex 18. huius.

PLanũ HG ductũ in ſe producit [a] corpus cylindricum, vti & HG [b] ductũ in FH: ablato igitur corpore orto ex ductu HG in ſe, à corpore orto ex ductu HG in FH, remanebit HG in GF, portio quoque cylindrica, quod autem corporis huius ſuperficies communem habeant interſectionem ellipſim, facilè deducitur ex 26. & 24. huius: nam HG ductum in GF, pars eſt HG ducti in in GL poſitâ LL diametro parallela DB: vti etiam pars eſt, HG ducti in HL, quod ſuperficies producit cylindricas, quarum communis interſectio eſt ellipſis.

PROPOSITIO XXIX.

COntingat AB lineа circulus BCD: actâq; AD per centrum, ducatur BC æquidiſtans AD.

Dico ſuperficiem EF, ductam in FG, corpus producere cylindricum.



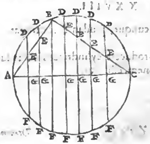
Demonſtratio.

PLanum EF ductum in FG, rectâgula exhibet EF G, recta ad planum BCD (& quia FG æquidiſtant KD) parallela rectangulo AKD. quare EF quoque rectæ ſunt ad planum ABC, igitur aſſumpto circulo BCD pro baſi cylindri, EF ductæ in FG æquidiſtantes ſunt axi cylindri: vnde & in ſuperficie ſunt cylindrica. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXX.

SEmicirculo ABC triangulum inſcribatur quodcunque ABC.

Dico ſuperficiem DE, ductam in EF ſuperficiem, corpus producere cylindricum.



Demonſtratio.

c Ex elementis. d 16. huius. e 3. huius.

PLanum DG ductum in ſe ſiue in GF, [c] æquale eſt DE ducto in EF, & EG ducto in ſe: ſed DG ductum in ſe, producit [d] corpus cylindricum, & EG ductum in ſe [e] producit pyramidem, ablatâ igitur pyramide ex DG ducto in ſe, remanebit DE ductum in EF producens corpus cylindricum. Quod fuit demonſtrandum.

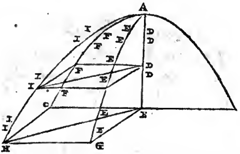
PRO-

PROPOSITIO XXXI.

SIt ADBCF figura quæcunque, & ADB, BC quidem lineæ ſint rectæ, AFC verò quæuis: dein DF ducatur in ſe.

Dico communem interſectionem hædrarum quæ exſurgent ex DF in ſe ducto, in eodem eſſe plano cum recta ADB.

Demonſtratio.



LIneæ DF parallelæ BC ductę in ſe, figuras exhibeant DFIE, quadratæ igitur ſunt figuræ DFIE & rectæ ad planum BAC ex hypotheſi in prima defin. huius. quia verò DF æquidiſtant BC, plana DFIE, ſibi mutuo æquidiſtant, vnde triangula DIF, BHC æquidiſtant; & quia anguli FDI, FID, vti CBH, CHB per diametros quadratorum ablati, æquales ſunt, vtpote ſemirecti, lineæ DI, BH [a] in eodem ſunt plano: ſunt autem extrema diagonalium in eodem plano, in quo ſunt ipſæ diagonales; igitur & puncta in eodem ſunt plano cum linea AB. Quod demonſtrare oportuit.

[a] Ex elementis.

DVCTVVM PLANI
IN
PLANVM
PARS TERTIA.

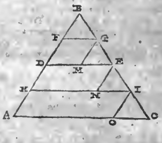
Vniuerſales quaſdam continet propoſitiones, reliquis planè fundamentales quibus corpora ex ductibus orta inter ſe comparantur.

PROPOSITIO XXXII.

ESto ABC trianguli latus AB diuiſum in quatuor partes æquales in punctis F, D, H: ductiſq; FG, DE, HI, lateri AC parallelis, demittantur ex G, E, I, lineæ GM, EN, IO parallelæ lateri AB.

Dico figuras FM, DN, HO, ſimul ſumptas, maiores eſſe dimidio figuræ ABC.

Demonſtratio.



VT AB ad HB, ſic AC eſt ad HI, id eſt ad AO; ſed HB continet tres partes, quarum AB habet quatuor ex construct. igitur & AO tres partes habet, quarum AC continet quatuor: vnde AC maior eſt rectâ AO: & illa maior quàm OC: ac proinde HO figura maior triangulo OIC: eodem modo oſtenditur DN figuram maiorem eſſe triangulo NEI, & ſic de cæteris. quia verò BF, FD æquales ſunt, parallelogrammum FM duplum eſt trianguli FBG, id eſt æquale triangulis FBG, MGE; figuræ igitur FM, DN, HO ſimul ſumptæ, maiores ſunt quatuor triangulis FBG, MGE, NEI, OIC, id eſt reſiduo figuræ ABC, quare & maiores ſunt dimidio eiuſdem. Quod oportebat demonſtrare.

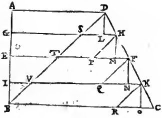
PROPOSITIO XXXIII.

ESto ABCD figura quadrilatera, habens AD, BC parallelas inter ſe; diuiſâ autem AB in quatuor partes æquales punctis G, E, I, ducantur

cantur æquidiſtantes vni laterum (puta B C) rectæ G H, E F, I K, & ex D, H, F, K rectæ demittantur D L, H M, F N, K O, parallelę lateri A B.

Dico A L, G M, E N, I O, figuras ſimul ſumptas maiores eſſe dimidio figuræ quadrilateræ A B, C D.

Demonſtratio.



DVcantur H P, F Q, K R parallelæ B D: ſecantes lineas G H, E F, I K in S, T, V. erunt igitur S P, T Q, V R, a ſiguræ ſimul ſumptę maiores dimidio figuræ B D C: figuræ igitur S M, T N, V O multò maiores ſunt dimidio figurę B D C: quare addito communi B A D, figuræ A L, G M, E N, I O ſimul ſumptæ ſunt maiores dimidio figuræ quadrilaterę A B C D: Quod fuit demonſtrandum.

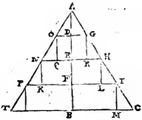
a 32 huius

PROPOSITIO XXXIV.

ESto A B C trianguli latus A B diuiſum quadrifariam in D, E, F; ductiſq; lineis D G, E H, F I, baſi C B æquidiſtantibus, demittantur rectæ G K, H L, I M parallelę lateri A B.

Dico corpora orta ex ductu, D K, E L, F M parallelogrammorum in ſe, plus dimidio complecti corpus quod exſurgit ex ductu A B C in ſe.

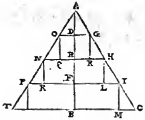
Demonſtratio.



PArallelopipedũ habens baſim, quadratum lineæ E H, & altitudinem E F, ad parallelopipedum habens baſim, quadratũ lineæ D G, & altitudinẽ D E id eſt E F, eam habet rationem quam E H quadratum ad quadratum D G: id eſt quam quatuor ad vnum: nam E H linea cùm dupla ſit lineæ D G, erit quadratum E H b quadruplum quadrati D G. eodem modo parallelopipedum habens baſim quadratum lineæ F I & altitudinem F B, ad parallelopipedum habens D G quadratum pro baſi & D E altitudinem; eſt vt nouem ad vnum; quia F I linea tripla eſt rectæ D G: igitur D K, E L, F M, ducta in ſe, continent decies & quater corpus habens baſim quadratum D G & altitudinem D E: Rurſum corpus habens baſim quadratum D G & altitudinem D E triplum eſt pyramidis, habentis baſim quadratum K H id eſt D G & altitudinem D E, ſiue G K ſiue D A; igitur D K ductum in ſe tertiò continet D A G ductum in ſe, & E L ductum in ſe, duodecies continet pyramidem habentem baſim, quadratum D G & E D altitudinem, id eſt duodecies continet G K H ductum in ſe; ſimiliter F M ductum in ſe, continet G K H ſiue H L I, ductum in ſe vigeſies ſepties: igitur D K, E L, F M, in ſe ipſas ductæ; continent A D G ductam in ſe quadrageſies & bis, itetum, D H ductum in ſe æquatur E G ducto in ſe, & G K H ducto in ſe vnà cum E G ducto in G K H bis; ſed E G ductum in ſe triplum eſt A D G ſiue G K H, ducti in ſe; addito igitur G K H ducto in ſe, erit E G ductum in ſe vna cum G K H ducto in ſe quadruplum A D G ducti in ſe. & quia E G ductum in G K H æquatur triangulo E G K ducto in G K H id eſt A D G ducto in ſe, & triangulo E D G ducto in G K H, id eſt dimidio A D G ducti in ſe, totum D H ductum in ſe, quinies continet A D G ductum in ſe, cum dimidio

b Ex elementis.

 midio



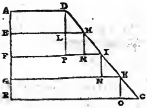
midio eiuſdem ducti in ſe. Simili ratione procedendo oſtendetur E F H I ductum in ſe, continere D A G ductum in ſe, tertiò ſupra vigeſies : & F C ductum in ſe idem A D G ductum in ſe continere trigeſies octies cum dimidio A D G ducti in ſe. addito ergo A D G ducto in ſe, totum A B C ductum in ſe id eſt A D G ductum in ſe, D H ductum in ſe, E I ductum in ſe, F C ductum in ſe, ſimul ſumpta continent A D G ductum in ſe ſexageſies ſexies, vnà cum dimidio A D G ducti in ſe. ſi igitur ab hac ſumma auferantur D K, E L, F M quantitates in ſe ductæ, id eſt quadrageſies & bis A D G ductum in ſe: reſiduum ablato minus eſt. igitur, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXV.

ESto A B C D trapezium habens A D, C B latera æquidiſtantia, diuiſaque A B quadrifariam in E, F, G ducantur rectæ E H, F I, G K parallelæ baſi B C, dein lineæ demittantur D L, H M, I N, K O.

Dico A L, E M, F N, G O figuras ductas in ſe, maiores eſſe dimidio figuræ A B C D ductæ in ſe.

Demonſtratio.

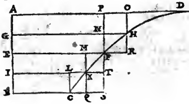


a Ex elementis.

ESt enim figura A B C D ducta in ſe æqualis figuris A L, E M, F N, G O, ductis in ſe, a item D L H, H M I, I N K, K O C in ſe ductis; vnà cum D L H ducto in altitudines A D, E H, F I, G K, bis: id eſt P H ducto ſemel in eaſdem altitudines ſimul cum D L H quater in ſe ducto, ſed A L, E M, F N, G O ductæ in ſe, maiores ſunt P H ducto in altitudines A D, E H, F I, G K vnà cum L D H quater in ſe ducto, cùm altitudines ſint communes, & A L, E M, F N, G O quantitates ſingulæ maiores ſint P H; igitur & maiores ſunt dimidio figuræ A B C D ductæ in ſe. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

SIt A B C D, figura intercepta duabus parallelis A D, B C habens A B rectam & D F C curuam, diuiſaq; A B in partes quatuor æquales in G, E, I, ductiſq; parallelis G H, E F, I K, erigantur rectæ, H O, F N, K M, C L æquidiſtantes A B: ſit autem A D minor duplâ ſecundæ G H, & illa minor duplâ tertiæ, & ſic de cæteris.



Dico figuras A H O, G F N, E K M, I C L ſimul ſumptas maiores eſſe dimidio figuræ A B C D.

Demon-

Demonſtratio.

CVm enim AD minor ponatur duplâ ipſius GH, patet AH rectangulum maius eſſe reſiduo OHD: ſimiliter ob eandem rationem, GF maius eſt quàm FNH; & EK maius ipſo KMF, &c. vnde AH, GF, EK, IC, figuræ ſimul ſumptæ, maiores ſunt dimidio figuræ mixtilineę ABCD. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

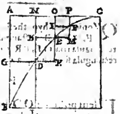
Nota: ſi eadem constructio & procedendi methodus ſeruetur in reſiduis figuris OHD, FNH, *&c. patet rectangula illis inſcripta, ſimul ſumpta, maiora eſſe dimidiis figurarum* OHD, FNH, *&c. adeoq; per ſimiles ablationes tandem reſiduam relinqui, ex tota figura mixtilinea quantitatem, datâ minorem.*

PROPOSITIO XXXVII.

ESto ABC figura intercepta duabus lineis AB, AC rectum angulum continentibus, perimeter verò CDB concaua ſit, diuiſâ autem AB bifariam in G, ducatur GD parallela AC & DN æquidiſtans AB: dein ND bifariam diuiſa in H, ducatur HE æquidiſtans AC & EO, ipſi AB æquidiſtans, & hoc ſemper fiat.

Dico rectangula hoc pacto ablata continere plus dimidio figuræ mixtilineę ABC.

Demonſtratio.



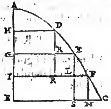
PErficiantur rectãgula BGD, DHE, EIF, &c. erunt illa æqualia rectangulis AD, NE, OF, &c. ob ſubdiuiſionem linearum per æquales partes: ſed GL, HK, IM rectangula maiora ſunt figuris mixtilineis BDG, DEH, EFI, igitur & rectangula AD, NE, OF, &c. ſimul ſumpta maiora ſunt figuris BDG, DEH, EFI, &c. id eſt reſiduo figurę mixtilineæ ABC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

ESto ABC figura intercepta rectis duabus, AB, BC angulum ABC rectum continentibus, & ADC perimetro conuexâ, diuiſa AB quadrifariam in H, G, I: ducantur HD, GE, IF, parallelæ BC, & DK, EL, FM, æquidiſtantes AB, ita vt rectangulis AN, GO, IP, BQ contineantur omnes partes curuitatis.

Dico HK, GL, IM, figuras ſimul ſumptas maiores eſſe dimidio figuræ ABC.

Demonſtratio.



QVantitas HK maior eſt figurâ HAD; & KL maior eſt ipſâ DKE, deîn & LM maior quàm ELF: patet autem IS maiorem eſſe figurâ MFC, igitur HK, GL, IM figuræ ſimul ſumptæ multo ſũt maiores figuris HAD, DKE, ELF, FMC, id eſt reſiduo figuræ ABC; igitur & maiores dimidio figurę ABC. Quod fuit demonſtrandum.

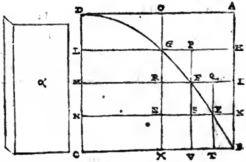
PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

REctangulum ABCD diuiſum ſit figurâ curuâ DGFEB, diuiſâ autem DC altitudine in partes quotuis æquales, in punctis L, M, N, ponantur LH, MI, NK, CB parallelę AD, occurrentes curuæ lineæ in G, F, E punctis per quæ ponantur rectæ OR, PS, QT, parallelę DC.

Dico rectangula OL, PR, QS, KT, æqualia eſſe rectangulo AL, ſiue KC.

Demonſtratio.



QVoniam per hypotheſim æquales ſunt lineæ DL, LM, MN, NC, id eſt OG PF, QE, KB: rectangula duo OL, PR æqualia ſunt rectangulo PM, ſimiliter, rectangula tria OL, PR, QS æqualia ſunt rectangulo QN: & OL, PR QS, KT rectangula ſimul ſumpta æqualia ſunt rectangulo KC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

IIſdem poſitis ſi OD linea minor ſit AO.

Dico rectangula AG, HF, IE, &c. maiora eſſe dimidio figuræ concauę DAB.

Demonſtratio.

QVoniam AO linea per hypotheſim maior eſt OD, rectangulum quoque AG maius eſt dimidio rectanguli AL: quia verò OL, PR, QS, KT rectangula per præcedentem æqualia ſunt rectangulo AL, rectangulum AG, quod maius eſt dimidio AL, maius quoque eſt triangulis ODG, PGF, QFE, KEB; adeoque multo maius mixtilineis ODG, PGF, QFE, KEB: additis igitur rectangulis HF, IE, &c. patet illa ſimul ſumpta cum AG rectangulo, maiora eſſe dimidio figuræ concauæ DAB. Quod erat demonſtrandum.

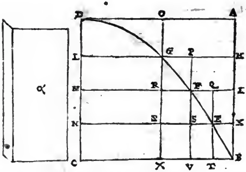
PROPOSITIO XLI.

EAdem poſitâ figurâ ſi AO, OD lineæ æquales ſint.

Dico rectangula GM, FN, EC ſimul ſumpta maiora eſſe dimidio figurę DBC.

Demon-

Demonſtratio.



PRoducta GR, pertingat ad NE in Z. quoniam igitur AO, OD lineæ æquales ſunt, rectangulum LO id eſt GM dimidium eſt AL: duo igitur rectangula GM, RN æqualia ſunt toti AL; ſed AL rectangulo æqualia ſunt rectangula OL, PR, QS, KT, igitur & illa quoque æquantur rectangulo GN: ergo & GN maius eſt conuexis figuris DGL, GFR, FES, EBT; additis igitur reſiduis rectangulis FZ, EC, rectangula GM, FN, EC inſcripta maiora ſunt dimidio figuræ conuexæ DBC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

EAdem poſitâ figurâ:
Dico tot poſſe rectangula concauæ & conuexę inſcribi figurę, quę æqualem habeant altitudinem, vt reſiduum relinquant, dato minus.

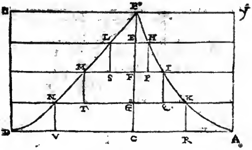
Demonſtratio.

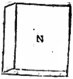
DAta ſit quantitas α: dein toties ſubdiuidatur DC linea, in partes æquales donec ſub BC baſi & altitudine NC rectangulum ſit minus quantitate α: tum per puncta diuiſionum lineæ ponantur parallelæ BC, occurrentes concauę figuræ in punctis G, F, E, per quæ lineæ ponantur æquidiſtantes DC; erunt igitur per 39. huius, rectangula omnia OL, PR, QS, KT ſimul ſumpta æqualia rectangulo KC, adeoque & minora quantitate datâ α, ſed ODG, PGF, QFE, KEB reſidua figuræ concauę minora ſunt rectangulis OL, PR, QS, KT: multò igitur minora ſunt quantitate datâ α. ſimiliter oſtenditur, ablatis ex conuexa figura rectangulis GM, FN, EC, reſidua relinqui, datâ quantitate minora. Quæ erant demonſtranda.

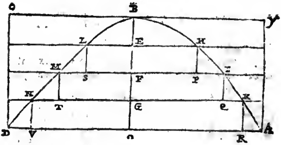
PROPOSITIO XLI.

DAtæ ſint figuræ concauæ aut conuexæ ABC, CBD communem habentes altitudinem BC, normalem ad ſubtenſam ACD.
Dico tot illis inſcribi poſſe rectangula (EP, FQ, GR: ES, FT, GV) æqualis altitudinis & baſibus in directum poſitis, vt ſi hęc in ſe inuicem ducta auferantur ex concauis ABC, CBD etiam ductis in ſe inuicem, relinquant quantitatem datâ minorem.

Demonſtratio.







STatuatur ſolidum quoduis Z. ex 42. huius, figuræ ABD inſcribi poſſunt tot rectangula, vt ijs ablatis ex figura ABD plana reſidua BHE, PHI, QIK, RKA, LBE, MLS, NMT, DNV ſint quouis dato plano minora, ac proinde fieri à fortiori poterit, vt reſidua illa plana dempto LBH, ſint dato plano minora. Inſcribi igitur poterunt figurę ABD tot rectangula vt ſolidum, quod fit ex ductu planorum BHE, PHI, QIK, RKA, in figuram CBD minus ſit dimidio ſolidi Z; itemque ſolidum quod fit ex ductu planorum MLS, NMT, DNV in rectangula EP, FQ, GR minus ſit dimidio ſolidi Z: ac proinde vt vtrumque ſimul ſumptum dato ſolido Z ſit minus. Iam verò AHEC ductum in CELD, æquatur planis BKA, QIK, PHI ductis in CELD, & rectangulis EP, FQ, GR ductis in CELD. ſed rectangula EP, FQ, GR ducta in CELD æquantur ijſdem rectangulis ductis in rectangula ES, FT, GV, vnà cum ijſdem rectangulis ductis in plana MLS, NMT, VND, ſiue vnà cum planis MLS, NMT, VND ductis in rectangula EP, FQ, GR. ergo AHEC ductum in CELD æquatur planis RKA, QIK, PHI, ductis in CELD, & rectangulis EP, FQ, GR, ductis in rectangula ES, FT, GV, vnà cum planis MLS, NMT, DNV ductis in rectangula EP, TQ, GR. ſed tota figura ABC ducta in totam CBD æquatur AHEC ducto in CELD, & HBE

ducto

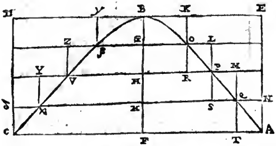
ducto in EBL, ergo figura tota ABC ducta in totam CBD æquatur planis RKA, QIK, PHI, HBE, ductis in totam figuram CBD, & rectangulis ductis in rectangula vnà cum planis MLS, NMT, DNV ductis in rectangula EP, EQ, GR. Ergo ſi rectangula ducta in rectangula auferantur ex toto ABC ducto in totum CBD, reſiduum erit id quod fit ex ductu planorum RKA, QIK, PHI, HBE in figuram CBD, vnà cum eo quod fit ex ductu planorum MLS, NMT, BNV in rectangula EP, FQ, GR. Atqui ſupra oſtendi figuræ ABD inſcribi poſſe tot rectangula, vt quod fit ex ductu planorum RKA, QIK, PHI, HBE, in CBD, vnà cum eo quod fit ex ductu planorum MLS, NMT, DNV in rectangula EP, FQ, GR ſit minus dato ſolido Z. Inſcribi igitur poſſunt figuris ABC, CBD tot rectangula, vt ſi hæc ducta in ſe inuicem auferantur ex tota ABC ductâ in totam CBD, relinquant quantitatem datâ minorem. Quod erat demonſtrandum.

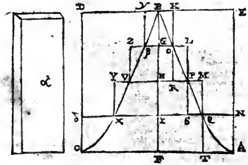
PROPOSITIO XLII.

Data ſit figura quæuis ſiue concaua ſiue conuexa ABF, terminata rectis lineis BF, AF angulum rectum continentibus.

Dico huic inſcribi poſſe tot rectangula, OH, PI, &c. vt ſi ea in ſe ducta auferantur ex figura in ſe ductâ, relinquatur quantitas datâ minor.

Demonſtratio.



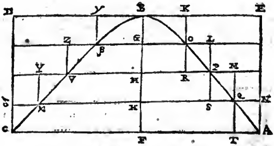


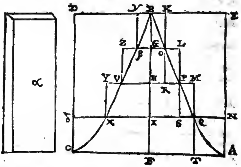
Figuræ ABF, apponatur æqualis & ſimilis figura BFC, communem habens altitudinem BF, & ſubtenſam FC, ſubtenſæ AF indirectum, huic inſcribantur totidem rectangula βH, VI, &c. quot inſcripta vis figuræ ABF, & ſunt eiuſdem altitudinibus ac baſibus indirectũ poſitis. Manifeſtum igitur eſt, ex definit. ſecũda huius

 figuram

figuram ABF duci in ſeipſam, nihil aliud eſſe quàm duci in figuram BFC, ſibi ex conſtr. ſimilem & æqualem: rectangula item huic inſcripta OH, PI, &c. in ſe duci, nihil aliud eſſe, quàm ea duci in rectangula βH, VI, &c. reuocatur igitur hæc proportio ad præcedentem, ex qua proinde eius habetur demonſtratio.

Scholion.





IN demonſtratione propoſitionis præcedentis in qua etiam huius præſentis propoſitionis probatio nititur, in hunc ſenſum fui ratiocinatus: plana mixtilinea AQT, QPS, POR, OBG *vnà cum mixtilineis quæ ſunt ad partem alteram* CX, XV, VB *(deſigno binis tantùm litteris, quia in figura deeſt littera tertia, ob γβ,* ZY, *&c. lineas non productas) ſiunt tandem dato plano minora. ergo ſolidum quod fit ex ductu planorum* AQT, QPS, POR, OBG *in figuram* FBC, *vnà cum ſolido quod fit ex ductu planorum mixtilineorum* βV, VX, XC, *in rectangula* GR, HS, IT, *tandem fiet minus dato ſolido. Hanc conſequentiam, quamuis minimè arbitrer à perito Geometra vocandam in dubium; ſi quis tamen vlteriùs probatam cupiat, ſequentem diſcurſum legat.*

Circumſcribe figuris ABF, FBC *tot rectangula donec infinita* NF, δF *ſimul ſumpta fiant minora dato plano.*

Deinde totidem figuris rectangula inſcribe; & perfice rectangula FE, FD. *Quoniam* [a] *rectangula* NT, MS, LR, KG, *æquantur rectangulo* NF, *& rectangula* Bβ, βV, VX, XC *æquantur rectangulo* δF, *erunt omnia quoque ab vtraque parte rectangula ſimul ſumpta dato plano minora. ergo ſolidum quod fit ex ductu rectangulorũ* NT, MS, LR, KG *in rectangulum* FD, *vnà cum ſolido nato ex ductu rectangulorum* βV, VX, XC *in rectangula* OH, PI, QF, *fiet tandem dato minus. ergo à fortiori ſolidum quod fit ex ductu planorum mixtilineorum* AQT, QPS, OBG *in figuram* FBC, *vnà cum ſolido nato ex ductu planorum mixtilineorum* βV, VX, XC *in rectangula* δH, PI, QF *tandem fiet dato ſolido minus. Quod erat probandum.*

a 39. huius.

Qua

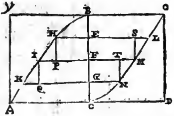
Quæ hoc ſcholio dicta ſunt, ſequenti etiam propoſitioni ſubſeruiunt. Caterùm malui ſeorſim hæc demonſtrare quàm diſcurſu non vſque adeo neceſſario propoſitionis 39. demonſtrationem per ſe ſatis difficilem facere prolixiorem.

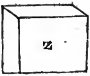
PROPOSITIO XLIII.

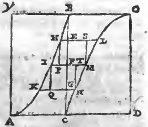
DAtæ ſint figuræ quæuis concauæ aut conuexæ A B C, C B O ſubalternè poſitæ, communem habentes altitudinem B C.

Dico illis tot inſcribi poſſe rectangula (H F, I G : &c. S F, T G, &c.) æqualis altitudinis & baſibus in directum poſitis, vt ſi hæc in ſe inuicem ducta auferantur ex totis B A C, C B O etiam ductis in ſe inuicem, relinquatur quantitas datâ minor.

Demonſtratio.



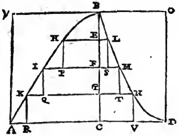


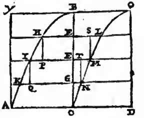


STatuatur quoduis ſolidum Z. Manifeſtum eſt ductis parallelis H E L, K G N tã paruas abſcindi poſſe ex figuris A B C, C B O portiones B H E, K A C G, B E L O, G C N, vt ſolida ex eorum ductibus mutuis nata minora ſint ſimul ſumpta quacunque propoſitâ quantitate, puta dimidio dati ſolidi Z. ſimiliter patet ex 42. huius, figuris K H E G, G E L N inſcribi poſſe tot rectangula, vt ijs ablatis, reſidua K I Q, I H P, L S M, M T N dato quouis plano ſint minora, ac proinde vt ſolidum quod fit ex ductu planorum K I Q, I H P, in G E L N, vnà cum ſolido quod fit ex ductu planorum L S M, M T N in rectangula H F, I G, minus ſit quauis propoſita quantitate, puta dimidio ſolidi dati Z. Inſcribi igitur poſſunt figuris A B C, C B O tot rectangula, vt ſolida quæ fiunt ex ductu planorum A K G C, H B E in plana C G N, B E L O, & ex ductu planorum K I Q, I H P, in planum E L N G, & ex ductu planorum L S M, M T N in rectangula H F I G, hoc eſt vt ſolidum quod fit ex ductu planorum A K G C, K I Q, I H P, H P E, in figuram totam C B O, vnà cum ſolido facto ex ductu planorum L S M, M N T in rectangula H F, I G, ſit minus dato ſolido Z. Iam verò eodem diſcurſu quo vſus ſum in præcedenti, oſtendam K H E G ductum in G E L N æquari planis K I Q, I H P ductis in planum G E L N, vnà cum planis L S M, M T N ductis in rectangula H F, I G, ac rectangulis inſuper H F, I G ductis in rectangula S F, T G. ſed tota figura A B C ducta in totám C B O æquatur K H E G ducto in G E L N; ac planis A K G C, H B E, ductis in plana C G N, E B L O. Ergo figura tota A B C ducta in totam C B O, æquatur planis A K G O, K I Q, I H P, H B E, ductis in figuram totam C B O, vnà cum planis L S N, M N T ductis in rectangula H F, I G, ac rectangulis inſuper H F, I G ductis in rectangula S F, T G. Quare ſi ex figurâ A B C, ducta in figura C B O auferantur rectangula ducta in rectangula, reſiduum erit ſolidum

quod fit ex ductu planorum A K G C, K I Q, I H P, H B E, in figuram C B O; vnà cum ſolido quod fit ex ductu planorum L S M, M T N in rectangula H F, I G. ſed hæc ſolida, vt ſuprà demõſtraui ſimul ſumpta minora eſſe poſſunt dato ſolido Z. ergo figuris A B C, C B O inſcribi poſſunt tot rectangula, vt ſi hæc in ſe mutuo ducta auferantur ex ductu totius in totum, relinquatur quantitas datâ minor. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.





SInt A B C, C B D figuræ, quarum vna conuexa, altera concaua; poſitæ autem ſint ſubalternè vel non ſubalternè.

Dico vtrique tot poſſe inſcribi rectangula (H F, I G, K C: L F, M G, N C) vt illa ducta in ſe mutuo plus auferant dimidio totius ducti in totum.

DEmonſtratio primæ figuræ eadem eſt cum 43. vel 42. ſecundæ verò eadem cum præcedenti.

PROPOSITIO XLV.

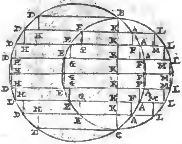
DAta ſint tria plana B A C, B E C, B D C qualiacunque, communem habentia altitudinē B C: poſitâq; B D normali ad B C, ducantur illi infinitæ, (hoc eſt quotcunque) æquidiſtantes A K E D, quæ occurrant communi lineæ in punctis K K, planorum verò perimetris in punctis A A, E E, D D.

Si A K, K E, K D, ſint continuè proportionales, ſiue, (quod idem eſt,) ſi quadrata K E, æqualia ſint rectangulis A K D:

Dico planum B A C ductum in planum B D C, æquari plano B E C ducto in ſe.

Demon-

Demonſtratio.



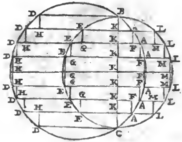
DVctis lineis A F, D H parallelis ad B C, inſcribantur planis B A C, B D C infinita rectangula K F, K F : K H, K H. ductis item lineis E G figuræ B E C infinita ſimiliter rectangula inſcribantur K G, K G. Rectangula K F, ducta in rectangula K H, corpori quod fit ex ductu plani B A C, in planum B D C inſcribunt infinita parallelopipeda, quorum baſes ſunt rectangula A K D, altitudines verò A F, A F ſiue D H, D H. Similiter rectangula K G, K G ducta in ſe; corpori quod fit ex ductu plani B E C in ſeipſum inſcribunt infinita parallelepipeda, quorum baſes ſunt quadrata K E, K E, altitudines G E, G E. Atqui ex hypotheſi rectangula A K D ſemper æqualia ſunt quadratis K E. Ergo parallelepipeda inſcripta corpori facto ex ductu plani B A C in planum B D C æquales baſes habent baſibus parallelopepedorum inſcriptorum corpori genito ex ductu plani B E C in ſeipſum. ſunt autem & altitudines A F altitudinibus E G æquales. Ergo omnia parallelopipeda inſcripta corpori genito ex ductu mutuo planorum B A C, B D E, æqualia ſunt omnibus parallelopipedis inſcriptis corpori producto ex plano B E C ducto in ſe. Cùm igitur in propoſitionibus proximè præcedentibus demonſtratum ſit parallelopipeda illa ita poſſe multiplicari corpora ipſa quibus inſcribuntur exhauriant, hoc eſt vt ex ijs ablata relinquant quātitatem datā qualibet minorem; ipſa etiam corpora inter ſe æqualia eſſe neceſſe eſt.

Vlteriorem huius rei demonſtrationem peritus Geometra non requiret. Vt tamen rigori geometrico per omnia ſatisfiat id ipſum accuratiùs demonſtrabimus hunc in modum.

SI corpus genitum ex mutuo ductu planorum B A C, B D E, non ſit æquale corpori quod fit ex plano B E C in ſe ducto, neceſſe eſt alterutrum eſſe minus altero. Ponatur primò id quod fit ex ductu plani B E C in ſeipſum eſſe minus altero quantitate aliquâ quam vocemus Z. Breuitatis etiam cauſa corpus natum ex ductu plani B E C, in ſe vocemus corpus B E C, & corpus factum ex ductu mutuo planorum B A C, B D C, corpus A B C D appelletur. Ex propoſitionibus proximè præcedentibus patet figuris B A C, B D C tot inſcribi poſſe rectangula K K, K F, K H, K H, vt ea in ſe mutuo ducta inſcribant corpori A B C D parallelopipeda; quæ deficiant ab ipſo corpore, cui inſcribuntur, quantitate minori quàm ſit data quantitas Z. ergo parallelopipeda inſcripta corpori A B C D maiora ſunt corpore B E C: ſed parallelopipeda inſcripta corpori A B D C ſupra demonſtrauimus æqualia ſemper eſſe totidem parallelopipedis inſcriptis corpori B E C. ergo parallelopipeda inſcripta corpori B E C etiam maiora ſunt ipſo corpore B E C, pars toto, quod eſt abſurdum. Non igitur corpus B E C minus eſt corpore A B D C. Eodem modo demonſtrabitur corpus A B D C non eſſe minus corpore B E C. Neutrum igitur altero minus eſt; æqualia igitur ſint neceſſe eſt. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XLVI.



DAta ſint quatuor plana B L C, B A C, B E C, B D C qualiacunque, communem habentia altitudinem B C: poſitâq; normali ad B C, ducantur illi quotcunque æquidiſtantes L A K E D, quę communi altitudini occurrant in punctis K, K, perimetris verò planorum in punctis L L, A A, E E, D D.

Si K E, K D rectæ proportionales ſint rectis K A, K L, ſiue (quod idem eſt) ſi rectangula L K E æqualia ſint rectangulis A K D:

Dico corpus genitum ex mutuo ductu planorum B L C, B E C, æquale eſſe corpori facto ex ductu mutuo planorum B A C, B D C.

Eodem prorſus diſcurſu demonſtratur quo prima pars.

Scholion.

THeorema iam demonſtratum vniuerſaliſſimum eſt, extenditq́; ſeſe ad ſequentes propoſitiones fere omnes. Ne igitur idem diſcurſus in ſingulis propoſitionibus labore inutili, & cum moleſtia lectoris repetendus eſſet, placuit totum exhauſtionis negotium hoc loco terminis vniuerſalibus proponere ac demonſtrare.

D V-

DVCTVVM PLANI IN PLANVM PARS QVARTA

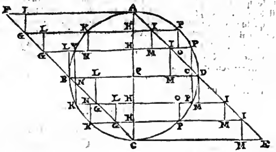
In comparationem adducit corpora orta ex ductu rectilinei in rectilineum, cum illis quæ oriuntur ex ductu partium circuli in ſe vel in alias circulares.

PROPOSITIO XLVII.

Circulum ABC, cuius diameter AC, contingant A & C rectæ, AF, CE æquales diametro AC, iunganturque FC, AE.

Dico ACF ductum in ACE æquale eſſe ſemicirculo ABC ducto in ſe.

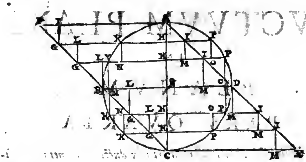
Demonſtratio.



Dvcantur quotcunque rectæ GK, HI, parallelæ ad AF, CE. Quoniam triangula FAC, GHC ſunt ſimilia, & ex hypotheſi EA, AC æquales ſunt, etiam GH, HC æquales erunt. Eodem modo HI, HA probantur æquales. Ergo rectangula GHI æquantur rectangulis AHC, hoc eſt quadratis KH. cùm igitur tria plana CFA, CKA, CAE communem habeant altitudinem AC, & rectangula AHI quorum latera ſunt in extremis planis CFA, CAE, æquentur quadratis plani medij CKA, conſtat ex 45. huius corpus ortum ex ductu plani CFA in planum CAE æquari corpori quod fit ex ductu plani CKA in ſe.

Sed doceamus in hoc exemplo quomodo præcedentis propoſitionis vniuerſalis demonſtratio deinceps applicari debeat.

Vocemus autem breuitatis gratia corpus natum ex ductu plani CFA in planum CAE, corpus AFCE: corpus verò natum ex ductu plani CKA in ſe, appelletur corpus AKC. Ducantur GL, IM; KN, parallelæ ad AC. Rectangula LH ducta in rectangula HM inſcribunt corpori AFCE parallelopipeda



quorum baſes ſunt rectangula G H I, altitudines G L, ſiue I M. ſimiliter corpori A K C quadrata H K in ſe ducta inſcribuur parallelopipeda quorum baſes ſunt quadrata K H, æqualia (vt oſtendi ſupra) rectangulis baſibus G H I, altitudines verò K N æquales item altitudinibus G L, ergo omnia parallelopipeda inſcripta corpori A F C E æquantur omnibus parallelopipedis inſcriptis corpori A K C, & hoc ſemper cõtinget; ſi iam negas corpora A F C E, A K C æqualia eſſe, neceſſe eſt alterũ altero ſit minus. ponatur primò corpus A K C eſſe minus corpore A F C E quantitate aliqua, quam vocemus Z. Quoniam liquet ex propoſitione 42. huius, ductis ſemper pluribus ac pluribus parallelis G K H I, tot rectangula L H, H M inſcribi poſſe planis C F A, C A E, vt parallelopipeda quæ ex eorum mutuo ductu inſcribuntur corpori A F C E deficiant ab ipſo corpore A F C E quantitate minori quàm ſit data quantitas Z, quâ ponebatur deficere corpus A K C à corpore A F C E, manifeſtum eſt parallelopipeda inſcripta corpori A F C E fore tandem maiora corpore A K C. ſed parallelopipeda inſcripta corpori A F C E æquantur, vt oſtenſum ſupra, totidem parallelopipedis inſcriptis corpori A K C. ergo etiam parallelopipeda inſcripta corpori A K C, maiora ſunt ipſo corpore A K C pars toto. Non igitur corpus A K C, minus eſt corpore A F C E. Eodem modo demonſtrabitur corpus A F C E non eſſe minus corpore A K C neutrum igitur altero minus eſt. ergo neceſſe eſt vt ſint æqualia. Quod erat demonſtrandum.

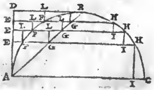
Huiuſmodi propoſitionis applicationes lectori deinceps faciendas relinquam, ne ipſius ingenio videar diffidere.

PROPOSITIO XLVIII.

Semicirculum A B C cuius diameter A C contingant in A & B, lineæ A D, B D, & B D quidem parallela ipſi A C, conueniat cum A D in D. Iunganturq; puncta A, B.

Dico A D B triangulum ductum in ſe æquale eſſe plano B D A F ducto in planum A D B H C.

Demonſtratio.



Dvcantur quotcunque rectæ E F G H, parallelæ ad tangentem B D, quæ, vt patet ex elementis, recta eſt ad A D. Triangula A E G, A D B ſunt ſimilia, ergo quadrata A E ſunt ad quadrata E G, vt quadrata A D ad quadrata D B. ſed quadrata A D, D B æquantur, ergo & quadrata A E, hoc eſt rectangula F E H, æquantur quadratis E G. Cùm igitur tria plana

plana BDAF, BAG, ADBHC, communem habeant altitudinem AD, & rectangula FEH quorum latera ſunt in planis extremis, ſemper ſint æqualia quadratis EG plani medij; per 45. huius plana extrema BDAF, ADBHC, in ſe mutuo ducta, æquantur plano medio, triangulo BDA ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

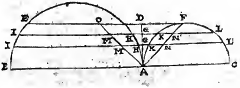
EX diſcurſu demonſtrationis patet etiam partiale planum EFFA ductum in planum partiale EHCA æquari triangulo EGA ducto in ſe.

PROPOSITIO XLIX.

COntingant ſe exteriùs in A ſemicirculi duo AEB, AFC: erectâq; ex A tangente AD, ducatur tangens FDHE minorem ſemicirculum in F.

Dico planum HG ductum in planum GI, æquari plano KG ducto in planum GL.

Demonſtratio.



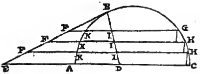
IVnge AF, apteturque inter AB, GE, recta AO, æqualis AF. æquales igitur ſunt anguli OAD, DAF: ſunt autem anguli ad D recti & AD linea communis; triangulum igitur OAD æquale eſt triangulo DAF: quare OAD triangulum ductum in ſe, æquale eſt triangulo DAF ducto in ſe, ſed a OAD triangulo ducto in ſe æquale eſt HG ductum in GI, & b FAD ducto in ſe æquale eſt GK ductum in GL, igitur HG ductum in GI æquale eſt GK ducto in GL. Quod fuit demonſtrandum. a Coroll. praeced. b 48. huius.

PROPOSITIO L.

CIrculum ABC cuius diameter AC contingat in B recta quæuis EB conueniens cum diametro AC in E, factaq; ED æquali EB ducatur recta BD.

Dico EBD triangulum ductum in ſe æquale eſſe corpori orto ex ductu plani FK in FH planum.

Demonſtratio.



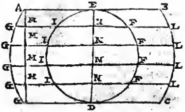
DVcantur quotcunque F K I H parallelæ ad A C, cùm B E, D E ex hypotheſi ſint æquales, ob triangulorum ſimilitudinem, æquantur etiam B F, F I, adeoque ſemper quadrata B F hoc eſt (quoniam B F tangens eſt) rectangula K F H, quadratis F I æqualia ſunt. Igitur per 45. huius planum K F, K F ductum in planum F H, F H æquatur triangulo E B D ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LI.

SInt duo circuli concentrici A B C, D E F; minorem D E F contingant in E & D rectę duæ parallelæ A B, H C, iunganturq́; A H.

Dico corpus ortum ex ductu plani G I in I L planum æquari corpori quod exſurgit ex ductu E H rectanguli in ſe.

Demonſtratio.



DVcantur quotcunque lineæ G M I N L, patet [a] rectangula ſingula G I L æquari quadrato tangentis A E, hoc eſt quadratis ſingulis M N, M N; ergo [b] corpus factum ex ductu plani G I, G I in planum I L, I L, æquatur rectangulo E H in ſe ducto. Quod erat demonſtrandum.

[a] Ex elementis.
[b] 45. huius.

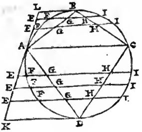
PROPOSITIO LII.

CIrculum A B C ſecet vtcunque recta A C, actaque per A recta A L quę circulum contingat in A, ducantur lineæ A C parallelæ B L, contingentes eundem circulum in B conuenienteſq́; cum A L in L; dein rectæ ducantur A B, B C.

Dico planum E F ductum in quadrilaterum G H æquale eſſe F G ducto in ſe.

Demon-

Demonſtratio.



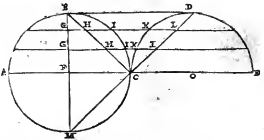
DVcantur quotcunque lineæ E F G H I, parallelæ ad B L & A C. Quoniam A L, B L lineæ circulum contingunt, & illis E F G I æquidiſtant, conſtat ex elementis E F, E G, E I lineas eſſe proporrionales, & A B C triangulum iſoſceles. vnde F G, H I lineæ inter ſe æquales ſunt, per 15. igitur libti de progreſſionibus etiam proportionales ſunt E F, F G, G H: Quare E F ductum [a] in G H, æquale eſt F G ducto in ſe. Quod fuit demonſtrandum. a 45. huius.

PROPOSITIO LIII.

COntingant ſe exterius in C duo circuli æquales A B C, C D E ductaque B D æquidiſtante diametris A C E quę circulos contingit in B & D, iungantur B C, C D; & diameter ducatur B F M.

Dico G H ductum in I K æquale eſſe corpori quod exſurgit ex H I ducto in ſe.

Demonſtratio.



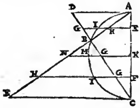
DVcantur quotcunque G H I K L parallelæ ad B D, A C E, & à contactu ponatur diameter B M, iungaturque M C, quoniam in B D, A C parallelas incidit B C, erit angulus C B D par angulo B C F, & ob eandem cauſam angulus C D B par angulo M C F, ſed anguli M C F, B C F faciunt rectum: ergo & anguli C B D, C D B faciunt rectum. ergo angulus B C D rectus eſt: eſt autem & B C M rectus, ergo M C, C D ſunt vna recta linea. Deinde cùm B D tangat æquales circulos, par erit [b] diametro B M. ergo ob triangulorum ſimilitudinem etiam G L par eſt G M. ſimiliter cùm F C, F B ſint æquales, etiam G H, G B æquales erunt. ergo rectangula H G L rectangulis B G M hoc eſt quadratis G I ſemper ſunt æqualia. Itaque ſemper G H, G I, G L ſunt in continuâ ratione; ergo cùm rectæ K L æquentur lineis H I, etiam G H, H I, I K [c] ſunt continuæ, adeoque rectangula omnia G H, I K, quadratis omnibus H I æqualia ſunt. ergo [d] triangulum G H, G H ductum in planum I K, I K æquatur plano H I, H I ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

b Ex elementis.
c 25. De progreſſ.
d 45. huius.

PROPOSITIO LIV.

SEmicirculum ABC cuius diameter AC contingant in A & C lineæ AD, CE, ductaque quauis ABE quæ circulo occurrat in B agatur per B linea CBD occurrens AD lineæ in D.

Dico triangulum FG, ductum in triangulum FH corpus producere æquale illi quod exſurgit ex ABC ſemicirculo ducto in ſe.



Demonſtratio.

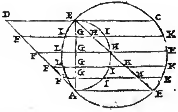
DVcatur enim quæuis KN, parallela contingenti AD quæ occurrat ABH, CD, AC lineis in N, L, K; triangula igitur CKL, AKN ſimilia ſunt, vt patet ex elementis. vnde KL ad KC, eſt vt AK ad KN, & LKN rectangulum æquale rectangulo AKC, id eſt quadrato KM: rectangula igitur HFG æqualia quoque ſunt quadratis FI: quare FG ductum in FH corpus generat, æquale illi quod oritur ex ABC ſemicirculo ducto in ſe. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LV.

CIrculum ABC ſecet recta quæuis AB non per centrum ducta, actiſque per A & B orthogonis AE, BD quæ AB rectæ ſint æquales, iungantur AD, BE.

Dico FG ſuperficiem ductam in GH, corpus formare æquale illi quod oritur ex LG ducto in GK.

Demonſtratio.



SVper AB vt diametro, ſemicirculus deſcribatur BIA & ducantur quotcunque LGIK parallelę ad BC, AE. erit igitur [a] FG ductum in GH, æquale BIA ſemicirculo ducto in ſe, ſed [b] BIA ducto in ſe æquale eſt LG ductum in GK cum omnia rectangula LGK, ęqualia ſint rectangulis BGA, hoc eſt quadratis GI, igitur & FG ductum in GH æquale eſt corpori quod oritur ex LG ducto in GK. Quod fuit demonſtrandum.

a 47. huius.
b 45. huius.

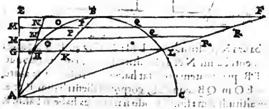
PRO-

PROPOSITIO LVI.

Circulum A B C cuius diameter A C contingant in A & B lineæ A E, B E conuenientes in E, & B E quidem æquidiſtans ſit diametro A C: dein iunctâ A B ducatur quæuis G H K L parallela A C occurrens circulo in H & L, rectæ verò A B in K, & ex A per H & L ducantur lineę A H, A L occurrentes E B rectæ in I & F.

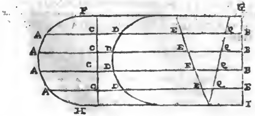
Dico M N ſuperficiem ductam in ſuperficiem Q R æqualem eſſe corpori orto ex ductu N O in M Q.

Demonſtratio.

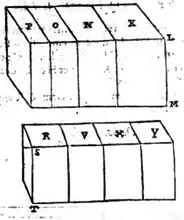


Ducantur quotcunque rectæ M N O P Q R, parallelæ ad A C, vel B E. Quoniam A E, B E lineę circulum contingunt, erunt inter ſe æquales: vnde ob ſimilitudinem triangulorum & G K æqualis rectę A G. quia verò G H, G K, G L continuæ proportionales ſunt, eſtque vt G H ad G K, ſic M N ad M P; & vt G K ad G L, ſic M P ad M R, etiam M N, M P, M R cõtinuę ſunt proportionales: ſed & M O, M P, M Q proportionales ſunt, & M P media communis vtrique ſeriei; igitur N M R rectangulum æquale eſt rectangulo O M Q: & vt M N ad M O, ſic M Q ad M R, & diuidendo vt M N ad N O, ſic M Q ad Q R: ac proinde omnia rectangula ſub M N, Q R æquantur rectangulis omnibus ſub N O, O Q. Quare M N ductum in Q R æquale eſt N O ducto in M Q. Quod erat demonſtrandum. 146 huius.

PROPOSITIO LVII.



Figuram A B, parallelis F G, H I, terminatam, ſecent lineæ quæcunque C C, D D, E E, Q Q, B B. dein A C ductum in C B exhibeat corpus



pus habens baſim K & altitudinem L M: & C D in D B æquale ſit magnitudini habenti baſim N & L M altitudinem, corpus quoque ex ductu D E in E B quantitatem proferat habentem baſim O & altitudinem L M, tandem E Q in Q B æquale ſit corpori habenti baſim P & eandem cum reliquis altitudinem: ſimili modo fiat corpus habens baſim R & S T altitudinem æquale illi quod oritur ex ductu B Q in Q A, & quantitas habens baſim V & S T altitudinem, producta ſit ex Q E in E A: dein E D in D A generet corpus habens baſim X & S T altitudinem, & D C in C A, corpus efformet cuius baſis ſit Y & altitudo reliquis æqualis.

Dico corpus habens baſes K N O P & altitudinem L M æquale eſſe illi quod baſes habet Y X V R, & altitudinem S T.

Demonſtratio.

OStenſum eſt in libro de linearum potentijs, prop.61. eiuſque Corollario, rectangula A C B, C D B, D E B, E Q B æqualia eſſe rectangulis B Q A, Q E A, E D A, D C A, igitur corpora orta ex ductu A C in C B, ex C D in D B, item ex D E in E B, & E Q in Q B, hoc eſt per hypotheſim corpus M L K N O P, æquale eſt corpori T S R V X Y, quod per hypotheſim æquatur illis quantitaribus quæ oriuntur ex ductu B Q in Q A, Q E in E A, item ex E D in D A, & ex D C in C A. Quod fuit demonſtrandum.

D V.

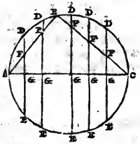
DVCTVVM PLANI
IN
PLANVM
PARS QVINTA

Agit de æquationibus & proportione ſolidorum quæ gignuntur ex ductu partium circularium in alias circulares.

PROPOSITIO LVIII.

ESto circulo ABC cuius diameter AC inſcriptum triangulum rectangulum ABC, ducanturque rectæ DFGE normales ad diametrum AC.

Dico DF ductum in FE, corpus producere æquale illi quod exſurgit ex ABC ſemicirculo ducto in ſe, minus ABC triangulo ducto in ſe.



Demonſtratio.

QVoniam DFE rectangula vnà cum quadratis FG, æqualia ſunt quadratis DG, igitur DF ductum in FE vnà cum FG ducto in ſe æquale eſt DG ducto in ſe; igitur ſi à DG ducto in ſe auferatur FG ductum in ſe, reſiduum DF ductum in FE æquale eſt ABC ſemicirculo ducto in ſe, minus ſuperficie FG id eſt triangulo ABC ducto in ſe: Quod fuit demonſtrandum. à 45. huius.

PROPOSITIO LIX.

HAbeant circuli duo ſeſe interſecantes ABC, DBE diametros in directum poſitas AC, DE, & punctum interſectionis B; ex quo ad diametrum normalis demittatur BF, fiantque GHILM parallelæ DG occurrentes circulis in GHLM.

Dico HI ductum in IM æquari GI ducto in IL.

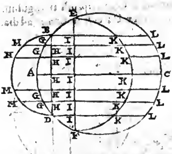
 Demon-

Demonſtratio.



INtelligatur enim ad BF deſcribi quadrans BKK, erit tàm HI ſuperficies ducta in ſuperficiem IM, quàm GI ſuperficies ducta in IL ſuperficiem æqualis IK ductæ in ſe; igitur HI ductum in IM æquale eſt GI ducto in IL: Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LX.



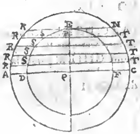
CIrculum ABC ſecent parallelę duæ DB, EF diametri circulorum EKF, BMD.

Dico GH ductum in HL, ad GI ductum in IL eam habere rationem quam MH ductum in ſe, habet ad IK ductum in ſe.

Demonſtratio.

PLanum GH ductum in HL, æquale eſt MH ducto in ſe, quia GHI rectangula æqualia ſunt rectangulis BHD, id eſt quadratis MH. ſimiliter GI in IL æquale eſt IK ducto in ſe; igitur vt MH ductum in ſe ad IK ductum in ſe, ſic GH ductum in HL ad GI ductum in IL. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXI.



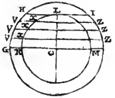
SInt ABC, DEB, item GHI, KLM circuli concentrici, & lineæ BN, HI quæ circulos KLM, DEF contingunt in E & L ſint æquales, ducantur deinde diametri AC, GZ parallelæ ad BN, HI, ductâq; normali OL, fiat illi æqualis QP normalis.

Dico RS ductum in ST æquale eſſe VX ducto in XZ.

Demon-

Demonſtratio.

DVcantur quotuis R S T, V X Z parallelæ ad B N, H I. Quoniam H I, B N lineæ contingentes ſunt & æquales, quadrata quoque dimidiorum H L, B E ſunt æqualia. ſed R S T rectangula æqualia ſunt quadrato B E, & V X Z rectangula æqualia quadrato H L; igitur R S T rectangula æqualia ſunt rectangulis V X Z: vnde cùm altitudo ſit eadem (nam P Q æqualis eſt L O,) R S ductum in S T [a] æquale eſt V X ducto in X Z. Quod fuit demonſtrandum.

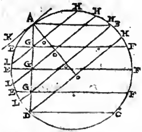


[a] 46. huius.

PROPOSITIO LXII.

CIrculum A B C ſecet recta quæuis A D non per centrum ducta, diuiſaq́; A D in partes quotuis æquales in G G, agantur per G rectæ E H, D H parallelæ contingenti A K; & L F, D C parallelæ ad A B orthogonę ad A D lineam: dein ex A demittatur A O normalis ad rectas E H: Dico planum A E D ductum in planum A B C D ſecundùm parallelas L H eſſe ad L G planum ductum in G H ſecundùm parallelas L G H, vt A D ad A O.

Demonſtratio.



REctangula E G F æquantur rectangulis L G H. Ergo parallelopipeda habentia pro baſibus rectangula L G H, quę exhauriunt corpus natum ex ductu L G, in G H, ſunt ad parallelopipeda quorum baſes ſunt rectangula E G F, & exhauriunt corpus genitum ex ductu E G in G F, vt altitudines A O, ad altitudioes A D, ſed quæ eſt proportio parallelopipedorum infinitorum ad infinita parallelopipeda, eadem eſt proportio corporum quibus parallelopipeda inſcribuntur, vti facilè colligitur ex diſcurſu propoſitionis vniuerſalis quæ eſt 45. huius. Ergo E G, ductum in G F, eſt ad L G, ductum in G H vt A D ad A O. Quod erat demonſtrandum.

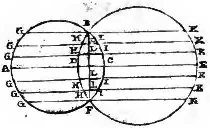
PROPOSITIO LXIII.

SEcent ſe vtcunque circuli duo A B C, D B E in B & F, iunctiſq́; interſectionum punctis, agantur per B & F orthogonæ ad B F.

 Dico

Dico ſuperficiem H L ductam in I K, corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu ſuperficiei G H in L I.

Demonſtratio.



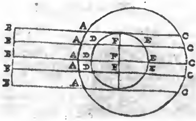
DVcantur infinitæ G H L I K, parallelæ ad G B K, G F K. quoniam tam H L K, quã G L I rectangula æqualia ſunt rectangulis B L F, erunt H L K, G L I rectangula quoque inter ſe æqualia. ergo vt G L ad H L, ſic L K ad L I, & diuidendo G H ad H L, vt K I ad I L. ergo G H I L rectangula æqualia ſunt rectangulis H L K I.
a 46. huius. corpus igitur ortum ex H L ducto in I K, æquale eſt a corpori orto ex G H ducto in L I. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXIV.

SInt duo circuli excentrici A C, D E, ductaq́; F F minoris circuli diametro, agantur per illius extrema contingentes A C, quę producantur in B, vt A B C rectangulis æqualia ſint rectangula D B E.

Dico A D ſuperficiem ductam in ſuperficiem E B æquale corpus proferre illi, quod oritur ex A B ducto in E C.

Demonſtratio.



QVoniam A B C, D B E rectangula æqualia ſunt, ex hypotheſi A B eſt ad B D, vt B E ad B C, & diuidendo B A ad A D, vt B E ad E C. vnde rectangula A B E C æqualia quoque ſunt rectangulis A D B E: ergo A D ductum in E B, æqua-
b ibid. le b eſt A B ducto in E C: Quod fuit demonſtrandum.

P R O-

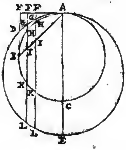
PROPOSITIO LXV.

Iiſdem poſitis:
Dico corpus ortum ex B D in E C æquari corpori quod oritur ex ductu A D in B C.

Demonſtratio.

QVoniam per hypotheſim rectangula A B C æqualia ſunt rectangulis D B E, erit vt B D ad D A, ſic B C ad B E. ergo & B D ad A D, vt B C ad E C, æqualia igitur ſunt rectangula B D C E, rectangulis D A B C. ergo B D ductum [a] in E C æquale A D ducto in B C. Quod fuit demonſtrandum. a ibid.

PROPOSITIO LXVI.



COntingant ſeſe interiùs in A circuli duo A B C, A D E: ductaque A E communi diametrali, ponatur B F parallela A E, contingens circulum A B C in B, conuenienſque in F cum A F contingente in A.

Dico F G ductum in F L corpus proferre æquale illi quod oritur ex F H ducto in F K.

Demonſtratio.

DVcantur (ipſi A C) infinitæ parallelæ F G H I K L & iungantur puncta contactuum A & B: quoniam A F, F B continentes æquantur, rectę quoque A F, F I æquales ſunt: vnde (quia tam G F L rectangula, quàm H F K, æquantur quadratis A F,) æqualia etiam exiſtunt quadratis F I; æqualia igitur ſunt inter ſe rectangula G F L, H F K. quare (cùm A F altitudo ſit communis) F G ductum in F L [b] æquale eſt F H ducto in F K. Quod fuit demonſtrandum. b Ibid.

DVCTVVM PLANI
IN
PLANVM
PARS SEXTA

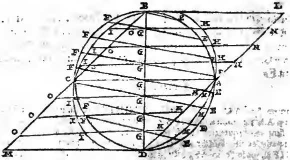
Ampliorem continet comparationem corporum productorum ex ductu planicircularis in circulare, cum iis quæ oriuntur ex ductu circularium partium, in Ellipticas, Parabolicas, Hyperbolicas.

PROPOSITIO LXVII.

Circuli A B C diametrum B D obliquè ſecent in G parallelæ E F: factiſque per G orthogonis K G, fiant E G lineis æquales rectæ H G & ipſis G F æquales G I: patet ex illis quæ in libro de ellipſi demonſtraui, puncta H H, I I eſſe ad ellipſim.

Dico corpus ex ductu H G in G I æquale eſſe ſemicirculo B A D ducto in ſe.

Demonſtratio.



Qvoniam E G, G F lineæ æquales ſunt lineis H G, G I, rectangula H G I æqualia ſunt rectangulis E G F id eſt quadratis K G: quare H G ſuperficies ducta in ſuperficiem G I, ª æquale producit corpus illi quod K G planum, ductum in ſe. Quod fuit demonſtrandum.

ª 45. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

Iiſdem poſitis rectæ B L, D M quæ in B & D tangunt, fiant æquales diametro B D, ponanturque L D, B M occurrentes rectis H I in N & O.

Dico

Dico NG planum ductum in planum GO efferre corpus æquale illi, quod educit HG ſuperficies ducta in ſuperficiem GI.

Demonſtratio.

ESt enim per præcedentem HG ductum in GI æquale ſemicirculo BAD ducto in ſe; ſed ſemicirculo BAD in ſe ducto, æquale eſt planum NG ductum in GO, a 47. huius. igitur NG ductum in GO æquale eſt HG ducto in GI. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXIX.

IIſdem poſitis:

Dico corpus ortum ex ductu GO in HN æquale eſſe illi quod oritur ex ductu HG in OI.

Demonſtratio.

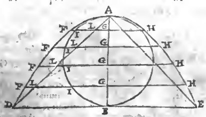
QVia ex hypotheſi BL, DM æquales ſunt BD, erunt & GN, GO æquales GD, GB, adeoque rectangula NGO æqualia rectangulis BGD. ſed ex hypotheſi rectangula quoque HGI æquantur rectangulis EGF, hoc eſt rectangulis BGD; ergo rectangula NGO æquantur rectangulis HGI. ergo vt NG ad HG, ſic IG ad OG, & diuidendo vt GH ad HN, ſic GO ad OI: vnde GONH rectangula, æqualia ſunt rectangulis HGOI: & GO b ductum in HN æquale b 46. huius. HG ducto in OI. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXX.

SIt DAE parabolæ axis AB æqualis lateri recto, poſitâque ad AB, per punctum B ordinatim lineâ DE, ducatur AD, & ſuper AB circulus deſcribatur.

Dico FL planum ductum in LH, æquari GI ſemicirculo ducto in ſe.

Demonſtratio.



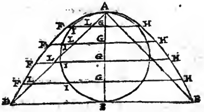
POnatur quotcunque FLH parallelæ DE, oſtenſum eſt propoſ. 201. lib. de parabola; rectangula omnia FLH æquari quadratis IG: igitur per 45. huius patet FL planum ductum in LH æquari GI ſemicirculo in ſe ducto. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXI.

Iſdem poſitis:
Dico F G ſemiparabolam ductam in ſe, æquari ſemicirculo A I B in ſe ducto vnà cum triangulo A D B ducto in ſe.

Demonſtratio.



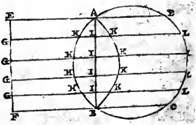
PLanum F G in ſe ductũ æquale eſt F L, ducto in L H & L G ducto in ſe: ſed F L, ductũ in L H æquale eſt I G ducto in ſe: igitur F G ductum in ſe æquatur L G, I G ductis in ſe: vnde cùm A B altitudo ſit communis & baſis corporis quod oritur ex F G plano in ſe ducto æqualis baſibus corporum productorum ex C G, L G planis in ſe ductis, erit A D B parabola in ſe ducta æqualis ſemicirculo A C B in ſe, & A D B triangulo in ſe ducto. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXII.

CIrculum A B C ſecet linea A B, ſuper qua deſcripto quouis rectangulo A F: fiant H I L rectangulis æqualia rectangula G I K; erunt K K

a 311. lib. de parabola. [a] ad parabolam.

Dico corpus ortum ex ductu G H, plani in planum I K, æquari corpori ex H I plano ducto in K L.



Demonſtratio.

QVoniam G I K rectangula æqualia ſunt rectangulis H I L, erit G I ad I H, vt L I ad I K, & diuidendo G H ad H I, vt L K ad K I: vnde G H K I rectangulis ęqualia ſunt rectãgula H I L K, vnde cùm A B altitudo ſit communis, corpus ex ductu G H plani in planum I K, [b] æquale eſt

b 46. huius. corpori ex ductu H I in K L. Quod erat demonſtrandum.

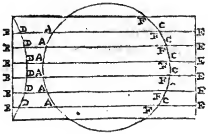
PRO-

PROPOSITIO LXXIII.

Circulum A C ſecent parallelæ B E inter ſe æquales, factaq; parabola B D producat D B planum ductum in altitudinem B E, corpus æquale illi, quod oritur ex ductu A B in B F.

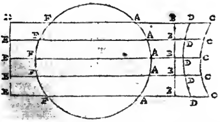
Dico B D ſuperficiem ductam in ſuperficiem E A æquale producere ſolidum illi quod emergit ex ductu B A in D F.

Demonſtratio.



Planum D B in B E ductum æquale eſt a B D ducto in B A & B D ducto in A E: ſimiliter A B ductum in B F æquale eſt A B ducto in B D: & A B ducto in D F; igitur cùm D B ductum in B E æquale ponatur A B ducto in B F, B D ductum in B A cum B D ducto in A E, æquatur B A ducto in B D, vnà cum B A ducto in D F; ablato igitur communi A B ducto in B D, remanebit B D ductum in E A æquale A B ducto in D F. Quod fuit demonſtrandum. a Ex 1. ſecundi.

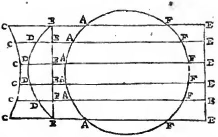
PROPOSITIO LXXIV.



Sint A B, B C lineæ inter ſe æquales, ponaturq; A F circulus & D D parabola; ſit autem corpus ex D B baſi in altitudinem B E æquale corpori quod emergit ex C B plano in planum B F.

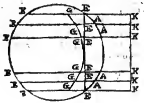
Dico D B multiplicatum in F E exhibere quantitatem æqualem illi quæ exſurgit ex plano C D ducto in B F.

Demonſtratio.



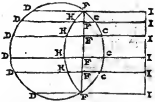
PLanum D B in B E ductũ æquale eſt duobus corporibus, nimirum illi quod oritur ex D B ducto in B F, & illi quod gignit D B ductum in F E. Similiter & C B ductum in B F æquale eſt D B ducto in B F, & C D ducto in B F; igitur D B in B F cum D B in F E æquatur D B in B F, cum C D in B F; igitur ablato communi D B ducto in B F, manet D B multiplicatum in F E æquale C D ducto in B F. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXV.



CIrculos æquales A B, C D ſecent rectæ E E, F F æqualia auferentes ſegmenta A E, C F. deſcriptiſq́; parabolis G G, H H: ſit corpus ex A E ducto in E B æquale corpori orto ex E G ducto in altitudinem E K & quod fit ex plano C F ducto in F D æquale ſit producto ex F H in altitudinem F I:

Dico A K ſuperficiem, ductam in ſuperficiem E G, vnà cum I C ducta in F H, æqualem exhibere magnitudinem illi, quę emergit ex A E ſuperficie ducta in G B & H D.



Demonſtratio.

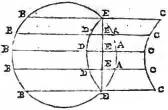
OStendimus in præcedentibus A K ductum in E G æquari A E ducto in G B; ſimiliter & I C in F H æquale eſſe C F ducto in H D. id eſt A E ducto in H D: vnde patet A K ductum in E G, vnà cum I C ducto in F H æquari A E ducto in G B & H D. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXVI.

POſitis ijſdem circulis & ſegmentis vt ſuprà, ductiſq; CC, DD parabolis, ſit AE multiplicatum in EB æquale CE in ED.

Dico CA ductum in ED corpus proferre æquale illi quod oritur ex AE ducto in DB.



Demonſtratio.

QVoniam corpus ex ductu AE in EB par illi ponitur quod oritur ex CE in ED, AE in ED, vnà cum AE in DB æquabitur CA in ED, vnà cum AE in ED; ablato igitur communi AE in ED, remanebit CA in ED ductum, æquale AE ducto in DP, quod fuit demonſtrandum. vera quoque eſt propoſitio ſi DD parabola contingat rectam EE.

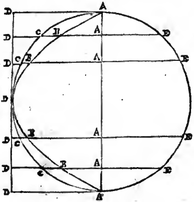
PROPOSITIO LXXVII.

CIrculum CE, cuius diameter AA contingat linea DD æquidiſtans & æqualis diametro AA, ponatur autem & AB parabola tranſiens per D punctum contactus. Ducanturq; infinitæ DCBAE, normales ad DD.

Dico planum DB ductum in AB planum magnitudinem exhibere æqualem illi quæ emergit ex CB ducto in BE.

Demonſtratio.

LIneæ DA, CA, BA ſunt [a] proportionales; igitur AC quadratum æquale eſt rectangulo DAB; id eſt DBA rectangulo vnà cum quadrato AB. ſed AC quadratum æquale eſt quadrato AB vnà cum rectangulo CBE; igitur CBE rectangulum vnà cum quadrato AB æquatur ABD rectangulo vnà cum quadrato AB; dempto igitur communi quadrato AB, manet DBA rectangulo æquale rectangulum CBE; atque ita omnia rectangula CBE æqualia ſunt rectangulis omnibus DBA. vnde cùm altitudo AA ſit communis, DB ductum in AB æquale eſt CB ducto in BE. Quod fuit demonſtrandum.



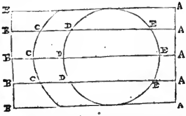
[a] 67. de parabola.

Corollarium.

QVòd ſi DD linea, æquidiſtans diametro AA, circulum non contingat, ſed eundem ſecet, aut remotior à circulo ponatur, ponantur autem tres proportionales DA, CA, BA, eadem manebit corporum æquatio, eritque AB ad parabolam, vti lib. de parabola oſtendimus. Quod verbo indicaſſe ſufficiet.

PROPOSITIO LXXVIII.

Esto A B rectangulum, intra quod circulus ponatur D E eandem habens altitudinem, dein D B E rectangulis æqualia fiant rectangula A B C: patet per ea quæ in lib. de parabola oſtendi, C C eſſe ad parabolam. Dico C D planum ductum in planum B E æquale corpus proferre illi quod oritur ex ductu B C in E A.



Demonſtratio.

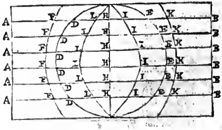
Ducantur infinitę parallelæ B C D E A. Quoniam D B E rectangula æqualia ponuntur rectangulis A B C, eſt vt B C ad B D, ſic B E ad B A, & diuidendo vt B C ad C D, ſic B E ad E A: rectangula igitur B C E A æqualia ſunt rectangulis C D B E quare B C planum ductum in planum E A æquatur C D ducto in B E. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXIX.

Sit iterum A B rectangulo inſcriptus circulus D E, ita vt A D, B E lineæ ſint æquales & circulus eandem habeat cum rectangulo altitudinem; fiant autem proportionales A B, A E, E F, & F D rectis æquales K E.

Dico planum A F ductum in ſe, æquale corpus proferre illi quod oritur ex F D ducto in D K.

Demonſtratio.



Quoniam A B, A E, E F, proportionales ſunt, & A B ad A E prima ad ſecundam hoc eſt ex hypotheſi vt A E ad E F, ſic E B id eſt ex hypotheſi A D exceſſus ad exceſſum A F. ergo conuertendo vt E A ad F A, ſic D A ad F D: diuidendo, igitur vt E F ad F A, ſic F A ad F D: quare tres ſunt proportionales E F, F A, F D, & A F quadratum ęquale rectangulo E F D, id eſt, quia ex hypotheſi F D, K E æquantur, rectangulo F D K. planum igitur A F ductum in ſe ipſum eſt æquale plano F D ducto in planum D K. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXX.

Iſdem poſitis; fiant AF rectis æquales FL, & ipſis AL æquales BI. Dico DL ſuperficiem ductam in ſe æquari FD ductæ in LI.

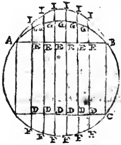
Demonſtratio.

Quoniam FD, FA, FE præcedenti propoſitione oſtenſæ ſunt proportionales, & FA lineis æquales ponuntur FL erunt & FD, FL, FE proportionales: & quia LD lineis æquales ſunt IE; (nam rectis AL æquales ſunt BI, & rectis AD æquales BE) rectę quoque a FD, DL, LI in continua ſunt analogia: quare DL ductum in ſe, b æquale eſt FD ducto in LI. Quod fuit demonſtrandum. a 9. De progreſſionibus. b 45. huius.

PROPOSITIO LXXXI.

Esto circulo ABC inſcriptum rectangulum ED poſitis FDEG parallelis lateri BC fiant continuæ proportionales DE, EG, GI. erit AIB c parabola. c 310. De parabola.

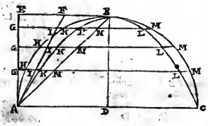
Dico corpus ortum ex ductu IE in ſe, æquari corpori quod formatur ex ductu IG plani in planum IF.



Demonſtratio.

Quoniam ED ponitur rectangulum rectæ AB, HC ſunt æquales, adeoque & æqualia ſunt ſegmenta EG, DF. vnde & FD lineæ æquales lineis EG: igitur d etiam proportionales ſunt IG, IE, IF: quare & IE ductum in ſe æquale eſt IG ducto in IF: Quod fuit demonſtrandum. d 12. vel 13. de progreſſionibus.

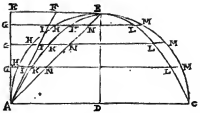
PROPOSITIO LXXXII.



Semicirculum ABC cuius diameter AC contingant in A & B lineæ AE, BE conuenientes in E, & BE quidem æquidiſtet AC: erectaque ex D centro ad contactum B rectâ DB, deſcribatur per ABC parabola cuius axis BD, quam in A contingat recta AF iunganturq; AB.

Dico IK ductum in IL, ad HG ductum in GM eam habere rationem quam FB quadratum ad quadratum EB.

Demonſtratio.



a 24. Sexti. b 87. De parabola.

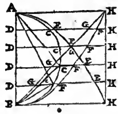
QVoniam E B, E A contingentes æquales ſunt, rectæ quoque, a A G, G N æquales ſunt; rectangula igitur H G M æqualia quadratis G N & K I L b rectangula æqualia quadratis I N, ſed quadrata I N ſunt ad quadrata G N vt quadratum F B ad quadratum E B; ergo & rectangula K I L ſunt ad rectangula H G M, vt quadratum F B ad quadratum E B; igitur I K ductum in I L ad H G ductum in G M, eam habet rationem quam F B quadratum ad quadratum E B, vt colligitur ex diſcurſu propoſitionis 45. huius. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIII.

SVper A B G ſemicirculi diametro A B, quadratum ſtatuatur D H, poſitiſque ad A B orthogonis D C H, fiant A C lineis æquales D C E, & ipſis B C æquales ponantur D C F: diameter autem quadrati ſit B L occutrens D H lineis in G. conſtat, c A E H, B F H eſſe parabolas.

c 300. lib. de parab.

Dico planum D C ductum in D F, æquari ſolido orto ex ductis D G in D E.



Demonſtratio.

d 41. De parabola.

VT A C ad A B, id eſt vt D E ad D H, ſic C D ad B C, id eſt C D ad D F; & permutando vt D E ad D C, ſic D H ad D F; ſed eſt vt D H ad D F, ſic d D F ad D G; igitur D E ad D C, vt D F ad D G. vnde rectangulum ſuper D C D F æquale eſt rectangulo ſuper D G D E; ſimiliter reliqua omnia rectangula D C D F, æquantur reliquis omnibus rectangulis D G, D E. ergo cùm altitudo A B ſit communis, erit D C ductum in e D F æquale D G ducto in D E. Quod fuit demonſtrandum.

e 46. huius.

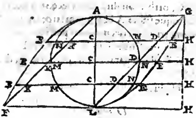
PROPOSITIO LXXXIV.

HAbeant B C, C E parabolæ ſubalternè poſitę communem axem A L æqualem lateri recto: ductiſque ordinatim A G, F L, deſcribatur ſuper A L vt diametro circulus M N qui per 126. parab. totus intra parabolas cadet, iunganturque puncta A F, L G.

Dico corpus ortum ex ductu B K in C D æquari corpori orto ex ductu M C in N E.

Demon-

Demonſtratio.



PLanum BC ductum in CD per præcedentem æquale eſt MC ducto in CE: ſed BC ductum in CD æquale eſt BK ducto in CD, vnà cum KC ducto in CD; & MC ductum in CE æquatur MC ducto in CN & MC ducto in NE. Igitur BK in CD cum KC in CD, æquatur MC in CN, cum MC in NE. eſt autem præterea KC ductum in CD oſtenſum [a] æquale MC ducto in CN; ablatis igitur æqualibus, nimirum KC ducto in CD, & MC ducto in CN, remanebit BK ductum in CD æquale MC ducto in NE. Quod fuit demonſtrandum. [a] 67. huius.

PROPOSITIO LXXXV.

IIſdem poſitis demittatur ex G linea GHF parallela & æqualis axi AL. Dico MC ductum in EH æquari BC ducto in DE.

Demonſtratio.

VT CH ad CE, ſic BC eſt ad [b] MC: ſed vt CH ad CE, ſic CE ad CD, igitur BC eſt ad MC. vt CE ad CD: eſt autem vt EC ad DC, ſic [c] HE ad ED; quia HC, EC, DC proportionales ſunt; igitur vt HE ad ED, ſic BC ad MC: ergo rectangula MC HE, æquantur rectangulis BC ED; igitur MC ductum in HE æquatur BC ducto in DE. Quod fuit demonſtrandum. [b] Ex 108. de parabola. [c] 1. De progreſſionibus.

PROPOSITIO LXXXVI.

IIſdem poſitis:
Dico magnitudinem productam ex BM ducto in EC, æquari magnitudini ortę ex BC ducto in DE.

Demonſtratio.

PLanum BC ductum in planum CE, æquale eſt BM ducto in CE & MC, ducto in CE: ſed MC ductum in CE ęquatur BC [d] ducto in CD; igitur & BC ductum in CE æquale eſt BM ducto in CE, vnà cum BC ducto in CD. Ruſum BC ductum in CE æquatur BC ducto in CD & BC ducto in DE; ergo BM in CE cum BC in CD, æquatur BC in CD cum BC in DE; ablato igitur communi BC ducto in CD, remanebit BM ductum in EC æquale BC ducto in DE. Quod fuit demonſtrandum. [d] 162. huius.

PRO-

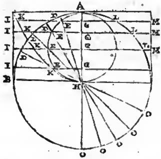
PROPOSITIO LXXXVII.

Circulum A B C, orthogonaliter in H ſecent ſemidiametri duæ B H, A H: deſcriptoque ſuper A H vt diametro, circulo A E H, ponantur per H quotuis diametri D O, occurrentes perimetro circuli A E H in E E punctis per quę rectæ ponantur E G N L. dein H E rectis æquales fiant E, G K: ᵃ conſtat K K eſſe ad parabolam: perficiantur denique rectangula B H A, H A M.

a 100. De parabola.

Dico planum D E ductum in E L, æquari plano I K ducto in K M.

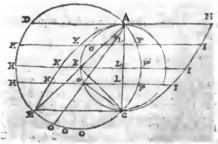
Demonſtratio.



Quoniam H E lineis æquales ſunt E, G K & H D ſemidiametri æquantur H B ſiue G I; reliquæ I K æquales ſunt H, E D. quia verò & I M lineis æquales ſunt A C ſiue D O, rectangula I K M æqualia ſunt rectangulis D E O, id eſt D E L. quare D E planum ᵇ ductum in E L æquatur I K ducto in K M.

b 46. huius.

PROPOSITIO. LXXXVIII.



Circulum A G C, cuius diameter A C, contingant in A & C lineæ C E, A M æquales ipſi A C, deſcriptiſq; per A E C, C M A parabolis quę vertices habeant in A & C. Patet ex 126. parabol. has cadere totas extra circulũ A G C. Ducatur A E occurrens circulo A G C in B, & centro B interuallo B A deſcribatur circulus A H F, liquet hunc tranſire per E & C.

Dico I L planum ductum in L K æquale corpus producere illi quod oritur ex F G ducto in G H.

Demon-

Demonſtratio.

DVcantur infinitæ I F L, G K H parallelæ ad A M, C E, rectangulis A G C æquantur rectangula ſuper [a] A C & L G : ſed C G lineis æquantur [b] lineæ L I, & ipſis A C ſunt æquales rectæ L K; igitur & I L K rectangula æqualia ſunt rectangulis A C, L G, hoc eſt rectangulis A G C. ſunt autem & A G C rectaugulis æqualia rectangula F G H nam rectangulis F G H æquantur rectangula A G O, hęc autem quia [c] G O, G C æquantur, rectangulis A G C æqualia ſunt; igitur I L K rectangulis æquantur rectangula F G H. quare I L ductum in L K æquale eſt F G ducto in G H. Quod fuit demonſtrandum.

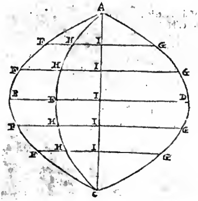
a Parte ex 8. ſexti.
b 100. De parabola.
c Serenus l. 2. prop. 45.

PROPOSITIO LXXXIX.

HAbeant A B C, A D C ſimiles & æquales ſectiones conicę communem ordinatim poſitam A C, ad communem axem B D, ſic vt G F, parallelæ B D, ab A C biſecentur, tum ſuper A C, deſcribatur arcus quicunque circularis I H, vel alia quæuis ponatur ſectio conica.

Dico F H ductum in ſe, vnà cum H G ducto in ſe, duplum eſſe corporis, quod oritur ex H I ducto in ſe vnà cum I G ducto in ſe.

Demonſtratio.



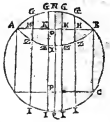
QVoniam A B C, A D C ſimiles & æquales ſectiones ponuntur ; & recta B D, adeoque & illi parallelæ biſecantur ab A C; quadrata igitur F H, H G [d] ſimul ſumpta duplicia ſunt quadratorum H I, I G, quare [e] corpus ortum ex ductu F H in ſe, vnà cum H G in ſe, duplicia ſunt corporis ex H I ducto in ſe, ſimul cum I G ducto in ſe: Quod fuit demonſtrandum.

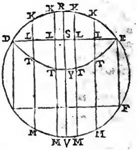
d 9. ſecundi.
e Ex diſcurſu 45. huius facile colligitur.

PROPOSITIO XC.

SInt A B C, D E F circulis inſcripta quæcunque rectangula A C; D F: oportet exhibere rationem quam obtinet G H ſegmentum ductum in ſegmentum H I, ad L K ſegmenrum ductum in ſegmentum L M.

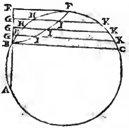
Conſtructio & demonſtratio.





DVctis N Q, R V diametris quæ A B, D E lineas bifariam & ad rectos diuidant in O & S; fiant G H I rectangulis æqualia rectangula O P H Z & K L M re-
a 113. parab. ctangulis æqualia rectangula ſuper O P & L T: conſtat A Z B, D T E eſſe a parabolas habentes vertices in X & Y. dico autem G H ductum in H I ad K L ductum in L M eandem obtinere rationem quam habet A X B parabola ad parabolam D Y E. Quoniam G H I rectangula æqualia ſunt rectangulis ſuper H Z & P O; G H ductum in H I æquale eſt H Z ducto in O P altitudinem. eodem modo cùm K L M rectangula æqualia ſint rectangulis ſuper L T O P, K L ductum in L M æquatur L T ducto in altitudinem O P, G H igitur ductum in H I, ad K L ductum in L M eam obtinet rationem quam H Z ductum in altitudinem O P, ad L T ductum in eandem altitudinem O P, id eſt quam baſis ad baſim, nimirum A X B parabola ad parabolam D Y E. igitur, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XCI.



CIrculum A B C ſecet recta quædam A B non per centrum ducta; actâque per B orthogonâ B C, ducatur E F parallela B C, circulum contingens in F conueniensq; cum A B linea in E. dein per puncta B & F ducatur hyperbola B I F, cuius diameter A B E ad quam E F ſit ordinatim applicata.

Dico G I ductum in ſe æquari H G ducto in G K.

Demon-

Digitized by Google

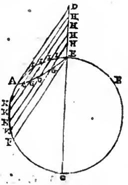
Demonſtratio.

DVcantur quotcunque GHIK parallelæ ad EF, BC, quç omnes erunt ordinatim poſitæ ad diametrum ABE, vtpote æquidiſtantes ordinatim poſitæ EF: oſtenſum eſt autem lib. noſtro de Hyperbola [a] GH, GI, GK eſſe continuas: igitur [b] planum GI ductum in ſe æquatur GH ducto in GK. Quod fuit demonſtrandum.

a Ex conuerſa 100. Hyp.
b 45. huius.

PROPOSITIO XCII.

CIrculum ABC cuius diameter CE contingat in A linea AD conueniens cum diametro in D ductaq; EF parallela contingenti, per puncta A & E deſcribatur hyperbola cuius diameter ſit CED, & ordinatim poſita ad diametrum AD.



Dico corpus ortum ex HG ducto in ſe æquari quantitati ortç ex HI ducto in HK.

Demonſtratio.

DVcantur enim infinitç HIGK, parallelæ ad AD, EF, defendimus lib. de Hyperbola [c] lineas omnes HI, HG, HK in continua eſſe analogia, vnde patet [d] HG ductum in ſe æquari HI ducto in HK. Quod fuit demonſtrandum.

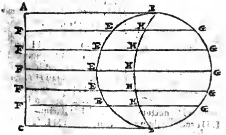
c Conuerſa 206. Hyp.
d 45. huius.

PROPOSITIO XCIII.

CIrculum EBD contingant duæ rectæ AB, CD ſibi mutuo æquidiſtantes, quas orthogonaliter in A & C, ſecet linea AC; per puncta deinde B, D deſcribatur hyperbola cuius axis æquidiſtet tangentibus AB, CD.

Dico FH ductum in ſe æquari FE ducto in FG.

Demonſtratio.



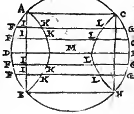
DVcantur quotuis FEHG parallelç ad AB. libro noſtro de Hyperbola [e] oſtenſum eſt omnes lineas FE, FH, FG eſſe in continua analogia. igitur ex propoſ. vniuerſali 45. huius, patet veritas propoſitionis. Quæ fuit demonſtranda.

e Conuerſa 210. Hyp.

PROPOSITIO XCIV.

Circulum A B C ſecet recta quæuis A B non per centrum acta, ductiſque per A & B orthogonis A C, B H deſcribantur oppoſitæ ſectiones A K B, C L H habentes centrum M commune cum centro circuli.

Dico L I ductum in I K ad F I ductum in I G, eam habere rationem quam L I K rectangulum habet ad rectangulum F I G.



Demonſtratio.

a 36. hyperb.

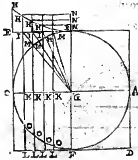
b Colligitur ex diſcurſu 46. huius.

Rectangulum a L I K eſt ad rectangulum L I K, vt A I B rectangulum ad rectangulum A I B, id eſt vt F I G rectangulum ad rectangulum F I G. Ergo omnia rectangula L I K ſunt ad omnia F I G, vt vnum L I K ad vnum F I G. vnde cùm A B altitudo ſit communis, erit b L I planum ductum in planum I K ad F I ductum in I G vt L I K rectangulum ad rectangulum F I G. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XCV.

Eſto circulo A B C quadratum circumſcriptum D E, actiſque per G centrum lineis G M I quæ circulũ ſecent in M, agantur per M quotcunque orthogonæ I L, quæ erunt parallelæ ad L E. fiantque G I lineis æquales K H I, conſtat puncta H H, eſſe ad hyperbolam.

Dico H I planum ductum in planum H L, ad I M, ductum in M L, eſſe vt I H L rectangulum ad rectangulum I M L.



Demonſtratio.

c 201. hyperbol.

d 35. hyperb.

Ducatur diameter F B N tranſiens per cõtactum B, oſtenſum eſt lib. de Hyperb. c puncta B H H eſſe ad Hyperbolam: vnde d L H I rectangulum eſt ad rectangulum L H I vt N H quadratum ad quadratum N H, id eſt I B quadratum ad quadratum I B, ſed vt I B quadratum ad quadtarum I B: ſic etiam M I O rectangulum eſt ad rectangulum M I O id eſt I M L rectangulum ad rectangulum I M L; igitur L H I rectangula ptoportionalia ſunt rectangulis I M L. ergo omnia rectangula I H L ſunt ad omnia rectangula I M L vt vnum rectangulum I H L ad vnum rectangulum I M L, vnde cùm E B altitudo ſit communis, e H I ductum in H L, ad I M ductum in M L, eam obtiner rationem quam L H I rectangulum ad rectangulum I M L. Quod fuit demonſtrandum.

e Colligitur ex diſcurſu 46. huius.

PRO-

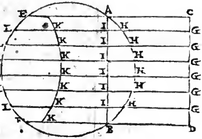
PROPOSITIO XCVI.

Circulum ABF ſecet recta quædam AB non per centrum ducta; actiſque per A & B orthogonis CAE, DBF; fiat ſuper AB rectangulum ACDB: & HGL rectangulis æqualia ponantur rectangula IGK: facile colligitur ex illis quę in libro de parabola demonſtraui, puncta KK eſſe ad parabolam.

Dico GH ductum in KL æquari HI ducto in GK.

Demonſtratio.

Dvcantur infinitæ GHIKL parallelæ ad CAE, DBF. Quoniam IGK rectăgula æqualia ponuntur rectangulis HGL, erit vt GH ad GI, ſic GK ad GL; & diuidendo vt GH ad HI, ſic GK ad KL: vnde HIGK rectangulis æqualia ſunt rectangula GHKL. ergo GH ductum in KL [a] æquale HI ducto in GK. Quod fuit demonſtrandum. a 46. huius



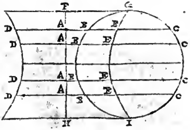
PROPOSITIO XCVII.

Circulum BC contingant duæ parallelæ FG, HI quas orthogonaliter ſecet in F & H linea AA; fiantque BAC rectangulis æqualia rectangula DAE; ſint autem DD, EE ſectiones oppoſitæ quarum centrum ſit in recta AA.

Dico DA planum ductum in planum BE æquari AB ducto in EC.

Demonſtratio.

Qvoniam BAC rectangulis æqualia ponuntur rectangula DAE, AE ductum in ſe, [b] æquale eſt AB ducto in AC ſed AB ductũ in AC æquatur AB ducto in AE, & AB ducto in EC: item AE ductum in ſe, ſiue DA ductum in AE æquatur DA ſiue EA ducto in AB, vnà cum DA ducto in BE: dempto igitur communi EA ducto in AB, remanebit DA ductum in BE æquale AB ducto in EC. Quod fuit demonſtrandum. b 45. huius

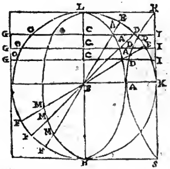


PROPOSITIO XCVIII.

QVadrato G I inſcriptus ſit circulus cuius centrum B, & diameter C H, circulo verò inſcripta ſit ellipſis habens centrum commune B & H C axem maiorem: rectis deinde B A æquales quotcunque ponantur orthogonæ C A D. patet ex 243. de hyperb. puncta D D D eſſe ad hyperbolam.

Dico O A ductum in A E æquale eſſe G D ducto in D I.

Demonſtratio.



PRoctactæ D C occurrant circulo in O, & lateri quadrati in G. Quoniam lineæ C I æquantur diametris B E, & B A lineis æquales ponuntur C A D, erunt A E reliquis æquales I D. ſunt verò & F A, lineis æquales lineæ G D. ergo I D G rectangula æqualia ſunt rectangulis E A F id eſt rectangulis O A E: quare [a] O A ductum in A E æquale eſt G D ducto in D I. Quod erat demonſtrandum.

[a] 46. huius.

D V-

DVCTVVM PLANI
IN
PLANVM
PARS SEPTIMA

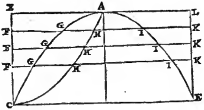
Confert inter ſe corpora nata ex ductu plani parabolici in parabolicum.

PROPOSITIO XCIX.

PArabolam A B C ſecet diameter quæcunque B C, actâq; per C orthogonâ C E, ducatur recta A B parabolam contingens in A, æquidiſtans autem ipſi C E, conueniensq; cum C B in B: dein per A & C parabola deſcribatur H H, verticem habens in C, & A B ordinatim poſitam ad diametrum C B.

Dico, F G ductum in F I æquari F H ducto in ſe.

Demonſtratio.



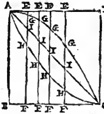
DVcantur infinitæ F G H I K, parallelæ ad C E, oſtenſum eſt libro noſtro de Parabola, [a] rectas F G, F H, F I in continua eſſe analogia: vnde per 45. huius patet F G planum ductum in F I æquari F H plano ducto in ſe. Quod fuit demonſtrandum. [a] 167. parabola.

Corollarium.

HInc patet ſi ex E quoque erigatur diameter, occurrens A B productæ in L, quod F G ſuperficies ducta in ſuperficiem G K æquale producat corpus illi quod oritur ex F H plano in ſe ducto, nam cum I K lineæ æquales ſint rectis F G, & F G, F H, F I ſint continuæ, erunt & F G, F H, G K in continua analogia: vnde per 45. huius patet propoſitum.

PRO-

PROPOSITIO C.



SIt A B C rectanguli diameter A C, deſcriptâque per A & C parabolâ cuius ſit axis A B, deſcribatur & altera per A C cuius axis ſit C D.

Dico E G ſuperficiem ductam in ſuperficiem H F æquari plano G I ducto in ſe.

Demonſtratio.

DVcantur quotcunque E G I H F parallelę ad D C, A B. Quoniam [a] E F, E I, E G ſunt continuæ, & I H rectæ æquales rectis I G, erunt [b] & E G, G I, H F in continua analogia: vnde paret [c] E G planum ductum in planum H F, æquari G I plano ducto in ſe. Quod fuit demonſtrandum.

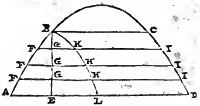
a 67. parab.
b Coroll. 9. de progreſſ.
c 45. huius.

PROPOSITIO CI.

SEcent A B C parabolam duæ quæuis parallelæ A D, B C, demiſſáque ex B diametro B K, fiant inter A K, K D mediæ E L, dein per B & L parabola deſcribatur H H, cuius diameter B E & E L ordinatim poſita.

Dico planum F G ductum in planum G I æquari G H plano in ſe ducto.

Demonſtratio.



d 45. huius.

DVcantur enim ad B C parallelæ quotuis F G H I, colligitur ex libro de parabola propoſ. 275. F G, G H, G I lineas in continua eſſe analogia: vnde [d] planum F G ductum in planum G I æquatur H G plano in ſe ducto. Quod fuit demonſtrandum.

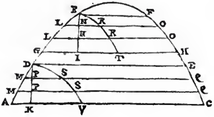
PROPOSITIO CII.

SEcent A B C parabolam æquidiſtantes quatuor B F, G H, D E, A C, ſic vt B F G H eandem habeant altitudinem quam D E, A C: tum ex B & D diametri demittantur B I, B K.

Dico L N planum ductum in planum N O æquari M P ducto in P Q.

Demon-

Demonſtratio.

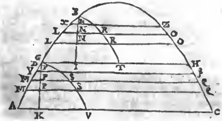


DVcantur rectæ quotuis LNRO, MPSQ, parallelæ ad BF. ponatur inter GI, IH media IT, item inter AK, KC media KV, & per puncta B, T, D, V parabolæ deſcribantur quarum diametri BI, DK, & ordinatim poſitæ IT, KV, a erunt illæ æquales & ſimiles. quare per præcedeor. GN ductum in NO, æquale a 175. parabol.
eſt NR ducto in ſe, & MP ducto in PQ æquale PS in ſe ducto: ſed NR ductum in ſe æquale eſt PS ducto io ſe (ſunt enim b NR, PS eædem parabolæ & æquè altę:) b Ex 175. parab.
igitur LN plaoum ductum in planum NO, æquatur MP ducto in PQ. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CIII.

IIſdem poſitis ſumatur ex BI pars quæuis IN, cui æqualis ponatur PK; & per N, P rectæ agantur XZ, Yβ parallelę ipſis GH, AC. Dico rurſum LN ductum in NO æquari MP ducto in PQ.

Demonſtratio.



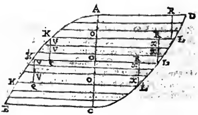
DVctis more ſolito parallelis infinitis LNRO, & MPSQ; lineæ LN, c NR, NO c 45. huius.
ſunt in cootinua analogia. Ergo LN ductum in NO æquatur NR ducto in ſe: eodem modo quoniam MP, PS, PQ ſunt contiouè proportionales, MP ductum in PQ æquatur PS ducto in ſe: ſed NR, PS in ſe ducta æquantur (ſunt enim NR, PS eædem parabolæ & æquè altæ:) ergo LN ductum in NO æquatur MP ducto in PQ. Quod erat demonſtrandum.

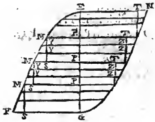
PROPOSITIO CIV.

SInt A B C, A C D parabolæ æquales & ſimiles ad eundem axem ſubalternè poſitæ, ponantur autem & aliæ quæuis duæ parabolę æquales ac ſimiles E F G, E G H ad eundem axem ſubalternè poſitæ.

Dico corpus ortum ex ductu parabolæ A B C in parabolam A C D, ad corpus ortum ex ductu parabolæ E F G in E G H parabolam, rationem habere compoſitam ex ratione quadrati B C ad quadratum F G, & ex A C altitudine ad altitudinem E G.

Demonſtratio.





a 1. *De parabola.*

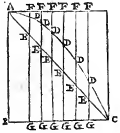
DIuiſis A C, E G quadrifariam, actíſque per diuiſionum puncta parallelis K L, M N, demittantur ex K & M ad R L, orthogonæ K Q, M S: item ducantur L R, N T iiſdem orthogonæ: breuitatis autem cauſâ corpora ex ductu mutuo parabolarum orta vocentur corpora A, E. Quadratum K O eſt ad quadratū B C, vt a O A ad C A, hoc eſt ex conſt. vt P E ad G E, hoc eſt vt quadratum M P ad quadratum F G. ergo & K O ad B C, vt M P ad F G, & permutando K O ad M P, vt B C ad F G. Eodem modo oſtendam, O L hoc eſt O R eſſe ad P N, hoc eſt P T vt A D, ad H E, hoc eſt ex hyp. vt B C ad F G. Cùm igitur ratio rectanguli K O R ad rectangulum M P T componatur ex laterum rationibus K O ad M P, O R ad P T, erit hęc duplicata rationis B C ad F G; hoc eſt eadem quæ quadrati B C ad quadratum F G: iam autem ſolidum quod fit ex ductu rectanguli K O in rectangulū O R ad ſolidum quod fit ex rectangulo M P ducto in rectangulum P T rationem habet compoſitam ex ratione baſis ad baſim hoc eſt rectanguli K O R ad rectangulum M P T, & ratione altitudinum O O, P P. Cùm igitur rectangula K O R, M P T ſint ad ſe inuicem vt quadratum B C ad quadratum F G; & altitudines O O, P P, vt A C, E G, quemadmodum colligitur ex hypotheſi; habebit ſolidum quod fit ex K O in O R, ad ſolidum ex M P in P T rationem compoſitam ex rationibus quadrati B C ad quadratum F G, & A C ad E G. ſimiliter oſtendam ſingula reliqua ſolida facta ex rectangulis reliquis K O, in reliqua O R eandem habere rationem compoſitam ad ſingula alia ſolida facta ex rectangulis reliquis M P, in rectangula reliqua P T. ergo ſingula ſolida inſcripta corpori A ſunt proportionalia ſingulis ſolidis in-
b 12. *quinti.* ſcriptis corpori E. ergo vt vnum ad vnum, ſic b omnia ad omnia: ſed ſupra oſtendi vnius ad vnum rationem eſſe compoſitam ex rationibus quadrati B C ad quadratum F G, & A C ad E G. ergo omnia ſolida inſcripta corpori A ſunt ad omnia inſcripta
c 43. *huius.* ſolida corpori E in dicta ratione compoſita; cùm igitur c ſolida vtrique corpori tot inſcribi poſſint, vt deficiant à corporibus ipſis quantitate datâ minori, concluditur

eodem

eodem fore diſcurſu qua vſi ſumus in præcedentibus, corpora A, & E, in eadem eſſe ratione compoſita ex rationibus quadtati B C ad quadratum F G, & altitudinum A C, E G. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CV.

PArabolam A D C, cuius axis A B & ordinarim poſita C B, contingat in A linea A F, ducaturq; recta A C.



Dico F D ſuperficiem ductam in ſuperficiem E G corpus producere æquale illi quod oritur ex ductu F E in E D.

Demonſtratio.

DVcantur quotuis F D E G parallelæ ad A B, vt C E ad E A, ſic G E ad E F; ſed vt [a] C E ad E A, ſic E D eſt ad D F; igitur vt E G ad E F, ſic E D ad D F. vnde rectangulum ſub E G F D æquale eſt rectangulo ſub E D, E F; ergo F D planum ductum in planum E G æquale [b] F E plano ducto in planum E D. Quod fuit demonſtrandum.

a 54. De parab.

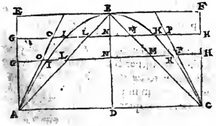
b 46. huius.

PROPOSITIO CVI.

PArabolam A B C cuius axis B D & ordinatim poſita A C, contingat in B linea E F, occurrens C F, A E diametris in E & F, ducanturq; lineæ A B, B C.

Dico magnitudinem productam ex I L plano ducto in planum L K æquari quantitati ortę ex ductu N M in M H.

Demonſtratio.



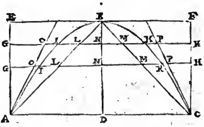
DVcātur vt ſupra parallelę. Quoniam [c] G N, I N, L N lineæ ſunt continuæ, erit vt G I ad I L, ſic I N ad L N, id eſt K N ad N L, & componendo vt G L ad I L, ſic K L ad L N. vnde I L K rectangulum æquale eſt rectangulo G L N id eſt H M N: & per 46. huius I L ductum in L K æquale N M ducto in M H. Quod fuit demonſtrandum.

c 42. De parab.

PROPOSITIO CVII.

IIſdem poſitis AO, CP ducantur tangentes in A & C.
Dico OI planum ductum in planum LM æquari IL plano ducto in ſe.

Demonſtratio.



a 89. *De parab.* b Ex 9. *de progreſſ.* c *Ibid.* d 45. *huius.*

OStenſæ ſunt proportionales [a] OI, IG, GH. igitur cum OG, differentiæ æqualis ſit HP rectæ quoque OI, GO id eſt [b] OL, IP id eſt OK proportionales ſunt: ſed etiam cum MK ſit æqualis ipſi IL, rectæ OI, [c] IL, LM continuæ ſunt. quare OI planum ductum in LM [d] æquale IL ducto in ſe. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CVIII.

IIſdem poſitis:
Dico GO planum ductum in ſe æquari plano OI ducto in IP.

Demonſtratio.

e 89. *parab.* f 9. *De progreſſionibus.* g 45. *huius.*

LIneæ [e] IO, IG, GH ſint in proportione continua & OG differentię æqualis ſit HP. Ergo etiam OI, OG, IP [f] ſunt in proportione continua. Ergo OI in IP ductum æquatur GO ducto in ſe.

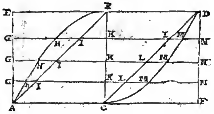
PROPOSITIO CIX.

SInt ABC, BCD parabolæ æquales & ſimiles ad eundem axem BC ſubalternè poſitæ, actiſq; per B & C tangentibus, perficiatur rectangulum EF ducanturque rectæ AB, CD.

Dico HI planum ductum in planum LM ad GH, ductum in MN eandem obtinere rationem quam HK ductum in KM habet ad GK ductum in ſe.

Demon-

Demonſtratio.



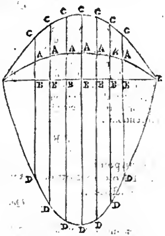
REctangulum HILM ad GHMN rectangulum rationem habet compoſitam ex HI ad GH, id eſt [a] HK ad GK (quia GK, HK, IK [b] proportionales ſunt) & ex ratione LM ad MN, id eſt MK ad NK (ob NK, MK, LK proportionales) ſed ratio quoque rectanguli HKM ad GKN, compoſita eſt ex ratione HK ad GK, & MK ad NK; igitur vt HILM rectangulum eſt ad GHMN rectangulum, vt HKM ad GKN rectangulum; igitur vt ex 4. huius colligitur, HI ductum in LM ad GH ductum in MN, eſt vt HK ductum in KM ad GK ductum in KN. Quod erat demonſtrandum.

a 1 De progreß.
b 42. De parabola.

PROPOSITIO CX.

SVper recta BB deſcribantur tres parabolæ AB, CB, DB, quarum diametri per verticem ſint continuæ proportionales, & BB ordinatim ad eam ſit poſita.

Dico CB planum ductum in ſe æquari AB plano ducto in planũ BD.



Demonſtratio.

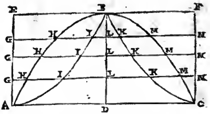
DVcantur quotuis CABD parallelę ad diametros primo datas. Cùm enim diametri per verticem ponantur proportionales, etiam diametri AB, BC, BD erunt continuæ: quare CB parabola ducta in ſe æqualis AB parabolæ ductæ in parabolam BD. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXI.

PArabolam ABC cuius axis BD, & ordinatim poſita AC contingat in B recta EF occurrens diametris AE, CF in E & F: dein per A & B; item B & C parabolæ deſcribantur quarum axes ſunt AE, CF.

Dico GH ſuperficiem ductam in ſuperficiem IK æquari HI plano ducto in ſe.

Demonſtratio.



a 167 parab. b 9. De progreſſion.

DVcantur ad A C parallelæ infinitę G H I L K M. docuimus libro de parabola [a] G H, G I, G M rectas in continua eſſe analogia: quare cùm H I, K M lineæ ſint inter ſe æquales, erunt [b] G H, H I, I K continuæ. vnde per 45. huius patet veritas propoſ.

PROPOSITIO CXII.

IIſdem poſitis:

Dico corpora orta ex G H plano ducto in I L, item ex H I in ſeipſum, tandem ex G H & M N ductis in I K, in continua eſſe analogia proportionis duplæ.

Demonſtratio.

PRoducantur GM parallelæ in N. Quoniam GH, HI, IK rectæ in præcedenti oſtenſæ ſunt continuæ, erunt HI quadrata æqualia rectangulis G H I K: ſunt autem MN æqualis ipſis GH, igitur rectangula ſuper G H M N tanquam vnis & IK, dupla ſunt rectangulorum ſuper GHIK, id eſt dupla quadratorum HI: rurſum cùm IL lineę dimidiæ ſint ipſarum IK, erunt GHIL rectangula dimidia rectangulorum GHIK, hoc eſt quadratorum HIF: vnde rectangula GH, IL quadrata HI & rectangulum ſuper IK & GHMN tanquam vna in continua ſunt analogia proportionis ſubduplæ. Quare ex diſcurſu 45. huius facilè colligitur veritas propoſitionis.

PROPOSITIO CXIII.

IIſdem poſitis:

Dico corpus ortum ex ductu GM in IK æquari corpori orto ex HK ducto in ſe.

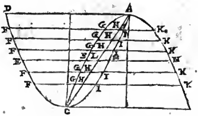
Demonſtratio.

c 167. parab. d 9. De progreſſ. e 13. De progreſſ.

OStenſum eſt in libro de parabola [c] rectas GH, GI, GM in continua eſſe analogia. cùm autem MK ſint æquales ipſis HI, rectæ etiam GH, HI, IK ſunt [d] continuæ. vnde & [e] IK, IM id eſt KH, GM in continua erunt analogia. ergo per 45. huius GM ductum in IK æquale HK ducto in ſe. Quod fuit demonſtrandum.

Demon-

PROPOSITIO CXIV.



SInt ABC, ACD parabolæ duæ æquales & ſimiles, ſubalterno ſitu poſitæ, actaq́; per A verticem tangente AD, iungantur AC.

Dico FG planum ductum in planum HI æquale eſſe HG plano ducto in planum IK.

Demonſtratio.

BIſecetur AC in L, poſitaque per L, linea EBLMN parallela contingenti AD, ponantur ipſi EN infinitæ æquidiſtantes FGHIK. rectangulum FHI ad ELM eſt vt AHC ad ALC, rectangulum: ſed vt AHC ad ALC, ſic GHK rectangulum eſt ad rectangulum BLN igitur vt FHI ad ELM, ſic GHK ad BLN, & permutando FHI eſt ad GHK vt ELM ad BLN. ſed cùm æquales & ſimiles ſint parabolæ & AC in L biſſecta ſit, rectangulum ELM æquatur BLN rectangulo, vt colligitur ex illis quæ in parabola demonſtraui: igitur & FHI æquale eſt rectangulo GHK: quare vt FH ad HK, ſic GH ad HI, & permutando ac diuidendo vt FG ad GH, ſic IK ad HI, vnde FGHI rectangula æqualia ſunt rectangulis GHIK, ergo per 46. huius patet veritas propoſitionis.

D V-

DVCTVVM PLANI
IN
PLANVM
PARS OCTAVA

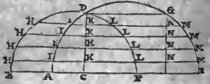
Corpora huc vſque ex vario planorum in plana ductu nata, reducit ad corpora determinatam habentia altitudinem & baſim.

PROPOSITIO CXV.

INterſecent ſeſe in D, ſemicirculi duo inæquales E D F, A D B, communem habentes diametralem E A C F B, ſic, vt demiſſa ex D, ad A B normalis D C incidat in centrum circuli E D F. Ponatur deinde D G æquidiſtans E B.

Dico corpus ortum ex ductu H I in I L æquari corpori habenti baſim I K & altitudinem D G.

Demonſtratio.



DVcantur infinitæ H I K L N M parallelæ ad E B, D G; ponaturque G N æquidiſtans D C: quouiam H L biſecta eſt in K & non biſecta in I, quadrato H K æquale eſt rectangulum H I L vnà cum quadrato I K. ſed I K M rectangulum quoque H K quadrato æquale eſt [a] rectangulum igitur I K M, id eſt [b] I K N vnà cum rectangulo I K, N M, id eſt rectangulum I K N cum quadrato I K æquale eſt rectangulo H I L vnà cum quadrato I K: quare dempto communi quadrato I K manet H I L rectangulum æquale rectangulo I K N: ſimiliter omnia rectangula H I L oſtenduntur æquari rectangulis omnibus I K N. planum [c] igitur H I ductum in I L, corpus producit ęquale illi quod oritur ex I K ducto in K N, ſiue in altitudinem D G. Quod fuit demonſtrandum.

[a] Colligitur ex 35. tertij.
[b] 1. ſecundi.
[c] 46. huius.

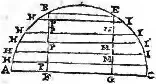
PROPOSITIO CXVI.

SEmicirculum A B C ſecet quæuis B E æquidiſtans diametro A C: & ex B ponatur B F normalis ad A C.

Dico

Dico P I ductum in ſe corpus proferre æquale illi quod baſim habet H I & altitudinem B E, vnà cum H P ducto in ſe.

Demonſtratio.



DEmittatur ex E linea E M G æquidiſtans B F. Ducantur que lineæ infinitę H P M I, parallelæ ad A C: rectangulum H I P M æquale eſt quadrato P M & rectangulis M P H, P M I hoc eſt H P M rectangulo bis ſumpto. addito igitur communi quadrato H P, rectangulum H I P M cum quadrato H P æquale eſt quadratis H P, P M vnà cum rectangulo H P M bis ſumpto, ſed & [a] quadratum H M id eſt P I æquale eſt quadratis H P, P M vnà cum rectangulo H P M bis ſumpto quadrata, igitur H M hoc eſt P I æquantur rectangulis H I P M, vnà cum quadratis H P. quare H M ſiuo P I [b] ductum in ſe, [c] corpus proferr æquale illi quod oritur ex ductu H I in P M vnà cum corpore orto ex H P ducto in ſe.

a 1. ſecundi.
b 4. ſecundi.
c Colligitur ex 43. huius.

Corollarium.

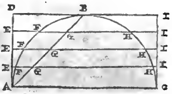
PRopoſitio hæc omni ſectioni conuenit: illud tamen obſeruandum, vt in ellipſi A C linea ſit axis: in parabola vero & hyperbola, ſit A C vnà ex illis quæ ad axem ordinatim ponuntur, vt vniformitas in omnibus ſeruetur.

PROPOSITIO CXVII.

SEmicirculum A B C cuius diameter A C, contingant in A & B lineæ duæ A D, B D conuenientes in D, & B D quidem æquidiſtet A C diametro: iunganturq; contactus A & B.

Dico corpus ortum ex ductu E G in ſe vnà cum E F ducto in ſe, æquale eſſe corpori habenti baſim E F & altitudinem A C.

Demonſtratio.



PErficiatur rectangulum D A C. Ducanturque lineæ quotuis E F G H I parallelæ ad A C, D B I. quoniam D A, D B contingentes ex eodem educuntur puncto, æquales inter ſe erũt: quare [d] & A E lineis æquales ſunt E G, & A E quadratis æqualia quadrata E G. rectangula igitur F E H quia æquantur quadratis A E, etiam æqualia ſunt quadratis E G. additis igitur communibus quadratis E F, rectangula F E H vnà cum quadratis E F æqualia ſunt quadratis E F, E G: ſed F E H rectangulis vnà cum quadratis E F, id eſt vnà cum rectangulis E F H I æqualia ſunt rectangula F E I; rectangula igitur F E I æqualia ſunt quadratis F E, E G: quare [e] E G ductum in ſe vnà cum F E ducto in ſe æqualia ſunt corpori habenti baſim E F & altitudinem E I id eſt A C. Quod erat demonſtrandum.

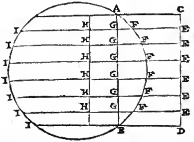
d Colligitur ex 4. ſexti.
e Colligitur ex 45 vel 46. huius.

PROPOSITIO CXVIII.

SEcet A B recta non per centrum ducta, circulum F I actiſque per A & B normalibus D B, C A, ponantur C D, H H æquidiſtantes A B: ſic vt corpus habens baſim E G & altitudinem G H, æquale ſit corpori orto ex F G ducto in G I.

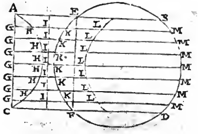
Dico F G ductum in H I æquari E F ducto in G H.

Demonſtratio.



PLanum E G ductum in G H æquale eſt E F ducto in G H vnà cum F G ducto in G H: item F G ductum in G I æquatur F G ducto in G H & F G ducto in H I: eſt autem per hypotheſim E G ductum in G H æquale F G ducto in G I. æquantur ergo E F in G H, cum F G in G H, ipſi F G in G H, cum F G in H I. ablato igitur communi corpore orto ex ductu F G in G H, planum E F ductum in G H æquatur F G ducto in H I. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXIX.

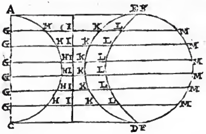


CIrculum E B D, ſecent vel contingant: æquales duæ & parallelę E B, F D, quibus æqualiter in A & C productis, ponatur A C normalis ad A B, C D & ſuper A C arcus deſcribatur circularis H H æqualis arcui E K F: diuiſis deinde bifariam A E, C F rectâ I I, parabola deſcribatur L L: ſit autem corpus ex I L in altitudinem I G æquale corpori quod fit ex ductu I K in I M.

Dico corpus ex ductu I K in L M æquari corpori quod fit ex G H in I L.

Demon-

Demonſtratio.



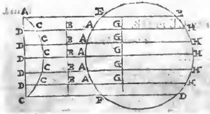
PLanum IG ductum in IL æquale ponitur IK plano ducto in IM: ſed IG plano ducto in IL æquantur corpora orta ex ductu GH in IL, & ex HI in IL: & IK plano ducto in IM, duo æquantur corpora, nimirum ex ductu IK in IL, & IK in LM; igitur corpora duo ex GH in IL, & ex HI in IL, æqualia ſunt duobus corporibus ortis ex ductu IK in IL, & ex IK in LM. ſed corpori ex HI ducto in IL æquale eſt corpus ex KI in IL (cùm HI, IK lineę, vt ex hypotheſi deducitur, æquales ſint) reliqua igitur duo corpora nimirum ex ductu GH in IL & ex ductu IK in LM æqualia ſunt.

PROPOSITIO CXX.

POſitis iiſdem arcubus circularibus CC, AA, & parallelis lineis DD, BB, AEB, CFD: ſit corpus ex AB in BH æquale corpori ex ductu GB in altitudinem BD; ſit autem GG linea recta.

Dico DC in BG ductum, profetre corpus æquale illi quod oritur ex AB in GH.

Demonſtratio.



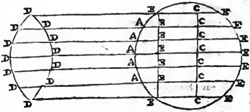
PLanum AB in BH æquale ponitur GB ducto in BD. ſed AB in BH, æquatur AB in BG, & AB in GH. ſimiliter GB in BD, æquatur GB in BC, vel in BA (cùm CB, BA æquales ſint lineę) vnà cum GB in DC; igitur corpora duo, ex DC in BG, & ex CB in BG, ęqualia ſunt duobus corporibus, ex AB in BG, & AB in GH: ablatis igitur æqualibus nimirum AB ducto in BG, & CB ducto in BG, remanebit DC in BG æquale AB in GH.

PROPOSITIO CXXI.

POſitis ijſdem vt figura oſtendit, ſit DD parabola, & BB, CC lineæ rectæ, deinde DB ductum in altitudinem BC æquale ſit AB ducto in BE.

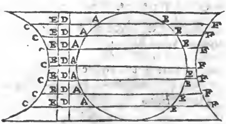
Dico magnitudinem ortam ex ductu DA in BC altitudinem æquari AB ducto in CE.

Demonſtratio.



ÆQualia ſunt ex hypotheſi corpora orta ex DB in BC, & ex AB in BE: ſed DB ductum in BC æquatur DA in BC, & AB in BC: ſimiliter AB ductum in BE æquatur AB in BC, & AB in CE. igitur DA in BC, vnà cum AB in BC, æquale eſt AB in BC, vnà cum AB in CE, ablato igitur communi AB in BC, manet DA in BC altitudinem, æquale AB ducto in CE.

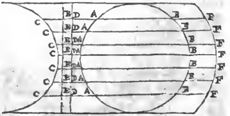
PROPOSITIO CXXII.



CIrculum AB tãgant parallelæ FC, FC quas ſecent lineę CC, EE, DD, FF. ſupponatur autẽ CD ductum in DB æquale FD ducto in DE.

Dico etiam FB ductum in altitudinem ED ęquari corpori orto ex ductu CE in DB.

Demonſtratio.



PLanum CD ductum in DB, æquale eſt CE ducto in DB, vnà cum ED ducto in DB: item planum ED ductum in DF æquatur ED ducto in DB, vnà cum

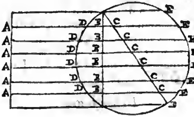
cum E D ducto in B F: æqualia autem per hypotheſim ſunt corpora orta ex ductu C D in D B, & ex F D ducto in E D; ergo C E in D B, cum E D in D B æquatur E D in D B, cum E D in B F: ablato igitur communi corpore ex ductu E D in D B, manet F B ductum in altitudinem E D æquale C E ducto in D B. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXIII.

Circulum D E ſecet recta quæuis B B: per cuius extremitates, normales ducantur perficiaturque rectangulum A A, B B; quod ductum in triangulum B C, quantitatem exhibeat æqualem illi quæ oritur ex ductu D B in B E.

Dico A D planum ductum in B C proferre corpus æquale illi quod exſurgit ex ductu D B in C E.

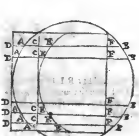
Demonſtratio.



Superficies A B ducta in quantitatem B C, æquatur A D ſuperficiei ductæ in B C vnà cum D B ducta in B C. item D B planum ductum in B E, æquatur D B ducto in B C, & D B ducto in C E; eſt autem per hypotheſim, A B planum ductum in planum B C æquale D B ducto in B E, ergo A D in B C, cum D B in B C, æquatur D B in B C, cum D B in C E: ablato igitur communi D B ducto in B C, manet A D ductum in B C, æquale D B ducto in C E.

PROPOSITIO CXXIV.

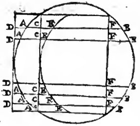
Circulo A B inſcriptum ſit rectangulum C F; poſitaq; D D parallela lateri C C, quę & circulum contingat in A, deſcribatur arcus E E æqualis arcui A A contingens rectam C C: ponatur autem A C ductum in C B æquari A D ducto in D B.



Dico corpus quod fit ex ductu plani D A in altitudinem D F æquari corpori quod profertur ex ductu A C in E B.

 Demon-

Demonſtratio.



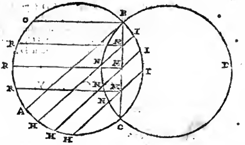
PLanum DA ductum in DB æquale eſt DA ducto in DF, vnà cum DA ducto in FB, id eſt vnà cum CE in AC: item AC ductum in CB, æquatur AC ducto in CE, vnà cum AC ducto in EB: æqualia autem ſunt per hypotheſin corpus ex ductu AD in DB, & corpus ex ductu AC in CB, ergo DA in DF, & CE in AC æquantur AC in CE, & AC in EB; ablato igitur communi AC ducto in CE, manet DA ductum in DF æquale AC ducto in EB.

PROPOSITIO CXXV.

INterſecent ſe vtcunque circuli duo æquales ABC, BCD in B & C: Actaque per B tangente AB, iungantur BC, & ex B ducatur OB orthogona ipſi BC, cui æquidiſtantes ponantur quotuis MNR: & per N, totidem N, IH parallelæ contingenti AB.

Dico corpus ex ductu HN, NI ſecundùm lineas FNI parallelas ipſi AB, æquale eſſe corpori ex ductu, NI ſecundùm lineas parallelas ipſi OB in altitudinem OB.

Demonſtratio.



QVoniam HI, RI lineæ commune ponuntur habere punctum N, rectangulis HNI æqualia ſunt rectangula RNI, id eſt R, NI & OB, cum OB, RN lineæ a æquales ſint: igitur HN ductum in NI æquatur R, NI ducto in altitudinem OB.

a Lib. de circulis.

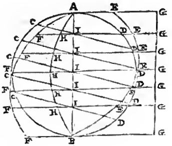
PROPOSITIO CXXVI.

SEcent AB diametrum circuli ABC in I obliquè DC, actiſque per I orthogonis EF, fiant DI lineis æquales EI, & rectis IC æquales IF dein

IF dein quotuis ducantur G G parallelæ ad AB, occurrentes EF lineis in G: & EIF rectangulis æqualia fiant rectangula GIH.

Dico corpus ex HF plano in altitudinem GI æquari magnitudini ortæ ex ductu ſuperficiei GE in IF.

Demonſtratio.



QVoniam EIF rectangulis id eſt rectangulis AIB æqualia ſint rectangula GIH erunt puncta AH [a] ad parabolam: vlterius GI eſt ad EG, vt IF ad HF, adeoque & GE ad GI, vt FH ad IF: vnde FHGI rectangula æqualia ſunt rectangulis GEIF: & cum altitudo omnibus ſit eadem erit [b] HF ductum in GI altitudinem æquale GE ducto in IF. Quod fuit demonſtrandum.

a 312. parab.

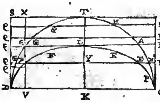
b 56. huius.

PROPOSITIO CXXVII.

Circulum ABC ſecet recta quædam AG parallela diametro CD, erectaque ex K centro orthogona KLT deſcribatur per CLD ellipſis contingens circulum in C & D, dein ex C & D tangentes erigantur occurrentes lineæ AG illiuſq; parallelis in Q & R.

Dico corpus ex ductu QF in FR, eam habere rationem ad corpus ex ductu QG in GR, quam habet LK ad TK.

Demonſtratio.



DVctâ quauis XV æquidiſtante rectæ TK, quę circulo occurrat in G, & ellipſi in F agantur per G & F parallelę diametro CD: erit igitur RGQ rectangulum æquale rectangulo RFQ, vnde parallelopipedum habens baſim rectangulum RGQ & GV altitudinem ad parallelopipedum habens baſim rectãgulum RFQ & altitudinem FV eſt vt GV ad FV, hoc eſt vt TK ad LK. [c] ſimiliter oſtẽdemus infinita parallelopipeda inſcripta corpori nato ex mutuo ductu planorum QG, GR eſſe ad infinita parallelepipeda inſcripta corpori genito ex ductu mutuo planorum QF, FR vt TK ad LK. ergo, vti facile deduci poteſt & diſcurſu 45. huius, magnitudo orta ex ductu QF in FR ad quantitatem ortam ex ductu QG in GR, eam habet proportionem quam habet LK ad TK. Quod erat demonſtrandum.

c Vt colligitur ex illis quæ in lib. de ellipſi oſtendi.

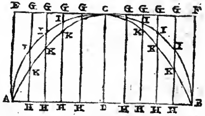
PRO-

PROPOSITIO CXXVIII.

SIt AKB parabolę axis CD æqualis lateri recto centroq́; D interuallo DC circulus deſcribatur cuius diameter AB patet ex 141. parab. parabolam cadere totam intra circulum perficiatur rectangulum, ſub baſi AB & altitudine DC.

Dico ſemicirculum IH ductum in ſe, corpus producere æquale illi quod oritur ex ductu HK parabolæ in altitudinem CD.

Demonſtratio.



a 104. parab. b 45. huius. DVcantur ad EA vel CD parallelæ infinitæ GIKH. Libro de parabola [a] oſtendimus HK, HI, HG, lineas eſſe proportionales, igitur [b] HK ductum in HG, hoc eſt in altitudinem DC æquatur HI ducto in ſe.

PROPOSITIO CXXIX.

IIſdem poſitis:

Dico IK planum ductum in altitudinem CD vel in rectangulum HG, æquari GI ducto in IH.

Demonſtratio.

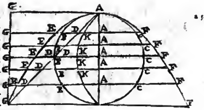
c 45. huius. QVoniam HK, IH, GH proportionales ſunt, vt GH ad IH, ſic GI eſt ad IK: igitur [c] & GI ductum in IH æquatur IK ducto in altitudinem CD.

PROPOSITIO CXXX.

d 114. parab. e 9. parab. SIt EF parabolę axis AA, par lateri recto; ſuper quo deſcripto circulo BC, (qui [d] totus intra parabolam cadet) ponatur LA ordinatim, quæ [e] æqualis erit axi AA. Completo igitur quadrato AG, iunge LD, ductiſq́; rectis infinitis, parallelis ad LA, fiat rectangula BAC, æqualia rectangulis GAK. erit KK parabola.

Dico EB ductum in BF æquari DK in GA ducto.

Demonſtratio.



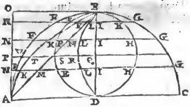
QVadrata E A hoc eſt rectangula E A F [a] æqualia ſunt rectangulis E B F, vnà cum quadratis B A, id eſt rectaogulis B A C. item G A D rectangula æqualia ſunt quadratis A E. æqualia igitur ſunt G A D rectangula, rectangulis E B F: vnà cum rectangulis B A C. rectaogulis autem G A D æqualia ſunt rectangula G A K, G A D K; rectangula igitur G A K, G A D K æqualia ſuot rectangulis E B F, B A C: ablatis igitur æqualibus ex hypotheſi rectangulis B A C, G A K manet rectangulum E B F æquale rectangulo D K, G A. ergo planum E B ductum in B F [b] eſt æquale D K ducto in altitudinem G A. b 46. huius.

a 5. ſecundi.

PROPOSITIO CXXXI.

Diametri duæ A C, B D ſemicirculi A B C ad angulos inſiſtant rectos; iunctaq; A B, deſcribatur ſuper B D vt diametro circulus B E D. Dico F E planum ductum in planum E G, corpus proferre æquale illi quod baſim habet triangulum A B D & altitudinem B D.

Demonſtratio.

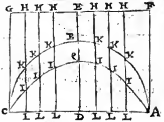


DVcantur quotcuoque rectæ N F K E M L I H E, parallelæ ad A C, aganturque per B & A contingentes quæ conueniant in O; poſitiſque N F I parallelis A C, fiant proportionales. N I, E I, L I, item N I, F I, K I: erunt [c] A K B, D L B parabolæ. ſecetur deinde B D bifarlam in Q ponaturque Q P æquidiſtaus A C, occurrens parabolis in R T, ſemicirculis autem in S & V, ducaturque recta A B, quæ circulo E E, & rectæ M M occurrit in eodem puncto S, vt facile demonſtrabitur quoniam A K B parabola eſt, [d] proportionales ſunt lineæ P Q, F S, P T: eſt autem P Q in S biſecta, recta igitur P S in T quoq; biſecta eſt: & S T dimidia eſt ipſius S P, hoc eſt S Q. quia vero P Q, S Q, R Q [e] proportiooales ſunt, & S Q dimidia P Q: recta quoque R Q dimidia eſt S Q, [f] æquales igitur ſunt T S, R Q quoniam autem L I eſt ad R Q, vt D I B rectangulum ad rectangulum D Q B id eſt A M B ad A S B rectangulum, & vt A M B rectangulum ad rectangulum A S B ſic [f] M K linea ad lineam T S, erit vt L I ad R Q, ſic M K ad T S, id eſt R Q. æquales igitur ſunt lineæ L I, K M, vlterius cum F G in I diuiſa ſit bifariam & non bifariam in E quadrata F I ęqualia ſunt rectangulis F E G, vnà cum quadratis E I, id eſt (quia N I, E I, L I ſunt continuæ) vnà cum N I rectangulis id eſt (quia L I, K M æquantur) rectangulis N I K M. ſed F I quadrata quoque æqualia ſunt rectangulis N I K, (quod N I, F I, K I ſint proportionalis) rectangula igitur N I K ęqualia ſunt rectangulis F E G, & N I K M. rectangula autem N I K æqualia quoque ſunt rectangulis N I M, N I M K, igitur N I M, N I M K rectangula æqualia ſunt rectangulis N I M K, F E G. dempto ergo communi N I M K, reſidua N I M, F E G rectangula æqualia ſunt ∴ planum igitur F E ductum in E G æquatur M I triangulo, ducto in quadratum N I id eſt in altitudinem B D.

c Ex 199. parab.
d 67. parab.
e 199 parab.
f 47. parab.

PROPOSITIO CXXXII.

SVper ABC ſemicirculi diametro AC, deſcriptum ſit rectangulum quodcunque AG maiorem habens ſemicirculo altitudinem ED: fiant autem proportionales ED, BD, QD & per AQC puncta parabola deſcribatur habens axem QD.



Dico LK ſemicirculum ductum in ſe, æquale proferre corpus, illi quod oritur ex LI parabola ducta in altitudinem ED.

Demonſtratio.

DVcantur infinitæ HKIL parallelæ ad DE. Quoniam ED, BD, QD proportionales, & AQC parabola eſt proportionales quoque erunt HL, KL, IL: ſemiſcirculus igitur a LK ductus in ſe, æquatur LI parabolæ ductæ in altitudinem ED, vel LH.

a 45. huius.

PROPOSITIO CXXXIII.

IIſdem poſitis:

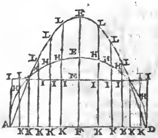
Dico planum HK ductum in KL corpus producere æquale illi quod oritur ex IK ducto in altitudinem DE vel LH.

Demonſtratio.

b 46. huius. PRoportionales ſunt LH, LK, LI: igitur vt LH ad KL, ſic HK ad KI: rectangula igitur KILH æquantur rectangulis HKKL. quare b HK ductum in KL æquatur IK ducto in altitudinem ED vel LH.

PROPOSITIO CXXXIV.

SEmicirculi ABD diametri AD, BF ad angulos inſiſtant rectos: deſcriptoq; ſuper AD baſi rectangulo minorem habente altitudinem quam ſit BF, fiant proportionales FE, FB, FM: & per A, F, D puncta parabola deſcribatur habens axem FE.



Dico HK ſemicirculũ ductum in ſe, æquale corpus proferre illi quod emergit ex LK parabola ducta in altitudinem IK.

Demonſtratio.

c 45. huius. DVcantur infinitæ KIHL parallelæ ad EF. quoniam FE, FB, FM proportionales ſunt, & AEC parabola eſt; rectæq; quoque KI, KH, KL proportionales ſunt. quare c HK ſemicirculus ductus in ſe æquatur LK parabolæ ductæ in altitudinem IK.

PRO-

PROPOSITIO CXXXV.

IIſdem poſitis.

Dico planum LH ductum in altitudinem IK æqualem proferre molem illi quæ exſurgit ex HI ducto in HK.

Demonſtratio.

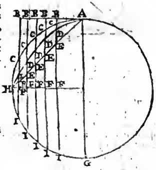
QVoniam proportionales ſunt LK, HK, IK, recta LH eſt ad HI vt LK ad HK, id eſt HK ad IK. Quare rectãgula LH, IK æquantur rectangulis HI, HK. quare [a] LH ductum in altitudinem IK, corpus producit æquale illi quod oritur ex ducto HI in HK. a 46. huius.

PROPOSITIO CXXXVI.

QVadranti circuli ACH inſcripta ſit parabola ADH habens apicem in A: iunctaque AH, ponatur contingens parabolam in A in qua ſumpto quouis puncto B ducatur BCDEFI.

Dico BC planum ductum in BI æquari BD plano ducto in altitudinem BF.

Demonſtratio.



DVcantur more ſolito quotuis BCDEFI parallelæ ad AG. [b] quadratis BE æqualia ſunt rectangula DBF, ſed & EB quadratis id eſt vt iam ſæpius oſtenſum eſt quadratis AB, æqualia ſunt rectangula CBI: rectangula igitur CBI æqualia ſunt rectangulis DBF; & BC ductum in BI æquatur DB ducto in altitudinem BF. b 67. parab.

PROPOSITIO CXXXVII.

IIſdem poſitis:

Dico DB ductum in DF æquari CD plano ducto in DI.

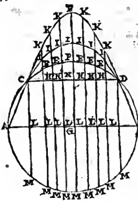
Demonſtratio.

REctangula BFD æqualia [c] ſunt quadratis CF: quadrata vero FC [d] æqualia ſunt rectangulis CDI vnà cum quadratis DF; rectangula igitur BFD id eſt BDF rectangula vnà cum quadratis FD æqualia ſunt rectangulis CDI vnà cum quadratis FD: ablatis igitur communibus quadratis DF, rectangula CDI æqualia ſunt rectangulis BDF. quare & DB planum ductum [e] in DF æquatur CD ducto in DI. Quod erat demonſtrandum. c 204 parab. d 5. ſecundi. e 46. huius.

PROPOSITIO LXXXVIII.

SEmicirculum ſecet recta quædam CD æquidiſtans diametro AB: eductaque ex G centro normaliter GF quæ CD lineæ occurrat in N & perimetro circuli in P; fiant proportionales GN, GP, GF: & per CFD puncta parabola deſcribatur CKFD: ductis deinde HE lineis infinitis ad PN parallelis fiant his æquales EI, EI.

 Dico



Dico planum KI ductum in altitudinem LH æquari EH plano in ſe ducto.

Demonſtratio.

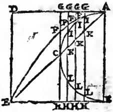
PRoducantur HEI parallelæ in K, L, M, quoniam GN, GP, GF proportionales ſunt & CFB parabola, rectæ [a] LH, LE, LK proportionales ſunt: quia vero HE lineis æquales ſunt EI, rectæ quoque [b] LH, HE, IK proportionales erunt. quare [c] KI ductum in altitudinem LH corpus profert æquale illi quod oritur ex ductu HE in ſe.

a Ex conuerſa 310. parab.
b Coroll. de progreſſ.
c 46. huius.

PROPOSITIO CXXXIX.

SIt AB axis parabolæ AFE, æqualis lateri recto; poſitâque ad illum ordinatim linea EB; ſuper AB vt diametro circulus deſcribatur ACB qui [d] totus cadet intra parabolam, circulum hunc contingant linea CG æquidiſtans AB, & AG, GD.

d 116. parab.



Dico GL planũ ductum in GI, æquari FG plano ducto in altitudinem AB.

Demonſtratio.

DVcantur ad AB parallelæ infinitæ GFILH, iungatur item AE. Quoniam AB æquatur lateri recto, lineæ EB, BA [e] æquales ſunt & DB quadratum, quia verò GC contingit ſemicirculum ſuper AB latere quadrati deſcriptum, ex elementis patet illam à diametro quadrati AE biſecari: adeoque rectam AE tranſire per C punctum contactus. & quia AG, GC contingentes æquales ſunt, æquales quoque ob triangulorum ſimilitudinem erunt AG, GK: vnde AG quadratis id eſt quadratis GK æqualia ſunt rectangula IGL. ſed & GK quadratis æqualia quoque ſunt, [f] rectangula FGH: rectangula igitur FGH æqualia ſunt rectangulis IGL: planum igitur FG [g] ductum in altitudinem AB vel GH æquale corpus producit, illi quod emergit ex IG ducto in GL.

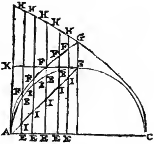
e 9. parab.
f 67. parab.
g 46. huius.

PROPOSITIO CXL.

SIt rurſum parabolæ FF axis AC æqualis lateri recto & ſuper AC diametro deſcripto circulo, contingat eum AK.

Dico planum FE ductum in EH gignere æquale cylindricę quadranti, cuius baſis BE, & altitudo AC.

Demonſtratio.



QVoniam A F G parabolę axis A C lateri recto ęqualis eſt, lineæ E F a æquales ſunt A B, per hypotheſim verò B C lineis æquales ſunt E B H, rectangula igitur F E H æqualia ſunt rectangulis A B C id eſt b A C, B E rectangulis ergo c planum F E ductum in planum E H æquatur quadranti B E ducto in altitudinem A C hoc eſt quadranti cylindrico, cuius baſis B E, altitudo A C. Quod erat demonſtrandum.

a 126 parab.

b 69. lib. de circulo.

c 46. huius.

PROPOSITIO CXLI.

IIſdem poſitis:
Dico E F ductum in F H æquari, parti cylindricę quæ baſi conſtat B I, & altitudine A C.

Demonſtratio.

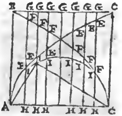
REctangula F E H æqualia ſunt rectangulis H F E vnà cum quadratis F E: ſed F E H rectangulis etiam æqualia oſtenſa ſunt rectangula A C B E rectangula igitur A C B E æqualia ſunt rectangulis H F E vnà cum quadratis F E. Rurſum rectangula A C B E æqualia ſunt rectangulis A C B I, A C I E, id eſt rectangulis A C B I vnà cũ rectangulis A C I E, id eſt E A C, id eſt quadratis A F, id eſt quadratis F E æqualia igitur ſunt H F E rectangula vnà cũ quadratis F E rectangulis A C B I vnà cum quadratis F E: quare demptis communibus quadratis F E, rectangula H F E æqualia ſunt rectangulis A C, B I. Vnde planum H F ductum in F E corpus producit æquale plano B I ducto in planum E K, hoc eſt plano B I, ducto in altitudinem A C hoc eſt portioni cylindricę cuius baſis B I altitudo A C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLII.

SVper A C quadrati latere vno A D, deſcriptus ſit ſemicirculus A I D: deſcriptæ quoq; ſint parabolę ſimiles & æquales A E C, D F B habentes apices in A & D, & communem axem A D æqualem lateri recto, totus igitur circulus intra d parabolas cadet.

d 126 parab.

Dico corpus ortum ex ductu H F in G E, æquari corpori quod oritur ex ductu F I in altitudinem A D.



Demonſtratio.

DVcantur infinitę G F E I H parallelę ad A B & iunge A I, C I. rectæ A I æquales ſunt H E, & D I rectæ æquales ſunt H F: eſt autem A D lineę æqualis H G cum A C quadratum ſit, igitur vt D A ad A I, ſic G H ad H E: ſed vt A D ad A I, ſic e D I eſt ad I H, igitur G H ad E H, ſic D I ad I H, id eſt F H ad I H; & per conuerſionem

e Patet ex 8. ſexti.

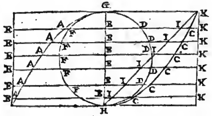
uerſionem rationis HG eſt ad GE vt HF ad IF, rectangula igitur FIGH; FHGE æqualia ſunt: quare planum HF in GE, æquatur FI plano ducto in altitudinem HG hoc eſt AD. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLIII.

HAbeant AB, BC parabolæ æquales ac ſimiles & ſitu ſubalterno poſitæ, communem axem GH lateri recto æqualem, poſitâque KG ordinatim, ſuper axe GH vt diametro circulus deſcribatur FD, qui totus cadet intra parabolas vt patet ex 126. parabolæ.

Dico AB parabolam ductam in parabolam BC æqualem eſſe ſemicylindro cuius baſis ſemicirculus FB & altitudo GH.

Demonſtratio.



COmple rectangulum BK, BK, ductiſque infinitis AFBDCK, iunge puncta GF, HF, & HD. Quoniam GH axis parabolarum æqualium AB, BC, lateri recto æqualis eſt, lineis GF [a] æquales ſunt AB, & lineis HD, id eſt lineis HF æquales BC. rectangula igitur ABC æqualia ſunt rectangulis GFH id eſt [b] GH, FB: ſed rectangula GH, FB æquantur rectangulis FBK, cum enim HG axis parabolarum ſit æqualis lateri recto, HB eſt æqualis ipſi GK, hoc eſt rectis BK. ergo rectangula ABC æquantur rectangulis FBK, parabola igitur AB ducta in BC parabolam, producit corpus, æquale illi quod fit ex ductu plani FB in planum BK, hoc eſt ſemicylindro cuius baſis eſt ſemicirculus FB altitudo GK, hoc eſt GH. Quod erat demonſtrandum.

[a] Ex conuerſa 100. parab.
[b] 69. De circulis.

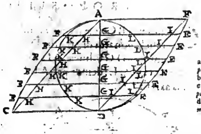
PROPOSITIO CXLIV.

SIt AD axis æqualium ac ſimilium parabolarum ſubalternè poſitarum, lateri ſuo recto æqualis; deſcriptoque ſuper AC vt diametro, circulo LAK, qui totus intra parabolas cadet, ponantur ex A & D, ordinatim ad AD axem lineæ AF, DC.

Dico quantitatem totam EB ductam in ſe, corpus producere æquale cubo cuius baſis eſt quadratum lineæ AD, vnà cum cylindro cuius baſis eſt circulus LAK, & altitudo AD.

Demon-

Demonſtratio.



DVcantur quotuis lineæ B K H G L I E, parallelę A F: quibus F D; A C iunctę occurrant in H & I, quadrata B E ęqualia ſunt, G B, G E id eſt,[a] quadratis A K, D E, ſiue A K, K D, id[b] eſt quadrato A D; id eſt[c] quadrato D C, id eſt H I quadratis vna cum[d] rectangulis B G E bis ſumptis. igitur E B ductum in ſe, æquale eſt H I ducto in ſe, id eſt cubo, cuius baſis eſt quadratum D C, id eſt A D quadratum & B G plano ducto bis in G E planum. id eſt cylindro[e] habenti baſim circulum L A K & altitudinem A D. Quod erat demonſtrandum.

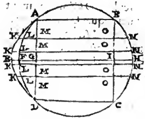
[a] 300. de parabola. [b] 47. primi. [c] 9. De parabola. [d] Ex elementis. [e] Colligitur ex præcedenti.

PROPOSITIO CXLV.

CIrculo A B C inſcriptum ſit rectangulum A B C D ponatur autem circuli diameter F H quę A D, B C latera rectanguli inſcripti ad angulos ſecet rectos; fiatq; vt H G, ad G I ita G E ad G F: & per A E D puncta parabola deſcribatur K K cuius axis ſit E G.

Dico corpus habens baſim K M & altitudinem G I æquari corpori orto ex ductu L M in M N.

Demonſtratio.



INfinitæ ducantur lineæ K L M O N parallelæ ad E H. Quoniam H G, G I lineæ per hypotheſim proportionales ſunt rectis E G, G F, rectangulum F G H æquale eſt rectãgulo E G I: & quia A E D parabola eſt, rectangula quoque K M O[f] æqualia ſunt rectangulis L M N: corpus[g] igitur habens baſim K M & altitudinē M O vel G I, æquale eſt L M plano ducto in M N. Quod erat demonſtrandum.

[f] Ex conuerſa 316. parab. [g] 46. huius.

PROPOSITIO CXLVI.

IIſdem poſitis:

Dico planum K L ductum in altitudinem I G æquari, L M plano ducto in ſe.

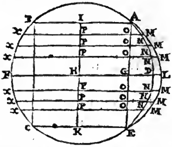
Demonſtratio.

QVoniam ex hypotheſi eſt vt H G ad I G, ſic E F ad F G, diuidendo eſt vt H I id eſt F G ad G I, ſic E F ad F G, proportionales igitur ſunt E F, F G, G I: & quia A E D parabola eſt, proportionales[h] quoque ſunt K L, L M, M O. quare[i] K L ductum in M O ſiue G I æquatur L M ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

[h] Ex conuerſa 310. parabola. [i] 45. huius.

PROPOSITIO CXLVII.

Circulum ABC duæ ſecent æquidiſtantes & æquales A B, E C, quibus parallela ponatur diametrus D F, iunctæque A E quæuis IK æquidiſtet, occurrens D G F lineæ in H: fiantque G H, G F lineæ proportionales lineis GD, GL: deinde per A L E puncta parabola M M deſcribatur cuius axis ſit L G.



Dico N O ſuperficiem ductam in planum P X, corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu MN in altitudinem O P.

Demonſtratio.

Dvcantur quotcunque rectæ M N O P X, parallelæ ad L F. vt G H ad GF, ſic D G eſt ad G L per hypotheſim, diuidendo igitur vt G H ad H F, ſic GD eſt ad D L. ergo L D G H rectangulum æquale rectãgulo D G H F: quia vero A L E parabola eſt, rectangula [a] quoque M N O P æqualia ſunt rectangulis N O P X. planum igitur M N ductum [b] in O P vel in altitudinem G H æquale eſt plano N O ducto in P X.

a Colligitur ex 310. parab.

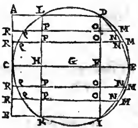
b 46. huius.

PROPOSITIO CXLVIII.

Circulo E D C inſcriptum ſit rectangulum D I K L poſitaq; E C diametro quæ D I, L K latera ad angulos ſecet rectos, ponatur per C contingens C A, occurrens D L, I K lineis in A & B: deinde per I E D puncta parabola deſcribatur D N E I habens axem E C.

Dico P Q ſuperficiem ductam in planum Q R corpus proferre æquale illi quod oritur ex M N ducto in altitudinem F C.

Demonſtratio.



Dvcantur vt prius quotcunque rectæ M N O P Q R parallelæ ad E C. vt E F eſt ad N O, ſic [c] D F I rectangulum eſt ad rectangulum D O I; ſed vt E F ad N O, ſic E F C rectangulum quoque ad rectangulum N O R, vt igitur D F I rectangulum ad rectangulum D O I, ſic E F C rectangulum eſt ad rectangulum N O R: & permutando vt E F C ad D F I rectangulum, ſic rectangulum N O R ad D O I rectangulum, æquantur autem rectangula E F C, D F I, rectangula igitur N O R, D O I quoque æqualia ſunt, & quia D O I rectangulis [d] æqualia ſunt rectangula M O Q, rectangula M O Q, N O R æqualia ſunt. quare M O eſt ad N O, vt O R ad O Q: & conuertendo O M eſt ad N M vt O R ad Q R: rectangula igitur M N O R æqualia ſunt rectangulis M O Q R. ergo M N planum ductum in altitudinem R O ſiue F C, [e] æquale eſt plano M O, id eſt P Q ducto in planum Q R. Quod erat demonſtrandum.

c 47. parab.

d Ex elemntis.

e 46. huius.

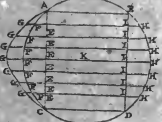
PRO-

PROPOSITIO CXLIX.

Circulo ABC inſcriptum ſit rectangulum ABCD: ductâq; AB lateri parallelâ vnâ IEF, fiant proportionales IE, EF, FG. Deinde per puncta CGA deſcribatur parabola, cuius axis ſit GK.

Dico FI planum ductum in ſe corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu GH in altitudinem EI.

Demonſtratio.



DVcantur more ſolito lineę quotcunque GFEIH, & quoniam vnæ GF, FE, EI, ex hypotheſi ſunt in continua, eſtque GG parabola, etiam [a] reliquæ omnes GF, FE, EI erunt in continua. Componendo igitur vt GE ſunt ad FE, ſic HE ſunt ad IE: & alternando vt GE ad EH, ſic FE ad EI: & componendo vt GH ad EH, hoc eſt FI, ſic FI ad EI; quadrata igitur FI æquantur rectangulis GH, EI. Ergo [b] planum FI ductum in ſe ęquatur plano GH ducto in planum EI, hoc eſt in altitudinem EI. Quod erat demonſtrandum.

[a] Ex 316. parab.

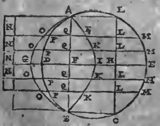
[b] 45. huius.

PROPOSITIO CL.

Circulo ABC inſcriptum ſit rectangulum AC ductâq; BC lateri parallelâ HFD, fiant proportionales HF, FD, DG & rectæ FG æqualis fiat FI. Tum per puncta BGA, BIA deſcribantur parabolæ, quarum axes ſint FG, FI. Demum rectangulo AC, adiiciatur indirectum æquale rectangulum AN.

Dico MK planum ductum in altitudinem HF æqualem exhibere molem illi quę producitur ex ductu NP in PL.

Demonſtratio.



DVcantur infinitæ lineę NOPQKLM parallelę ad BC. Quoniam OO, KK ſunt parabolę, & HF, FD, DG ſunt [c] proportionales, etiam LQ, QP, (id eſt ML) PO proportionales erunt. igitur componendo vt OQ ad PQ, ſic MQ ad QL. ſed, quia parabolę OO, KK ſimiles ſunt & æquales, rectę KQ æquantur rectis OQ. ergo vt KQ ad PQ, ſic MQ ad QL. Igitur permut. vt KQ ad MQ, ſic PQ ad QL,

[c] Ex 310. parab.

hoc eſt ex hypotheſi N Q. Ergo inuertendo M Q ad K Q, vt N Q ad P Q, & conuertendo vt M Q hoc eſt L P ad M K, ſic N Q hoc eſt Q L ad N P. Igitur rectangula M K, Q L æquantur rectangulis L P, P M; ergo [a] planum M K, ductum in planum L Q hoc eſt in altitudinem H F, æquatur plano N P ducto in planum P L. Quod erat demonſtrandum.

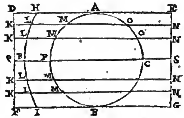
[a] 46. huius.

PROPOSITIO CLI.

Circulus A B C idem habeat centrum cum rectangulo D F E G, & latera quidem D E F G circulum contingant in A & B: fiant proportionales D E, D A, D H; actâq; per centrum rectâ Q S parallelâ ad D E, & occurrente circulo in P & C, fiat vt Q S ad Q C, ita Q P ad Q R: tum per H, R puncta parabola deſcribatur L L L habens axem R S.

Dico corpus habens baſim L K & altitudinem F G æquari corpori orto ex ductu plani M K in O K.

Demonſtratio.



Dvcantur infinitæ K L M O N parallelæ ad D E, F G. poſitâ conſtructione hypotheſeos, ſingulæ K N, ſunt ad ſingulas K O, vt K M ſingulæ ad ſingulas K L, vt facilè deducitur ex ijs quæ in lib. de parabol. demonſtraui. ac proinde rectangula N K L æquantur rectangulis O K M. ergo [b] K L ductum in altitudinem K N id eſt F G æquatur K M ducto in K O. Quod erat demonſtrandum.

[b] 46. huius.

PROPOSITIO CLII.

Iiſdem poſitis:

Dico M K ductum in ſe, corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu L M in altitudinem D E.

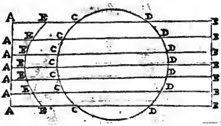
Demonſtratio.

Rectangula L K N, M K O præcedenti propoſitione oſtendimus eſſe æqualia: igitur vt M K ad L K, ſic N K ad K O, & conuertendo M K ad M L, vt N K ad N O rectangula igitur K M N O id eſt quadrata M K, æqualia ſunt rectangulis L M, K N. ergo L M ductum in altitudinem [c] K N id eſt D E æquale eſt M K ducto in ſe.

[c] 45. huius.

PRO-

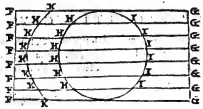
PROPOSITIO CLIII.



HAbeant AB, FG rectangula, æquales altitudines: centris autem rectangulorum, circuli deſcribantur CD, HI: ductiſque parallelis AEDB fiantque CAD rectangulis æqualia rectangula BAE, & GFK rectangula æqualia rectangulis HFI, patet ex illis quæ in parabola demonſtraui puncta tam E quam K eſſe ad parabolam.

Dico AC ductum in ſe ad FH ductum in ſe illam obtinere proportionem quæ eſt inter ſuperficies EC, KH.

Demonſtratio.



QVoniam rectangula BAE, æquantur rectangulis DAC, erunt AC ad AE, vt AB ad AD: & conuerſim AC ad EC, vt AB ad DB, rectangula ergo AC, DB, (hoc eſt, quod rectæ AC, DB ſint æquales, quadrata AC,) æquantur rectangulis EC, AB. Corpus igitur ex ductum plani AC in ſeipſum æquatur corpori nato ex EC ducto in altitudinem AB, ſimiliter oſtendam FH ductum in ſe æquari KH ducto in altitudinem FG. ergo AC ductum in ſe eſt ad FH ductum in ſe, vt EC ductum in AB ad KH, ductum in FG; hoc eſt quoniam altitudines ex hypotheſi ſunt æquales, vt baſes EC, EC, KH, KH. Quod erat demonſtrandum.

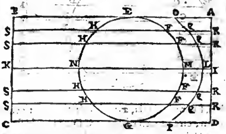
PROPOSITIO CLIV.

ESto rectangulum ABC altera parte longius cui inſcriptus ſit circulus EFG, contingens parallelas in E & G, non habens idem centrum cum rectangulo: & fiant proportionales IK, IN, & IM, IL. Deinde fiant continuæ AB, AE, AO, & per O & L, deſcripta ſit parabola habens axem IK.

 Dico

Dico corpus ex ductu ſuperficierum R F, H S inter ſe emergens æquale eſſe illi magnitudini quàm producit baſis Q F ducta in altitudinem I K.

Demonſtratio.



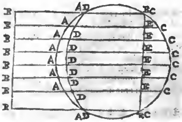
DOcuimus lib. de parabola poſita parabola vti hoc loco eſt conſtituta quod omnia rectangula Q R S, æqualia ſint rectangulis F R H igitur ſunt proportionales lineę R Q, R F cum lineis R H & R S. quare diuidendo vt R Q eſt ad Q F. Ita eſt quoque R H recta ad lineam H S ac proinde componendo eam habet rationem R S ad H S, quam habet R F ad F Q, igitur rectangula R S, Q F æqualia ſunt rectangulis R F, H S. Quare erit corpus conſtans altitudine quæ ſit æqualis rectæ I K ſiue R S, & baſi Q F ſuperficiè, æquale illi magnitudini quæ profertur ex multiplicatione figurarum ſeu ſuperficierum R F & H S inter ſe. quod oportuit demonſtrare.

PROPOSITIO CLV.

ESto B E rectangulum & circulus deſcriptus A C, tranſeat per extrema lateris E E: fiant autem A B C rectangulis æqualia rectangula E B D.

Dico A B ductum in E C corpus proferre æquale parti cylindricę, quæ baſi conſtat, A D & altitudine B E.

Demonſtratio.



DVcantur lineæ infinitę B A D E C parallelæ lateribus rectanguli quoniam A B C rectangula æqualia ponuntur rectangulis E B D, vt A B ad B D, ſic E B ad B C: & diuidendo vt B A ad A D, ſic B E ad E C, æquantur ergo rectangula B A, E C, rectangulis A D, B E igitur A B ductum in E C corpus producit æquale [a] illi quod oritur ex A D baſi ducta in altitudinem B E.

[a] 46. huius.

PROPOSITIO CLVI.

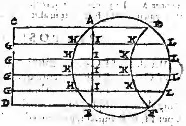
SIt iterum A B C D rectangulum & per extremæ lateris A B circulus deſcriptus tranſeat occurrens C A, D B lineis in E & F: fiant autem H G L rectangulis æqualia rectangula I G K.

Dico

Dico planum H I ductum in G L, corpus producere æquale illi quod oritur ex L K baſi ducta in altitudinem G I.

Demonſtratio.

Ducatur quotuis numero G H I K L parallelæ ad C E. Quoniam H G L rectangulis æqualia ponuntur rectangula I G K; vt G H ad G I, ſic G K eſt ad G L & conuertendo vt H I ad G I, ſic K L ad L G, rectangula igitur H I G L, æqualia ſunt rectangulis L K G I: quare L K ductum in altitudinem G I corpus producit a æquale illi quod emergit ex H I ducto in G L. Quod erat demonſtrandum.



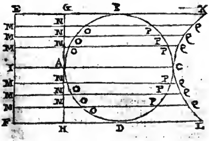
a 46. huius.

PROPOSITIO CLVII.

Circulum A B C, contingant in B, A, D punctis lineæ B G, A G H, D H, & G B, H D quidem æquidiſtent & A G H ad eaſdem ſit normalis: rectæ vero A G H parallela ponatur B F, fiantque E G, E B, E K, & F H, F D, F L proportionales dein per A punctum contactus ducatur I A C æquidiſtans E K, occurrens circulo A B C in C, & per K, C, L puncta, parabola deſcribatur L C K.

Dico O M planum ductum in M P, æqualem illi proferre magnitudinem, quæ oritur ex M Q plano ducto in altitudinem M N.

Demonſtratio.



Ducantur lineæ infinitæ M N O P Q parallelæ ad E K. Quoniam E G, E B, E K, &c. proportionales ſunt, & K C L parabola eſt & B O D circulus rectangula, N M Q æqualia ſunt O M P vt facile deducitur ex iis quæ in lib. de parabola demonſtraui planum igitur M Q ductum b in altitudinem M N æquale eſt M O plano ducto in planum M P. Quod erat demonſtrandum. b 46. huius.

PROPOSITIO CLVIII.

Iiſdem poſitis

Dico N O ductum in M P corpus proferre æquale illi quod oritur ex baſi P Q ducta in altitudinem M N.

Demonſtratio.

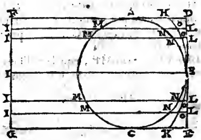
QVoniam N M Q rectangula æqualia ſunt rectangulis O M P, vt M N ad M O, ſic M P ad M Q, & diuidendo vt M N ad N O, ſic M P ad P Q: rectangula igitur M N P Q, æqualia ſunt rectangulis N O P M, & N O planum ductum in M P, æquatur P Q baſi ductę in altitudinem M N. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLIX.

CIrculum A B C contingant in A, B, C punctis lineæ tres A D, D E, E C; & A D, C E quidem æquidiſtantes ſint, D E vero ad illas normalis, ponatur autem & E D lineæ æquidiſtans F G faciens D F G E rectangulum fiantque proportionales F D, A D, H D; item E G, E C, E K: & per H, B, K puncta, parabola deſcribatur.

Dico L M planum ductum in M I, corpus proferre æquale illi quod exſurgit ex N O plano ducto in altitudinem L I.

Demonſtratio.



DVcantur quotuis numero rectæ L O N M I parallelę ad D F. Quoniam F D, A D. H D proportionales ſunt, & H O B K parabola & A N B C circulus, rectangula O L I æqualia ſunt rectangulis N L M vt ex libro de parabola facile colligitur quare vt L O ad L N, ſic L M ad L I, & conuertendo vt L N ad O N, ſic L I ad I M, rectangula igitur L N M I æqualia ſunt rectangulis O N L I. ergo O N
a 46. huius. baſis ducta in [a] altitudinem L I æqualem illi producit magnitudinem quę exſurgit ex ductu L N plani in planum M I. Quod erat demonſtrandum.

Propoſitio quoque vera eſt ſi F G linea ipſi D E æquidiſtans circulum contingat: & prorſus eadem demonſtratio eſt.

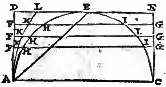
PROPOSITIO CLX.

SEmicirculo A B C circumſcriptum ſit rectangulum A D E C & D E quidem ſemicirculum contingat in B: fiantque proportionales E D, E D, B D, L D: & per L & A parabola deſcribatur habens verticem in A.

Dico F K planum ductum in altitudinem F G æquari F H ducto in H G.

Demon-

Demonſtratio.



DVcantur infinitæ FKHIG parallelæ ad AC: Quoniam ED, BD, LD proportionales ſunt, & AKL parabola,[a] rectangula KFG æqualia ſunt rectangulis HFI id eſt FHG, vt in lib. de parab. oſtendi: planum igitur FK ductum in altitudinem FG, corpus producit æquale illi quod oritur ex ductu FH in HG. Quod erat demonſtrandum.

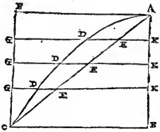
[a] 46. huius.

PROPOSITIO CLXI.

DAta ſit ſemiparabola ABC, cuius axis AB, ad quam ordinatim poſita ſit CB, completoque rectangulo ABCF, iungatur CA.

Dico triangulum EK ductum in altitudinem æquari parabolæ ductæ in ſeipſam.

Demonſtratio.



DVcantur quotcunque numero lineæ GDEK parallelę ad CB, rectæ GK, DK, EK ſunt in [b] continua analogia. ergo quadratis DK æquantur rectangula GKE. Ergo EK triangulum ductum in altitudinem GK, id eſt CB, æquatur [c] parabolę ductæ in ſe ipſam. Quod erat demonſtrandum.

[b] 42. parab. [c] 45. huius.

PROPOSITIO CLXII.

IIſdem poſitis:

Dico planum ED ductum in altitudinem CB, æquari plano GD ducto in planum parabolicum DK.

Demonſtratio.

QVoniam [d] eſt vt GK ad DK, ſic DK ad EK, erit conuertendo vt KG ad GD, ſic KD ad ED. Ergo rectangula ED, KG æquantur rectangulis KDG. ergo ED [e] ductum in altitudinem KG id eſt BC, æquatur plano GD ducto in planum DK. Quod erat demonſtrandum.

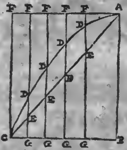
[d] 42. parab. [e] 46. huius.

PRO-

PROPOSITIO CLXIII.

DAta ſit rurſum ſemiparabola cuius axis AB, & ordinatim ad axem poſita CB, completoq́; rectangulo FG, ducatur AC.

Dico planum FD ductum in altitudinem AB ſecundùm parallelas FG æquari triangulo FE ducto in ſe ſecundùm parallelas FE.



Demonſtratio.

a 67. parab. b 45. huius.

DVcantur infinitæ FDEG, rectæ FG, [a] FE, FD ſunt in continuâ proportione. Quadratis ergo FE æquantur rectangula DFG. Ergo [b] FD planum ductum in altitudinem FG id eſt AB, æquatur triangulo FE ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXIV.

IIſdem poſitis:

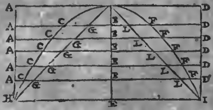
Dico FE planum ductum in planum EG, corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu ED in altitudinem AB: intelligo rurſum ductus ſecundùm parallelas FDEG factos.

Demonſtratio.

c 67. parab. d 46. huius.

DVcantur lineæ quotuis numero FDEG parallelæ ad AB, libro de parabola [c] oſtendimus FD, FE, FG lineas continuè eſſe proportionales: igitur GE eſt ad DE, vt GF ad FE, rectangula ergo GEF æquantur rectangulis DEFG. quare FE [d] planum ductum in EG æquatur ED plano ducto in altitudinem FG id eſt AB.

PROPOSITIO CLXV.

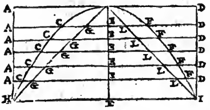


SIt ad KBE axem parabolæ CF ordinatim applicata HI, erectiſque ex H & I axi parallelis HA, ID, perficiatur rectangulum, iunganturq́; HK, IK.

Dico AC planum ductum in planum CD, æquari plano AG ducto in altitudinem AB.

Demon-

Demonſtratio.



DVcantur lineæ rectæ infinitæ ACGBLFD parallelę ad HI, libro de parabola [a] oſtendimus BAG rectangula æquari rectangulis CAF id eſt ACD: [a 41. parab.] ergo planum AC ductum in CD æquatur AG plano ducto in altitudinem AB.

PROPOSITIO CLXVI.

Iſdem poſitis:

Dico CG ductum in altitudinem AB æquari AC ducto in CB; & AC ductum in GB, æquari CG ducto in CB.

Demonſtratio.

QVoniam AB, CB, GB [b] proportionales ſunt, vt AB ad CB, ſic [c] AC ad CG, [b 41. parab.] [c 1. Progr.] planum igitur CG ductum in altitudinem AB, æquatur AC ducto in CB. Quod erat primum.

Rurſum vt AB ad CB, id eſt CB ad GB, ſic AC ad CG, igitur CG ductum in CB, æquatur AC ducto in GB. Quod erat alterum.

PROPOSITIO CLXVII.

Iſdem poſitis:

Dico plana AC, AB ducta in planum CG æqualem illi proferre molem quæ oritur ex ductu planorum CG, CB in AC planum.

Demonſtratio.

ESt AB ad CB, vt [d] CB ad GB. Ergo conuertendo vt BA ad CA, ſic BC [d 41. parab.] ad GC: & componendo vt BA cum CA ad CA, ſic BC cum GC ad GC; rectangula igitur ſuper AB, AC & CG, æqualia ſunt rectangulis ſuper CB, CG & AC. ergo AB, AC plana ducta in planum CG, æqualia ſunt planis GB, CG ductis in planum AC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXVIII.

Iſdem poſitis:

Dico plana AC, AB ducta in CB, corpus proferre æquale illi quod oritur ex ductu planorum CG, CB in altitudinem AB.

Demonſtratio.

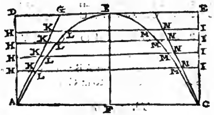
OStenſum eſt præcedenti propoſitione, AB cum AC eſſe ad AC, vt BC cum CG eſt ad CG: igitur & AC cum AB eſt ad AB, vt CG cum CB ad CB. quare AC, AB plana ducta in CB, corpus proferunt æquale illi quod oritur ex ductu planorum CB, CG in AB altitudinem.

PROPOSITIO CLXIX.

AD axem parabolæ ducta ſit ordinatim AFC, erectiſque normalibus, perfice rectangulum ADEC, ducantur deinde per A & C extrema ordinatim ad axem poſitæ, contingentes AG, CN.

Dico LK planum ductum in altitudinem HI æquari LH ducto in ſe.

Demonſtratio.



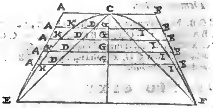
a 11. parab. b 45. huius. DVcantur ad AC parallelę infinitæ HKLMI, libro de parab.[a] oſtenſum eſt LK, LH, HI lineas in continua eſſe analogia; quadrata ergo LH æquantur rectangulis LK, HI; planum igitur LH ductum in ſe, æquale LK[b] ducto in altitudinē HI.

PROPOSITIO CLXX.

EAdem iterum ponantur quæ priùs: ducaturq́; EC.

Dico AD planum ductum in ſe, æquari AK ducto in KB.

Demonſtratio.



DVcantur rurſum ad EF parallelæ infinitæ AKDB. libro de parabola oſtendi AK, AD, AI, hoc eſt KB in continua eſſe analogia: ergo quadrata AD æquantur rectangulis AKB; planum igitur AD ductum in ſe æquatur AK ducto in KB.

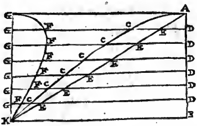
PRO-

PROPOSITIO CLXXI.

SIt A B axis parabolæ A C K, & ad illum ordinatim applicata K B; perfecto autem rectangulo A B K, ductâq; A K, fiant G F rectæ æquales C E & parallelę ad K B.

Dico planum G C ductum in ſe æquari F C ducto in altitudinem G D.

Demonſtratio.



LIneæ G D, C D, E D ſunt [a] proportionales: ſunt autem G F æquales differentiis C E; ergo etiam [b] F C, F E ſiue G C, G D in continua ſunt analogia. Ergo quadrata G C æquantur rectangulis F C, G D. Ergo [c] G G ductum in ſe æquatur F C ducto in G D. Quod erat demonſtrandum.

a 43. parab.
b 11. & 9. Progr.
c 45. huius.

PROPOSITIO CLXXII.

IIſdem poſitis:

Dico E D planum ductum in C F æquari E C ducto in ſe.

Demonſtratio.

QVoniam E D, C D, G D proportionales ſunt, & E C differentiis æquales ponuntur F G; rectæ quoque [d] E D, C E, F C proportionales ſunt; rectangula igitur F C, E D æquantur quadratis C E: quare E D planum ductum in C F [e] æquatur E C plano ducto in ſe.

d 9. Progr.
e 45. huius

PROPOSITIO CLXXIII.

MAnentibus iiſdem:

Dico C E ductum in altitudinem G D, dare corpus æquale magnitudini quam efficit ductus ſuperficierum G C, & C D in ſe inuicem.

Demonſtratio.

QVoniam eandem rationem continuant rectæ D E, D C, D G; igitur quam rationem habent D C lineæ ad C E, eandem quoque habent D G rectæ ad rectas G C. quare D C, G C rectangula rectangulis C E, D G, æquari debent. Ergo C E, ſuperficies in [f] altitudinem G D multiplicata, parem exhibet magnitudinem illi quę producitur per ductum mutuum planorum G C, C D. Quod erat demonſtrandum.

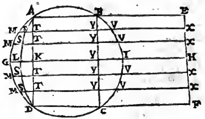
f 46. huius.

PROPOSITIO CLXXIV.

Circulum ABC, ſecent æquales duæ parallelæ lineæ AB, DC, iunctiſque AD, BC ponatur quæuis EF æquidiſtans BC, poſitâ deinde GKIH diametro, parallelâ AB, fiat vt HK ad KI, ſic KG ad KL, denique per A, L, D, puncta parabola deſcribatur, habens apicem in L.

Dico MS ductum in altitudinem TX, æquari YV in VX.

Demonſtratio.



POnantur infinitæ MSTYVX, parallelæ GH. Quoniam eſt vt HK ad KI, ſic KG ad KL, rectangulum HKL, æquatur IKG rectangulo. quia verò ALD
a 47. parab. parabola eſt, vt [a] LK ad ST, ſic AKD rectangulum eſt ad rectangulum ATD: ſed vt LK ad ST, ſic quoque eſt LKH rectangulum ad rectangulum STX, igitur vt AKD ad ATD rectangulum, id eſt vt GKI ad MTV, ſic LKH ad STX, & permutando vt GKI ad LKH, ſic MTV ad STX: ſed LKH rectangulum æquale oſtenſum eſt rectangulo GKI; igitur & STX rectangula æqualia ſunt rectangulis MTV, quare vt MT ad ST, ſic TX ad TV, & conuertendo vt MT id eſt YV, ad MS, ſic TX ad VX: vnde YVX rectangula æqualia ſunt
b 46. huius. rectangulis MSTX, planum [b] igitur MS ductum in altitudinem TX, æquatur YV in VX. Quod erat demonſtrandum.

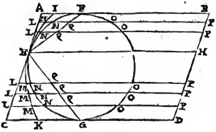
PROPOSITIO CLXXV.

Sit ABCD rhomboides, includens circulum EFG quem in punctis tribus E, F, G contingat: factis autem proportionalibus AB, AF, AI: CD, CG, CK deſcribatur per I, E, K parabola cuius diameter ſit EH parallela AB.

Dico corpus ortum ex ductu LN in LO æquari magnitudini quę oritur ex ductu LM in altitudinem EH.

Demon-

Demonſtratio.



DVcantur EF, EG, & infinitæ LMNQOP, parallelæ AB. Quoniam IEK parabola eſt, rectangula PLM, æqualia ſunt [a] quadratis LQ: quia verò EC, CG, item EA, FA contingentes æquales ſunt, quadratis LQ æquantur [b] quadrata EL, id eſt rectangula OLN; igitur & OLN rectangula, æqualia ſunt rectangulis PLM. quare LM ductum [c] in LP ſiue in altitudinem EH æquatur LN ducto in LO. Quod erat demonſtrandum.

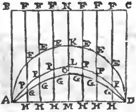
a 67. parab.
b Per elementa.
c 46 huius.

PROPOSITIO CLXXVI.

ESto ſuper ABCD rectanguli latere AD vt diametro deſcriptus ſemicirculus AED, cuius centrũ M, ex quo recta erigatur MOLKN æquidiſtans lateri AB, deſcribatur autem parabola quæcunque AGD occurrens MN lineæ in O puncto, quod eiuſdem vertex ſit, fiant deinde tres proportionales NM, KM, LM;

Dico EH ſemicirculum in ſe ductum ad GH parabolam ductam in altitudinem AB eam habere rationem quam habet LM linea ad lineam OM.

Demonſtratio.



DEſcribatur per A, L, D puncta parabola habens apicem in L. erit igitur HP [d] parabola ducta in altitudinem AB, æqualis EH ſemicirculo in ſe ducto: ſed PH ductum in altitudinem AB ad GH in eandem ductum altitudinem, eſt vt PH parabola ad parabolam GH, [e] baſis ad baſim; igitur & EH ductum in ſe ad GH ductum in altitudinem AB eſt PH, parabola ad parabolam GH, quia verò PH, GH parabolæ communem habent ſubtenſam AD, illam inter ſe ſortiuntur rationem, quam [f] LM ad OM: igitur & EH ſemicirculus ductus in ſe ad GH parabolam ductam in altitudinem AB eſt vt LM linea ad lineam OM.

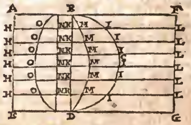
d 45. huius.
e 12. undecimi.
f Coroll. 140. de parab.

PROPOSITIO CLXXVII.

SVper A B D E rectanguli vno latere B D, deſcriptus ſit B C D ſemicirculus, ducatur autem tota illa figura in ſe:

Oportet exhibere magnitudinem illi æqualem quæ notam habet baſim & altitudinem datam.

Conſtructio & demonſtratio.



a 199. De parab. DAta ſit altitudo B F, in directum poſita cum A B: perfecto autem rectangulo D B F G, L K M rectangula æqualia fiant quadratis I K, cōſtat B M D eſſe a parabolam. Deinde quadratis H K æqualia fiant rectangula L K N, patet ex elementis N N eſſe lineam rectam. denique rectangulis ſubdupla H K & rectis K I, æqualia fiant rectangula L K, N O: conſtat ex illis quæ in libro de ellipſi demonſtraui, puncta O O eſſe ad ellipſim. Dico igitur corpus ex ductu O M baſi cognita in B F altitudinem datam æquari H I ducto in ſe. H I ductum in ſe ſunt H I quadrata; ſed H I quadrata æqualia ſunt quadratis H K & K I, vnà cum rectangulis H K I bis ſumptis: quadratis H K autem æquantur ex construct. rectangula L K N, & I K quadratis æqualia ſunt rectangula L K M per conſtructionem; rectangulis item H K I bis ſumptis id eſt rectangulis ſubduplis H K & rectis K I, æquantur rectangula L K N O, igitur H I ductum in ſe, id eſt quadrata H I æqualia ſunt rectangulis L K M id eſt K M ducto in altitudinem K L, & rectangulis L K N id eſt N K in altitudinem L K, vnà cum rectangulis L K N O, id eſt N O ducto in altitudinem L K, id eſt H I ducto in ſe, æquatur O M ducto in altitudinem datam B F ſiue L K, exhibuimus igitur corpus, &c. Quod erat faciendum.

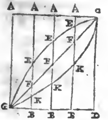
PROPOSITIO CLXXVIII.

REctangulo A B inſcriptæ ſint parabolæ duæ C E G, C K G habentes verticem in C: & C K G quidem axem habeat C A, parabola verò C E G axem C D. Iungantur autem C G puncta.

Dico K B planum ductum in triangulum F A ſimul cum A E in F B, æquari magnitudini quæ baſim habet E F & altitudinem A B.

Demon-

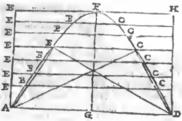
Demonſtratio.



PLanum EF ductum in altitudinem AB, id eſt rectangula omnia EFAB, æqualia ſunt rectangulis EFAF & EFB, id eſt EF ducto in AF & EF ducto in FB: ſed EF in FA, æquatur [a] AE in FB: & EF in FB [b] æquale eſt KB in FA. igitur EF ductum in altitudinem AB, æquale AE in FB, & KB in FA. Quod erat demonſtrandum.

[a] 105. huius.
[b] Ibid.

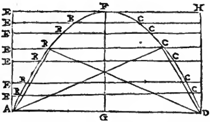
PROPOSITIO CLXXIX.



SIt BC quæuis ſectio conica; illiuſque axis FG ad quem ordinatim poſita ſit AD: actaque per F contingente FH, occurrant illi, erectæ ex A & D lineæ æquidiſtantes axi FG.

Dico BC planum ductum in altitudinem AD vnà cum EB ducto in ſe, æquari EC plano ducto in ſe.

Demonſtratio.



DVcantur quotuis AC, & per C rectæ ponantur CBE parallelæ AD, quadratum AC [c] æquale eſt rectangulis ADBC, ABDC; id eſt ADBC rectangulo vnà cum quadrato AB: eſt autem quadratum AC æquale quadratis AE, EC: igitur quadrata AE, EC æqualia ſunt quadrato AB, id eſt quadratis AE, EB vnà cum rectangulo ADB; ablato igitur communi quadrato AE, manet rectangulum ADBC vnà cum quadrato EB, æquale quadrato EC. igitur BC ductum in altitudinem AD, vnà cum EB in ſe ducto, æquatur plano EC ducto in ſe. Quod erat demonſtrandum.

[c] Prolo. meno lib. 1. prop. 20.

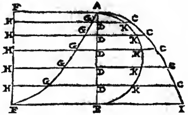
PROPOSITIO CLXXX.

SIt AB axis parabolæ ACI, æqualis lateri recto: fiat autem ſuper AB quadratum AB, EF, & per A & F parabola deſcribatur AGF, æqualis ACIB habens verticem in F: recta verò FB producta occurrat parabolæ ACI in I.

Opor-

Oportet exhibere corpus cuius altitudo ſit A E, æquale magnitudini ex ductis CD in DG.

Conſtructio & demonſtratio.



a 126 parab. SVper AB vt diametro ſemicirculus deſcribatur AKB: cadet ille intra a parabolam ACI: dico autem CK ductum in altitudinem AE, ſatisfacere problemati: parabola CD ducta in quadratum DH, æquatur CD in DG, & b CD in GH: ſed etiam CD in DH, æquatur CK in DH c & KD in DH: igitur CK in DH, vnà cum KD in DH æqualia ſunt CD in DG, & CD in GH: ſed KD in altitudinem AB, id eſt d AE, ſiue KD ductum in DH, æquatur CD e parabolæ ductæ in GH parabolam; reſiduum igitur CK in DH, vel in altitudinem AE; æquale eſt CD parabolæ ductæ in DG: exhibuimus igitur corpus, &c. Quod erat faciendum.

b Ex 1. ſecundi.
c Ex eadem.
d 9. Parab.
e 70 huius.

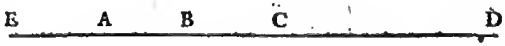
D V-

DVCTVVM PLANI
IN
PLANVM
PARS NONA.

Praxis huius libri de Planorum inter ſe ductu ſeu multiplicatione.

ETſi ex toto huius libri decurſu, ſatis apertè colligi poſſit methodus, quam obſeruare debeat is, qui in doctrina huius libri ſe exercere deſiderat; nihilominus has paucas propoſitiones ſubiungere decreui, maioris lucis ergo: vix enim linea recta, ſecundùm vllam propoſitionem, ſiue notam, ſiue incognitam diuidi poteſt, quin, ſecundùm eandem diuiſionem, ſubſeruire poſſit huius libri argumento. quod quoniam multis paradoxi loco habendum exiſtimarem, operæ pretium, imò neceſſarium duxi, partem hanc adiungere, vt hoc ipſum luce clarius innoteſcat, & Geometriæ ſtudioſi Oceanum patentiſſimum ſibi detectum agnoſcant, cui ſeſe tutò poſſe concredere., vel tenuiſſimo lembo vecti ſcientiæ elementorum perſuaſum habeant.

PROPOSITIO CLXXXI.



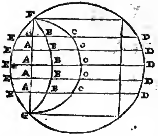
SInt tres lineæ proportionales AB, AC, AD.
Dico rectangulo ſub media AC & aggregato extremorum DA, BA æquari rectangulum ſub extremis DA, BA bis ſumptum, vnà cum rectangulo ſub differentiis BC, CD comprehenſo.

Demonſtratio.

FIat EA æqualis AB. Quoniam DA, CA, BA ſunt proportionales, erit diuidendo DC ad CA, vt CB ad BA. ergo rectangulum DC, AB æquatur rectangulo ACB. Ergo rectangulum DC, AB bis, æquatur rectangulis ACB, DC, AB. Addito igitur communi rectangulo CAB bis ſumpto, rectangula DC, AB bis, CAB bis, hoc eſt [a] rectangulum DAB bis, æquabitur rectangulis ACB, DC, *a 1. ſecundi.* AB, CAB bis, ſed duo huius ſummæ rectangula CAB, ACB [b] æquantur qua- *b 4. ſecundi.* drato AC. ergo rectangulum DAB bis æquatur quadrato AC cum rectangulis CAB, DCAB. quare vtrique ſummæ addatur rectangulum DCB, erit rectangulum DAB bis cum rectangulo DCB æquale quadrato AC, & rectangulo CAB id eſt CAE, vnà cum DC, AB, DCB rectangulis: hoc eſt quadrato AC, & rectangulo CAE, vnà cum rectangulo DCA, ſiue ACD. ſed quadrato CA, & rectangulis CAE, ACD æquatur rectangulum AC, ED, hoc eſt rectangulum ſuper AC & AB, AD tanquam vna recta; ergo rectangulum ſub AC & AB, AD æquatur rectangulo DAB bis cum rectangulo DCB. Quod erat demonſtrandum.

APPLICATIO

Ductui planorum in plana.



SVbtendat AA linea arcum quendam circuli; & ſuper AA diametro ſemicirculus CC deſcribatur, ductiſq; normalibus ad FG infinitis EABCD, fiant rectis AE æquales AB. Igitur erunt lineæ AB, hoceſt AE, AC, AD proportionales, quoniam EAD rectangulis æquantur FAG rectangula, hoceſt AC quadrata. Quare per præcedentem propoſitionem rectangula ſub AC, ED æquantur rectangulis DAB ſiue DAE bis ſumptis vnà cum rectangulis BCD: colligitur ergo ex propoſitione vniuerſali [a] huius libri, corpus ex ductu plani AC in ſuperficiem ED, æquari ſolido quod fit ex multiplicatione ſuperficiei AB in ED bis vnà cum quantitate quæ reſultat ex ductu plani BC in CD. quare propoſitionem aptauimus ad ductum planorum inter ſe.

a 46. huius.

Scholion.

DE modo reducendi corpora ex ductu genita ad quantitates ſolidas certæ altitudinis, hac parte libri non intendimus mentionem ingerere, cùm particulari tractatu de eo argumenta in præcedenti parte actum fuerit.

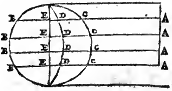
PROPOSITIO CLXXXII.

Quarta libri noſtri de linearum potentiis.

A C D E B

SEcta ſit AB in C & D mediâ & extremâ ratione proportionali, & CB compoſita ex altera extremarum & media bifariam ſecetur in E. Dico CE quadratum rectangulo DEA æquale exſurgere.

APPLICATIO.



CIrculum CC ad extremitates EE diametri contingant duæ rectæ, quas ſecet AA parallela ad EE, ductiſque AC, EB parallelis ad tangentes infinitis, fiant rectæ AB, BD rectis AC, CD proportionales, erunt [b] puncta DD ad parabolam.

b Colligitur ex illis quæ in parab. demonſtraui.

Dico ſemicirculi planum CE in ſe, æquari plano ED ducto in EA.

Quoniam

QVoniam enim rectæ AB in C & D diuiſæ ſunt extremâ ac mediâ ratione proportionali: & CB compoſitæ ex altera extremarum & media bifariam à diametro ſecantur in E; erunt per 4. prop. libri noſtri de lineis, rectangula omnia DEA æqualia quadratis CE. Ergo per propoſ. vniuerſalem quę eſt huius libri 45. planum DE ductum in EA æquatur plano ſemicirculi CE ducto in ſe. Ductibus ergo applicauimus theorema propoſitum.

Verùm eadem opera Corollarium propoſitionis quintæ libri de lineis breuiter accommodare operę pretium erit.

Primò infertur BDC rectangulum rectangulo ADE æquari, vnde concludimus planum BD ductum in DC planum, ſolidum conſtituere quod ſit æquale corpori producto ex AD ſuperficie ducta in planum DE.

Secundò infertur BAC rectangulum rectangulo EAD eſſe æquale, & conſequenter ex lege ductuum aſſerimus corpus exſurgens ex ductu plani BA in ſuperficiem AC, æquari ſolido quod reſultat ex multiplicatione plani EA in planum AD.

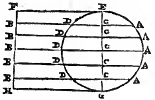
PROPOSITIO CLXXXIII.

Quinquageſima quinta eiuſdem libri.

A C D B

SI AB linea diuiſa fuerit vtcunque in C & D. Dico ACB, CDB rectangula æqualia eſſe rectangulis BDA, DCA.

APPLICATIO.



POnatur exempli gratia circulus AD, quem tangant GH, EF parallelę inter ſe, in punctis E G; & iuncta EG ponatur FBH quæuis linea, ducanturq; parallelæ infinitę ACDB, per 55. libri de lineis omnia rectangula ACB, CDB æquantur omnibus rectangulis BDA, DCA. ergo ſecundùm ſenſum propoſitionis vniuerſalis* corpus ortum ex ſuperficiebus AC, CB ſimul cum illo quod fit ex ductu plani CD in DB, æquatur ſolidis duobus quæ oriuntur ex planis BD in DA, & DC in CA. quare hanc etiam propoſitionem aptauimus noſtro inſtituto. *46. huius.

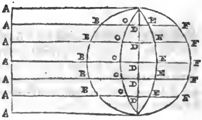
PROPOSITIO CLXXXIV.

Quinquageſima ſexta eiuſdem libri.

A B C D F
E

SI fuerit vt AB ad BC, ſic AD ad DF, & BC lineæ æqualis EF. Dico ABDE rectangulum æquale eſſe rectangulo CBD.

APPLICATIO.



CIrculum BF cuius diameter DD, contingant æquidiſtantes à terminis diametri DD erectæ, quas ſecet AA parallela DD, ductiſque ABCDF parallelis ad tangentes, fiant vt AD ad DF, ſic AB ad BC, ſiue vt AD ad AF, ſic AB ad AC, hoc eſt, fiant rectangulis FAB æqualia rectangula DAC: erit [a] ergo CC parabola. [a Colligitur ex lib. de parab.] poſitis deinde FE æqualibus BC, erunt etiam DE æquales DC: vnde conſequenter EE etiam parabola eſt. Quoniam igitur omnes parallelę AF, ita ſunt diuiſę in punctis B, C, D, E, F, vt AB, BC proportionales ſint ipſis AD, DF; & FE æquales exiſtant ipſis BC: per 56. libri noſtri primi, omnia rectangula AB, DE æquantur rectangulis CBD. quare ſolidum emergens ex ductu AB in DE, [b] æquatur ſolido quod fit ex ductu CB, in BD. [b 46 huius.]

PROPOSITIO CLXXXV.

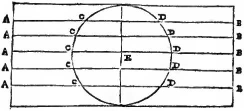
Quinquageſima ſeptima eiuſdem libri.

A C D B

SI fuerit AB recta diuiſa in C & D, vt AC, DB lineæ ſint inter ſe æquales:
Dico CB quadratum æquari quadrato AC, vnà cum rectangulo ABCD.

A P-

APPLICATIO.

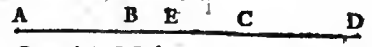


Circulus deſcribatur C D in parallelogrammo A B, vt ſit punctum E commune centrum tam circulo quàm parallelogrammo.

Dico denuo corpus ex ductu A B plani in C D, vnà cum quantitate quæ reſultat ex ductu ſuperficiei A C in ſeipſam, æquari ſolido quod naſcitur ex plano C B, in ſeipſum multiplicato. Ductis enim parallelis A C D B, manifeſtum eſt eas omnes ita ſecari à circulo in punctis C, C & D, D, vt A C æquales ſint D B; omnia igitur rectangula A B, C D, vnà cum quadratis A C, æquanrur quadratis C B per 57. prop. libri noſtri de lineis. Vnde per vniuerſalem [a] propoſ. huius libri, liquet propoſitum. a 46. huius.

PROPOSITIO CLXXXVI.

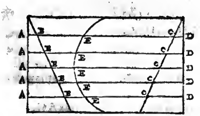
Quinquageſima octaua eiuſdem libri.



Si fuerit A D linea diuiſa in B & C vt AB, C D lineæ ſint æquales, ſumatur autem inter B & C punctum quoduis E.

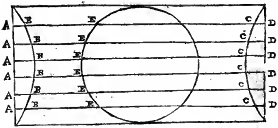
Dico A E D rectangulum æquale eſſe rectangulis C E A, E A B.

APPLICATIO.



Conſtituatur parallelogrammum A D, ductiſq; parallelis A D infinitis, lineæ A B fiant æquales C D: denique ponatur quiuis arcus E E.

 Dico.



Dico quod producitur ex plano D E in E A planum æquari ſolido quod fit ex ductu plani C E in E A, ſimul cum eo quod fit ex E A in B A; ſecundùm tenorem vniuerſalis propoſitionis [a] ſuo loco demonſtratę.

a 46. huius.

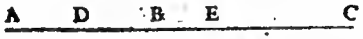
Corollarium.

HÆc propoſitio (quod in plerisque etiam ſequentibus erit obſeruandum) ampliſſimi vſus eſt. nam E E linea quęuis eſſe poteſt quemadmodum & lineæ B B. C C. modò æquales ſint A B, C D. Inſuper ex eadem propoſitione conſequitur ſolida quę proferuntur ex ductu mutuo planorum C E, E A, & E A, B A æqualia eſſe ſolidis quę fiunt ex ductu mutuo planorum B E, E D, & E D, C D, quod liquet ex eo quod rectangula A E D rectangulis D E A ſint æqualia; rectangulis autem A E D æqualia ſint C E A, B A E rectangula, & ſimiliter rectangulum D E A æquale eſt rectangulis B E D, C D E. Igitur [b] etiam ſolida ex ſuperficierum ductu ęqualia exiſtunt: nimirum corpora ex planis C E in E A & B A in A E, corporibus ex ſuperficiebus B E in E D & C D in D E producta.

b Patet ex 46. huius.

PROPOSITIO CLXXXVII.

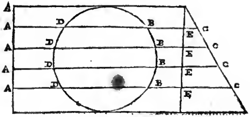
Quinquageſima nona eiuſdem libri.



SI fuerit A C linea vtcunque diuiſa in D B E.
Dico rectangula A D C, A E C, D B E æqualia eſſe rectangulis A B C, A D B, B E C, A D E C.

A P P L I-

APPLICATIO.



Onſtituatur verbi gratia circulus D B intra parallelas parallelogrammi A E, & adijciatur quædam linea C C.

Dico ſolida quæ naſcuntur ex ductu.

plani	AD in DC AE in EC DB in BE	æquari ſolidis ex	AB in BC AD in DB BE in EC AD in EC

Demonſtrationem huius collige ex propoſitione vniuerſali; [a] ductis enim parallelis infinitis ADBEC, ſemper rectangula ADC, AEC, DBE æquantur rectangulis ABC, ADB, BEC, ADEC. [a] 46. *huius.*

PROPOSITIO CLXXXVIII.

Sexageſima eiuſdem libri.

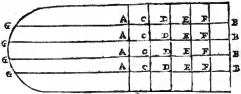
G . A C D E F B

SI fuerit AB linea diuiſa in quinque partes æquales punctis C, D, E, F, & ei quæuis in directum adijciatur G A.

Dico G D quadratum æquale eſſe quadrato A G, vnà cum rectangulo GCB.

APPLI-

APPLICATIO.



SIt exempli gratia G G ſemicirculus, & A B parallelogrammum eiuſdem altitudinis cum diametro circuli G G, diuiſum patallelis C C, D D, E E, F F in quinque æquales partes.

Dico ſuperficiem G D in ſe ductam exhibere ſolidum æquale corporibus quæ fiunt ex A G in ſe ducto ſimul cum eo quod reſultat ex plano G C in C B planum. Ductis enim infinitis parallelis G B, erunt ſemper quadrata G D æqualia quadratis G A vnà cum rectangulis G C B. itaque per 46. huius patet propoſitum.

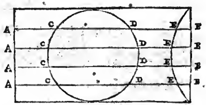
PROPOSITIO CLXXXIX.

Sexageſima prima eiuſdem libri.

A C D E B

SEcentur A B in quotuis partes vtcunque C, D, E, &c.
Dico quadrata A C, C D, D E, E B ſimul cum rectangulis A C B, C D B, D E B bis ſumptis, æquari quadrato A B.

APPLICATIO DOCTRINÆ DE DVCTIBVS.



PArallelogrammo A B inſcribatur C D circulus, & ponatur quiuis arcus E E ſubtenſus à recta B B.

Dico ſolida ex multiplicatione ſingulorum planorum A C, C D, D E, E B in ſe, ſimul cum illis quæ emergunt ex ductu A C in C B, & C D in D B, ac D E in E B bis ſumptis, æquari parallelepipedo quod gignitur ex parallelogrammo A B ducto in ſeipſum. Ductis enim parallelis infinitis

nitis A C D E B, ſemper quadrata A C,C D,D E,E B vnà cum rectangulis A C B,C D B,D E B, bis ſumptis æquantur quadratis A B. vnde res patet ex 46.huius.

PROPOSITIO CXC.

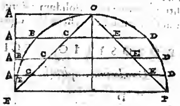
Vndecima libri progreſſionum Geometricarum.

A B C D
E

SInt A B, A C, A D in continua analogia,& minori differentiæ B C fiat æqualis D E.

Dico C E,C D,A D eſſe etiam in analogia continua.

APPLICATIO.



SIt ſemicirculus B B, D D eiuſque diameter F P, ductiſq; F O , P O quæ bifariam ſecent peripheriam ſemicirculi , ponantur tangentes O A,F A.

Dico planum C E ductum in planum A D æquari plano C D ducto in ſeipſum.

Ducantur enim infinitæ A B C E D parallelæ ad F P. patet E D æquales eſſe B C. Quare cùm A B,A C,A D ſemper [a] ſint continuæ, etiam C E, C D, A D [b] erunt continuæ. ergo per 45. huius patet propoſitum.

a Ex elementis
b 9. Progreſſ.

PROPOSITIO CXCI.

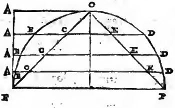
Nona eiuſdem libri.

A B C D
E

SInt in continua analogia A B, A C, A D, & minori differentiæ B C æqualis ſit E D.

Dico minimam A B & minorem differentiam eſſe proportionales.

APPLICATIO.



REpetatur præcedentis figura: quoniam A B, A C, A D ſunt in continua, & E D æquales ſunt B C, rectę A B, B C, C E ſunt in continuata proportione; igitur rectangulum ſub A B & C E æquatur B C quadrato.
a 45. huius. Vnde per propoſitionē [a] vniuerſalem ſolidum exſurgens ex plani A B in C E ductu, æquatur figuræ ſolidæ quę fit ex B C ſuperficie in ſe ducta.

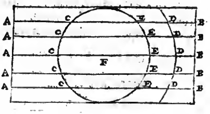
PROPOSITIO CXCII.

Duodecima eiuſdem libri.

A C E D B

DEntur tres magnitudines A B, B C, C D in continua analogia, ita vt B C ſit maior A C & fiat rectæ A C æqualis B E. Dico A B, B E, E D eſſe proportionales.

APPLICATIO.



PArallelogrammo A B circulus concentricus inſcribatur C E, ductiſq; infinitis A C E D parallelis, fiant rectangulis E B C æqualia rectangula A B D: erit itaque D D [b] parabola: & vt B D ad B E, ita B C ad
b Colligitur ex 204 & 312 parab. B A; igitur permutando B D ad B C vt B E ad B A. vnde diuidendo B D ad D C, vt B E ad E A. Igitur & B D ad B E, vt D C ad E A. ſed quia vt B D ad

BD ad BE; ita quoque eſt BC ad BA, hinc vt BC ad BA, ita DC ad EA, ergo alternando BA ad BC, vt EA, hoc eſt BC, ad DC: ſunt itaque tres proportionales AB, BC, CD. eſtque AC æqualis EB ex conſtructione. nam centrum F commune eſt & parallelogrammo AB & CE circulo per propoſitionem duodecimam libri de progreſſionibus Geometricis, etiam AB, BE, ED proportionales ſunt. Omnia igitur rectangula ABED æquantur quadratis BE. Igitur per [a] propoſitionem vniuerſalem planum AB ductum in ED, ſolidum format quod corpori æquatur ex ductu plani BE in ſeipſum ducto. [a] 45 huius.

PROPOSITIO CXCIII.

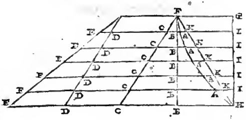
Decimatertia eiuſdem libri.



POnantur AB, BC, CD tres lineæ in continua proportione, & fiat BC æqualis DE.

Dico AE, EC, CD eſſe in continua analogia.

APPLICATIO.



SIt FAA parabola cuius axis FG & contingens FB, ductáque FH ponatur GH quæ æquidiſtet FB, conueniens cum FK in H communi interſectione: erunt itaque [b] proportionales lineæ BA, BK, BI. Vnde ſi fiant rectæ BC, CD æquales rectis BK, BI, erunt ſimiliter proportionales AB, BC, CD: denique ſi ponantur DE quę ſint æquales BC, erunt per 13. progreſſ. ſemper AE, EC, CD in continua analogia, quocirca per propoſitionem [c] vniuerſalem erit ſolidum emergens ex ductu planorum AE in CD, æquale corpori quod oritur ex ductu EC in ſeipſum. [b] 67. parab. [c] 45. huius.

PROPOSITIO CXCIV.

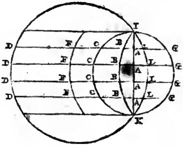
Decimaquinta eiuſdem libri.

G A B C D
F

SInt proportionales A B, A C, A D, & linea compoſita ex vtraque differentia B C, C D diuidatur bifariam in F ac mediæ proportionali A C æqualis ſit producta A G.

Dico F C, F B, F G in continuata eſſe proportione.

APPLICATIO.



SVbtendat recta A A quendam arcum circuli I D K & ſuper I K deſcribe circulum G G, C C: ductiſq; parallelis infinitis G D, quæ normales ſint ad I K, fac A B æquales A L. erunt itaque L A (hoc eſt A B) A C, A D tres lineæ in continuata proportione: diuiſis autem rectis B D bifariam in F F, erit F F arcus æqualis arcui I B K: & quia G C circulus eſt, hinc G A normales ad diametrum I K æquales ſunt rectis A C. Ergo per 15. progreſſ. F G, F B, F C ſunt ſemper in continua. Quare ſolidum quod fit ex ductu F B in ſeipſum, æquatur ſolido quod gignitur ex planis F C, F G inter ſe multiplicatis.

PROPOSITIO CXCV.

Quadrageſima ſecunda eiuſdem libri.

A B C D

K E G

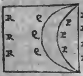
SInt A B, B C, C D in continua analogia; deinde ſecetur quæpiam linea G F in E vt F E ad E G, eandem habeat rationem quam A B ad B C.

Dico rectangulum B C F G æquale eſſe duobus A B E G & C D F E rectangulis.

A P-

APPLICATIO.



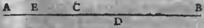


POnatur parallelogrammum N R, & ſuper diametro N N circulus deſcribatur N Q: factis deinde tertijs proportionalibus N P ad rectas N R, N Q, exſurget parabola P P, vt ſuo loco oſtenſum [a] eſt, eritque ratio a 199 parab.
P Q ad Q R, eadem cum ratione quam continet N P ad N Q. ſunt itaque H K, O I, L M æquales & ſimiles ſuperficies ſuperficiebus N P, N Q, N R.

Dico igitur ex ſenſu propoſitionis vniuerſalis 45. huius planum P R ductum in ſuperficiem circularem O I æquale ſolidum proferre magnitudini emergenti ex baſi P Q in altitudinem L M, ſimul cum magnitudine orta ex plano H K in Q R planum.

PROPOSITIO CXCVI.

Sexageſimaquinta eiuſdem libri.



COntinuæ proportionales ſint A B, A C, A E; & ex B C ſumi poſſit B D æqualis A C.

Dico rectangulum ſub B A & C D, A E tamquam vnâ lineâ conſtructum æquari quadrato A D.

APPLICATIO.

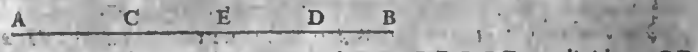


SIt parallelogrammum A B, cui inſcribatur parabola A C habens axem A A, ductiſq; parallelis A C B, ponatur B D parac ſimilis parabolæ A C, & fiant B A, A C, A E proportionales; erunt igitur per 65. progr. omnia rectangula ſuper A B, & C D A E, æqualia quadratis A D. Corpus igitur ex plano B A in ſuperficies C D & A E genitum, [a] æquatur ſolidæ magnitudini factæ ex plani A D ductu in ſeipſum.

a 45. huius.

PROPOSITIO CXCVII.

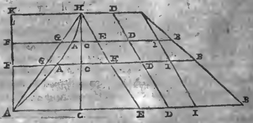
Sexageſima quarta eiuſdem libri.



SInt tres lineæ in continua analogia A B, B C, C D: & diuidatur C D bifariam in E.

Dico quadratum A E æquari quadratis A C, E B.

APPLICATIO.



REctangulis F C cuius diagonalis G G inſcribatur parabola A A cuius ſit axis H K. ductis igitur parallelis F C, erunt tres lineæ C A, C G, [b] C F proportionales. fiant autem C E, E I æquales rectis C G, C F, erunt itaque A C, C E, E I, proportionales. fiant inſuper rectæ I B æquales C E. Igitur per propoſitionem decimamtertiam libri de progreſſionibus Geometricis erunt proportionales A B, B E, E I. quod ſi verò diuidantur bifariam rectæ E I, erunt D D ad lineam rectam, vt patet ex elementis. Itaque per 64. progreſſ. omnia quadrata A D æquantur quadratis A E, D B ſimul ſumptis.

b 67. parab.

Dico ſolidum ergo ex ductu ſuperficiei A D in ſeipſam æquari [c] magnitudini-

c 45. huius.

gnitudinibus ſolidis quæ reſultant ex ductu plani A E in ſeipſum ſimul cum eo quod fit ex ductu ſuperficiei D B, in ſeipſam.

PROPOSITIO CXCVIII.

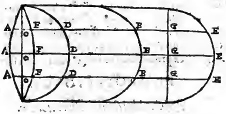
Sexageſima tertia eiuſdem libri.



DAtæ ſint tres continuæ proportionales A C, C D, D E: & D E biſecta ſit in B.

Dico quadratum A B æquale eſſe quadratis A D, C B.

APPLICATIO.



REctangulo C G, ſuper eius C C latere tamquam diametro inſcribatur ſemicirculus C D, ductiſque parallelis, fiant proportionales G C, C D, C F, erit F F parabola, vt ſuo loco demonſtratum[a] eſt; a 399. parab. igitur ſi fiant rectis C F æquales C A, lineis verò C G æquales D E, erit A A parabola & E E ſemicirculus. vnde etiam proportionales A E, C D, D E. diuiſis denique rectis D E bifariam in B B, erit B B ſemicirculus. Quoniam igitur omnes A C, C D, D E ſunt continuæ & D E biſecantur in B per 63. progreſſ. omnia quadrata A D, æquantur quadratis omnibus A D, C B ſimul ſumptis. Quare per propoſitionem vniuerſalem ſæpiùs citatam, ſolida magnitudo producta ex ductu A B plani in ſeipſum, æquatur ſolidis quæ emergunt ex ſuperficie A D in ſe ducta, ſimul cum eo quod fit à plano C B in ſeipſum ducto.

PROPOSITIO CXCIX.

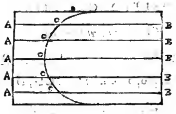
Quarta ſecundi elementorum.



SI recta linea ſecta ſit vtcunque, quadratum quod à tota deſcribitur æquale eſt quadratis quæ à partibus deſcribuntur, & ei quod bis ſub partibus comprehenditur rectangulo.

APPLI-

APPLICATIO.



PONatur parallelogrammum A B, cui inſcripta ſit quæuis linea C C. Dico parallelogrammum A B multiplicans ſeipſum, conficere ſolidam magnitudinem parallelepipedam æqualē ſolidis quæ fiunt ex ſuperficiebus A C, C B ſeipſas multiplicantibus, ſimul cum corporibus quæ exſurgunt ex multiplicatione mutua planorum A C in C B bis ſumpta. Nam ſi ducantur parallelæ A C B infinitæ, omnia quadrata A B, æquantur quadratis omnibus A C, C B vnà cum rectangulis omnibus A C B bis ſumptis. res igitur ex propoſitione noſtra [a] vniuerſali eſt manifeſta.

a 45. huius.

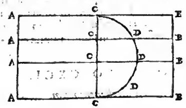
PROPOSITIO CC.

Quinta libri ſecundi elementorum.

A C D B

SI recta ſecetur in æqualia & non æqualia, rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vnà cum quadrato quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei quod à dimidia deſcribitur quadrato.

APPLICATIO.



REctangulum A B diuidat recta C C bifariam æquidiſtans A A & ſemicirculus ponatur C D.

Dico planum A D multiplicans, D B formare ſolidam magnitudinem vnà cum corpore quod gignit C D ſeipſum multiplicans, æqualem quantitati

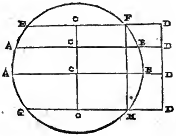
titati quæ fit ex C B ſupetficie ducta in ſeipſam. Ductis enim A C D B parallelis more ſolito, erunt omnia rectangula A D B vnà cum quadratis C D æqualia quadratis C B. Ergo ex prop. 46. vniuerſali liquet propoſitum.

PROPOSITIO CCI.

Sexta ſecundi elementorum.

SI recta linea bifariam ſecetur & illi recta quædam linea in rectum adijeiatur. Rectangulum comptehenſum ſub tota eum adiecta, vnà eum quadrato quod fit à dimidia æquale eſt quadrato à linea quæ tum ex dimidia tum ex adiecta componitur tanquam ab vna deſetipto.

APPLICATIO.



Cireulum A B ſeeent duæ æquidiſtantes E F, G H, ad quas pet centtum agatur orthogona C C, cui ſtatuatur quæuis æquidiſtans D D. Dico ſolidæ magnitudini quæ fit ex multiplicatione ſuperficiei A D in in planum D B, vnà cum quantitate quam ptoducit C B ſeipſum multiplicans, æquari corpoti orto ex ductu C D in ſeipſum. Ducantur enim patallelæ quotcunque A C B D: liquet omnes A B biſecari in C, adiectaſque ſingulis eſſe rectas B D. Omnia igitur rectangula A D B eum quadratis C B æquantur quadratis C D. Quare ex propoſ. [a] vniuerſali patet propoſitum. [a] 46. huius.

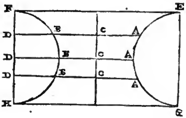
PROPOSITIO CCII.

Decima libri ſecundi elementorum.



SI recta linea ſecetur bifatiam, adijciatur autem ei in rectam quæpiam linea recta: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque ſimul quadrata duplicia ſunt eius, quod à dimidia & eius quod à compoſita ex dimidia & adiuncta tanquam ab vna deſcriptum ſit quadrati.

APPLICATIO.



SEmicirculos A A, B B contingant parallelę E F, G H; & C C diuidat bifariam rectas A B parallelas ad E F, & ponatur D D diameter ſemicirculi B B.

a 46. huius. Dico ex vi propoſitionis noſtrę [a] vniuerſalis, duas ſolidas magnitudines factas ex multiplicatione ſuperficierum A D, D B in ſeipſas duplas eſſe magnitudinum ſolidarum quæ oriuntur ex ductu planorum A C, C D in ſeipſa.

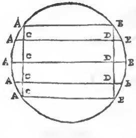
PROPOSITIO CIII.

Ex Federico Commandino adiungemus ſequentem propoſitionem.



SI recta linea in partes inæquales ſecetur: earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineæ qua maior pars ſuperat minorem.

APPLICATIO.



CIrculo A B inſcribatur rectangulum C D.

Dico ſolidas magnitudines, quæ reſultant ex ductu ſuperficierum A C, B C in ſeipſas, æquari magnitudinibus quæ proferuntur ex multiplicatione planorum A C in C B bis ſumpta, vnà cum parallelepipedo quod fit ex multiplicatione C D parallelogrammi in ſeipſum. Ducantur enim quotcunque A C D B parallelę; patet A C æquales eſſe D B, adeoq; C D differentias eſſe partium A C, C B; ſemper igitur quadrata A C, C B æquantur rectangulis A C B bis ſumptis vnà cum quadratis C D iuxta Commandi-

b 46. huius. ni propoſ. iam allatam. Vnde per [b] vniuerſalem noſtrã patet propoſitũ.

Quia

Quia verò propoſitiones multæ ex ijs quas Pappus Alexandrinus poſteris reliquit, noſtro inſtituto non parum inſeruiunt, hinc etiam nonnullas ex illis ſecernere placuit, quas libro ſeptimo collectionum ſuarum inſeruit, vt doctrinæ ductuum Geometricorum eas aptaremus.

PROPOSITIO CCIV.

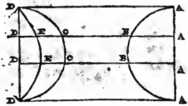
Vigeſimatertia libri ſeptimi Pappi Alexandrini.

A B C E D

SIt recta linea A B æqualis C D, & in ipſa C D ſumatur quoduis punctum E.

Dico rectangulum A C D æquale eſſe rectangulo A E D & rectangulo B E C.

APPLICATIO.



POnatur rectangulum A B, ſuperq; eius lateribus A A, D D ſemicirculi deſcribantur A B, C D: & ſemicirculum D C ſecet E E.

Dico quantitatem ſolidam quæ fit ex ſuperficie A C in C D ducta, æquari ſolidæ magnitudini ex plano quæ emergit ex planis A E, E D ſe mutuo multiplicantibus & ſolido quod naſcitur ex ductu plani B E in E C. Ductis enim parallelis infinitis A D C E D, erunt omnes A B, C D æquales. Ergo iuxta Pappi demonſtrationem omnia rectangula A C D æquantur rectangulis A E D, B E C. Ergo ex vniuerſali[a] noſtra liquet propoſitum. [a] 45. huius.

PROPOSITIO CCV.

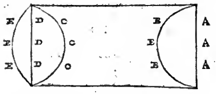
Vigeſima quarta libri ſeptimi Pappi Alexandrini.

A B C D E

IIſdem poſitis: ſit punctum E extra lineam A D.

Dico rectangulum B E C rectangulo A E D & rectangulo B D C æquale eſſe.

APPLICATIO.

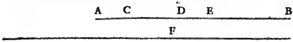


Manente itaque rectangulo A D & circulis A B, C D, linea E E E ponatur extra circulum C D.

Dico rurſus ſolidam magnitudinem quam exhibent ſuperficies B E, E C inuicem multiplicantes, æqualem eſſe ſolidis quę reſultant ex planis A E, E D in ſe mutuo ductis, vnà cum B D multiplicante D C.

PROPOSITIO CCVI.

Quadrageſimaprima eiuſdem libri ſeptimi Pappi Alexandrini.



Sit recta linea A B, in qua ſumantur tria puncta C, D, E, ita vt rectangulum A D C ſit æquale rectangulo B D E: & vtriſque A E C B æqualis ponatur recta linea F.

Dico rectangulum quidem F A D rectangulo B A E æquale eſſe: rectangulum autem F C D æquale rectangulo B C E: rectangulum verò F B D rectangulo A B C, & rectangulum F E D rectangulo A E C æquale.

APPLICATIO.

Rectangulo A D inſcribatur parabola D C, ad cuius axem recta D D ſit ordinatim poſita, aſſumatur deinde circulus B B, cuius aliquem arcum K K id eſt E E ſubtendat D D recta; erunt igitur rectangulis H D G æqualia rectangula E D B.

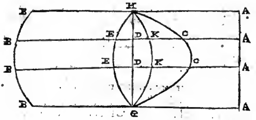
Dico ex mente propoſitionis vniuerſalis, ſequentes æquationes contingere.

Primò corpus ex baſi A D in altitudinem F, hoc eſt in plana A E, C B ducta reſultans, æquari magnitudini ex plano B A multiplicante A E.

Secundò ſolidum ex baſi C D, & altitudine F, hoc eſt planis A E, C B, æquari ſolidum ex B C, C E planis ſe mutuo multiplicantibus.

Tertiò magnitudinem ortam ex baſi B D in altitudinem F, hoc eſt in plana A E, C B, æqualem eſſe ſolido quod conflatur ex ductu mutuo ſuperficierum A B & B C.

Tertiò



Quartò tandem quantitatem ſolidam conſtantem baſi E D, & F altitudine, hoc eſt planis A E, C B æquari magnitudini quę fit ex duabus ſuperficiebus A E, E C ſeſe mutuo multiplicantibus.

PROPOSITIO CCVII.

Quadrageſima ſecunda libri ſeptimi collectionum Pappi Alexandrini.



SIt rectangulum A D C æquale rectangulo B D E, & vtriſque A E, C B æqualis ponatur recta linea F.

Dico rurſus quatuor fieri æquationes: videlicet rectangulum quidem F A D æquale rectangulo B A E, rectangulum verò F C D rectangulo B C E æquale; rectangulumque F B D rectangulo A B C; & rectangulum F E D rectangulo A E C.

APPLICATIO.

POnantur eædem ſuperficies quæ priùs: ſed ita vt rectangulo A D C æquale ſit E D B rectangulum.

Dico iterum quatuor æquationes contingere.

Primò inter corpus ex baſi A D & planis A E, C B cum eo quod fit ex ductu mutuo planorum B A, A E.

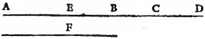
Secundò inter magnitudinem ſub baſi C D & A E, C B ſuperficiebus cum corpore genito ex plano B C multiplicante C E.

Tertiò inter ſolidum baſeos B D & planorum A E, C B, cum magnitudine quam exhibet multiplicatio planorum A B & B C in ſe inuicem.

Quartò inter quantitatem ſub baſi E D & planis A E, C B cum magnitudine ſolida ex A E plano multiplicante E C.

PROPOSITIO CCVIII.

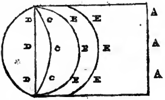
Quadrageſimatertia libri ſeptimi collectionum Pappi.



SIt autem punctum extra totam lineam, & ſit rectangulum A D C æquale rectangulo B D E.

Dico ruſus, ſi exceſſui linearũ A E C B æqualis ponatur F, quatuor fieri: videlicet rectangulum quidem F A D æquale rectangulo B A E; rectangulum verò F C D æquale rectangulo B C E; rectangulumq́; F B D rectangulo A B C; & rectangulum F D E rectangulo A E C.

APPLICATIO.



DIſponantur ſuperficies præcedentis figuræ vt rectangulis A D C æqualia ſint E D B rectangula.

Dico iterum quatuor formandas æquationes.

Primò, magnitudinem ex plano A D in F, hoc eſt in A E, C B quæ ſunt differentiæ ſuperficierum, æqualem exiſtere corpori quod reſultat ex B A multiplicante A E.

Secundò, ſolidum ex C D in A E, C B, quæ ſunt differentiæ planorum, emergens, æquari quantitati quæ oritur ex ductu mutuo planorum B C, C E.

Tertiò, quantitatem ſolidam ex B D ducto in A E, C B, quæ ſunt differentiæ, æqualem eſſe illi magnitudini quæ fit ex multiplicatione mutua planorum A B, B C.

Quartò tandem quod gignitur ex plano D E in A E, C B differentiam ſuperficierum æquari ſolidæ magnitudini quę reſultat ex A E plano multiplicante planum E C.

PRO-

PROPOSITIO CCIX.

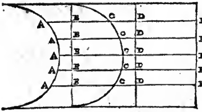
Sexageſimatertia libri ſeptimi collectionum Pappi.

A B C D E

SIt A B quidem æqualis C D: rectangulum autem B E C rectangulo A B D maius.

Dico rectangulum B E C ſuperare rectangulum A E D ipſo B D C rectangulo.

APPLICATIO.



COnſtituantur ſemicirculi A A, C C paralleli; & ſint A B æquales C D, & rectangulum B E C maius A B D rectangulo.

Dico per propoſitionem noſtram vniuerſalem a ſolidam magnitudinem ex plano B E multiplicante E C, æquari ſolidis quæ fiunt ex ductu A E plani in E D, & illi quod oritur ex A B multiplicante B D. a 46. huius.

PROPOSITIO CCX.

Centeſima quadrageſima nona eiuſdem libri.

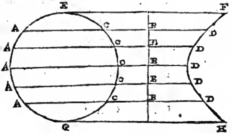
A C B D

SIt rectangulum A B C æquale quadrato B D.

Dico tria contingere; videlicet rectangulum quidem quod vtraque A D, D C & B D continetur, æquale eſſe rectangulo A D C, rectangulum verò contentum vtraque A D, D C & C B æquale eſſe quadrato D C; & rectangulum contentum vtraque A D, D C & A B, quadrato A D æquale.

A P-

APPLICATIO.



a 214. Hyperbol.

Circulum A C contingant parallelæ E F, G H : & B B linea normaliter illis inſiſtat, fiant rectangulis A B C æqualia B D quadrata, erit D D hyperbola vti ſuo a loco eſt demonſtratum.

Dico igitur ex mente propoſitionis noſtræ vniuerſalis tria contingere.

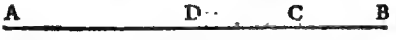
Primum eſt magnitudinem ſolidam reſultantem ex ductu plani B D in plana A D & D C æquari ſolido quod producitur ex A D plano ducto in D C.

Secundum eſt ſolidum ex C B ducto in A D, D C æquari magnitudini quæ fit ex D C ſeipſum multiplicante.

Tertium denique quod fit ex A B in A D, D C ſuperficies, æquari quantitati ſolidæ ex A D ſe multiplicante.

PROPOSITIO CCXI.

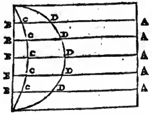
Centeſima quinquageſima prima eiuſdem libri ſeptimi collectionum.



Sit rectangulum A B C æquale quadrato ex B D.

Dico tria contingere, videlicet rectangulum quod exceſſu ipſarum A D, D C & B D continetur æquale eſſe rectangulo A D C; rectangulum verò contentum exceſſu ipſarum A D, D C & C B, æquale eſſe quadrato ex D C: & rectangulum contentum exceſſu A D, D C, & B A æquale eſſe quadrato ex A D.

APPLICATIO.



REctangulo AB inſcribatur ſemicirculus BD cuius diameter BB, poſitiſque tertijs proportionalibus BC ad duas AB, BD; erit CC parabola, vt ſuo loco oſtenſum eſt.

Dico igitur iuxta ſenſum huius propoſitionis & noſtræ vniuerſalis, tres æquationes fieri.

Prima, magnitudo ex ſuperficie BD ducta in exceſſum quo AD ſuperat planum DC, æquatur corpori, quod fit ex AD plano multiplicante DC.

Altera, magnitudo ſolida ex CB plano ducta in differentiam ſuperficierum AD, DC, æqualis eſt ſolido, quod emergit ex ductu DC in ſeipſum.

Tertia denique, ſolidum ex plano BA multiplicante exceſſum planorum AD, DC æquatur corpori, quod reſultat ex AD ſuperficie ſeipſam multiplicante.

PROPOSITIO CCXII.

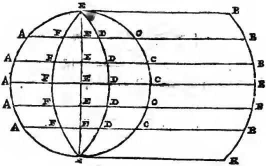
Centeſima ſexageſima libri ſeptimi collectionum Pappi.

A E D C B

SIt vt AB ad BC ita AD ad DC, & AC bifariam in puncto E ſecetur.

Dico tria contingere, videlicet rectangulum quidem BED æquale eſſe quadrato ex EC; rectangulum verò BDE rectangulo ADC; & rectangulum ABC rectangulo EBD æquale eſſe.

APPLICATIO.



Circuli F B arcum F F ſubtendat recta E E, factis deinde E D æqualibus F E, deſcribatur circulus C A ſuper E E diametro. itaque ſunt in continuata proportione E D, E C, E B : & quia E C æquales ſunt E A, erunt a A B rectę diuiſę in A, D, C ſecundùm extremam & mediam rationem proportionales: vnde erit A B ad B C vt A D ad D C.

a 4. Definit.

Dico igitur tres rurſus æquationes exſurgere.

Prima eſt, magnitudo ex plano B E multiplicante E D, æquale corpus efficit illi, quod fit ex E C ſeipſum multiplicante.

Secunda, magnitudo ex D E baſi, in altitudinem D B, æqualis eſt ſolido, quod oritur ex A D plano ducto in D C ſuperficiem.

Tertia verò, corpus ex A B, B C planis in ſe mutuo multiplicatis, ęquatur magnitudini, quę reſultat ex ſuperficie E B multiplicante planum D B.

PROPOSITIO CCXIII.

Centeſima ſeptuageſima octaua libri ſeptimi collectionum Pappi Alexandrini.

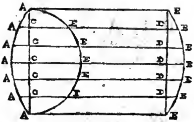
A C E D B

Sit recta linea A B, & æquales ſint A C D B, & inter C D ſumatur quoduis punctum E.

Dico rectangulum A D B vnà cum rectangulo C E D æquale eſſe rectangulo A E B.

APPLI-

APPLICATIO.



CIrculo AB inſcriptum ſit rectangulum CD, & ſuper diametro CC circulus EE deſcribatur.

Dico magnitudinem ſolidam ex ductu plani AD in planum DB, vnà cum ſolida magnitudine ex plano CE in ED, æquari ſolidæ quantitati quæ gignitur ex AE, plano multiplicante EB, ſecundùm mentem propoſitionis noſtræ vniuerſalis.

PROPOSITIO CCXIII.

Centeſima ſeptuageſimanona eiuſdem libri Pappi.

A C E D B

SIt recta linea AB, & æquales ſint ACDB: & inter CD quoduis punctum E ſumatur.

Dico rectangulum AEB æquale eſſe rectangulo CED & rectangulo DAC.

APPLICATIO.

EAdem remanente figurâ:

Dico ſolidam magnitudinem quę fit ex AE multiplicante EB, æquari corporibus quæ formantur ex ductu planorum CE & ED in ſe mutuo, ſimul cum corpore quod fit ex DA plano multiplicante planum AC.

Pluribus ſuperſedeo, cùm hæc abundè ſufficiant vt quis iudicium formet quam methodum obſeruare debeat vt doctrina, quæ hoc libro expoſita eſt, vtatur. minutulus nonnihil etiam contra mentem fui, in gratiam maximè eorum qui hæc fieri requirebant.

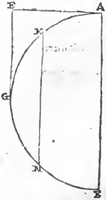
DVCTVVM PLANI IN PLANVM

PARS DECIMA

DE PARABOLIS VIRTVALIBVS.

ARGVMENTVM.

QVoniam libro in ſequenti cubaturas Cylindri eiuſque variarum partium aggredi intendimus, tempus exigit vt eas præparationes præmittamus quæ inſeruiant ad id præſtandum quod inſtituti talis ratio poſtulat. & quia Cylindrus ſub altitudine A B, *& baſi ſemicirculari* A G B *iam ad corpus reductus eſt ipſi æquale, quod gignitur ex parabola in ſe ſubalternè ducta, reſtat vt idipſum conemur præſtare de Cylindri parte quæ baſi conſtet* K G N, *& altitudine* A B, *exhibendo ſcilicet aliquod ſolidum quod ipſi æquetur. Deinde idipſum quoque perficiamus de corpore quod baſim quidem complectatur figuram* A E G *quæ conſtat quadrante circuli* A G *& duabus contingentibus* A E, E G, *altitudinem verò* A B, *& nonnullis alijs his ſimilibus; quorum problematum ſolutionem per parabolas quoque expedire conati ſumus: quæ licet ex vi ſuæ constructionis non videantur ſectionis parabolicæ figuram exprimere, nihilominus certa ratione reductæ perhibentur partes eſſe veriſſimarũ parabolarum, quas proinde virtuales appellamus, eò quod virtute contineant proprietates omnes quæ in veris parabolis demonſtrantur.*

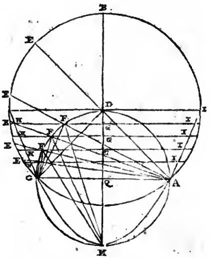


DEFINITIO.

PArabolam virtualem voco, cuius ordinatim applicatæ, ſi ad rectam lineam ponantur, aut à rectâ lineâ diuidantur biſariam veram producunt parabolam. Porrò illam pleræq; virtuales primariam habẽt proprietatem

tatem, vt linea biſecans ordinatim in illis applicatas, vera ſit parabola, ſed inuerſa.

PROPOSITIO CCXIV.



REctæ AC, DK, diametri circuli ADC, orthogonaliter ſeſe decuſſent: centroq́; D, interuallo DA, circulus deſcribatur ABC, & ex A rectæ ponantur quotuis AFE ſiue AF, FC, ſunt enim FE ipſis FC, æquales, vt demonſtrat Serenus l. 2. prop. 43. deinde per puncta F, F, rectæ ponantur IH, æquales lineis AE ſiue AFC, normales autem ad diametrum DK, à qua bifariam ſecentur in G.

Dico puncta HIK eſſe ad parabolam, cuius axis eſt DK.

Demonſtratio.

DVcantur lineæ FK, quoniam circulus ABC habet centrum in perimetro circuli ADC, quadratum AE eſt ad quadratum AE, vt [a] FK quadratum ad quadratum FK, ſed vt FK quadratum ad quadratum FK, ſic KG linea eſt ad lineam KG; quadratum igitur AE eſt ad quadratum AE, id eſt HI quadratum eſt ad quadratum HI vt KG linea eſt ad lineam KG: puncta igitur HIK ad [b] parabolam ſunt: & quia KD ad rectos decuſſat lineas HI, recta KD axis eſt parabolæ HIK. Quod erat demonſtrandum.

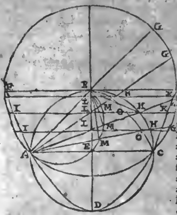
[a] 23. circul.
[b] 1 parab.

PROPOSITIO CCXV.

INſiſtant denuo ſibi inuicem ad rectos, diametri AC, BD circuli ABC: cuius centrum E, centroque B, interuallo BA circulus deſcribatur AFG; & ex A rectæ ponantur AHG, ſiue AH, HC, ſunt enim HC ipſis HG æquales, vt demonſtrat Serenus l. 2. prop. 43. Deinde per puncta

 H, rectæ

H, rectæ ponantur IK æquales AG ſiue AHC, normales autem ad BD, à qua bifariam ſecentur in LL: fiant deinde lineæ KO æquales lineis GH, ſiue HC.



Dico puncta BOC eſſe ad parabolam cuius latus rectum eſt EC.

Demonſtratio.

IVnctâ AB deſcribatur ſuper AB vt diametro ſemicirculus BMA, occurrens AG lineis in M; iunganturque MB, BH: quoniam igitur angulus AEB per hypotheſim rectus eſt, ſemicirculus BMA tranſit per E centrum circuli ABC, & MH lineis [a] æquales ſunt BM: ſunt autem anguli in ſemicirculo BMA, adeoque & anguli BMH recti. ergo triangula BMH ſimilia ſunt, adeoque quadratum BM eſt ad quadratum BM, vt quadratum BH ad quadratum BH: quia verò anguli ad M, in ſemicirculo recti ſunt, & MB rectæ ducuntur ex centro circuli AFG, rectæ AG in M biſſectæ ſunt: vnde cùm IK, AG lineæ æquentur, illarum dimidiæ LK, MG æquales ſunt: & quia OK per hypotheſim æquantur HG, reliquæ MH, id eſt, vt iam oſtendi, MB reliquis LO æquales ſunt. igitur vt quadratum MB ad quadratum MB, ſic LO quadratum eſt ad quadratum LO: ſed vt MB quadratum ad MB quadratum, ſic HB quadratum eſt ad quadratum HB, id eſt LB linea ad lineam LB; quadratum igitur LO eſt ad quadratum LO vt BL linea ad lineam BL, parabola igitur eſt BOC, axem habens BE, ad quem ordinatim poſitæ ſunt LO, EC. quia autem EC, æquatur BE, etiam EC lateri recto æqualis eſt. Quod erat demonſtrandum.

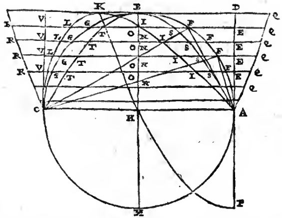
[a] Seren. l. 2. prop. 43.

PROPOSITIO CCXVI.

REctæ AC, BM diametri circuli ABC decuſſent ſeſe ad rectos in H; ponantur autem per A, B, C contingentes, & rectæ ducantur AG: occurrentes circuli perimetro in G punctis, per quæ ponantur EI parallelæ AC & æquales lineis GC: lineæ verò EL æquales fiant rectis AG, EL.

Dico puncta IL ad parabolam eſſe virtualem.

Demonſtratio.



PRoduçantur vtrimque F G, æqualiter in Q & R, vt R Q totæ in N biſſecentur, & æquales ſint rectis A G, G C : erunt igitur puncta R Q ad veram [a] parabolam. auferantur deinde vtrimque lineæ R T, Q S, æquales G C vel A F; etiam puncta S, B, T per præcedentem, ad veram ſunt parabolam: deinde quia tota R Q æqualis eſt lineis A G, G C, & Q S æqualis G C, reliqua S R id eſt Q T, (quia S Q, T R æquales ſunt) reliquæ A G id eſt per hypotheſim E L æqualis eſt : ſed & E I, Q S æquales ſunt G C, adeoque & inter ſe: illis igitur ablatis, reliquæ I L, S T æquales ſunt, ſed S T ad veram ſunt parabolam, igitur per definitionem huic parti præfixam, & I L ſunt ad virtualem: quod autem illius axis, vera ſit parabola ſic oſtendo: ſecentur L I lineę bifariam per lineam P H K, dico P H K veram eſſe parabolam cuius axis eſt E P. quoniam enim L I, S T lineę æquales ſunt, rectæ quoque I O; S N, æqualium dimidiæ æquantur. Quare ſi his addantur E I, Q S ſuprà oſtenſæ æquales, erunt totę E O, N Q æquales. cùm igitur rectę E O, poſitæ ſint ad rectam lineam D P, ſintque puncta Q ad veram parabolam, etiam puncta O O erunt ad veram parabolam. [a] 210. huius.

PROPOSITIO CCXVII.

IIſdem poſitis:
Dico planum Q S ductum in ſe, æquari plano E F, ducto in altitudinem A C.

Demonſtratio.

QVoniam S Q lineæ per constructionẽ æquantur lineis G C, id eſt lineæ A F, quadrata S Q æqualia ſunt quadratis A F, id eſt rectangulis F E V; planũ igitur S Q ductum in ſe [b] æquale eſt E F ducto in E V, ſiue in altitudinem A C. Quod erat demonſtrandum. [b] 45. huius.

PROPOSITIO CCXVIII.

IIſdem poſitis:
Dico E G planum ductum in E V, æquari plano T Q ducto in ſe.

Demon-

Demonſtratio.

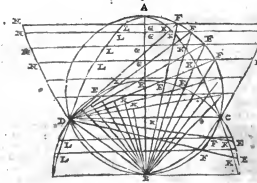
REctæ T Q æquales ſunt oſtenſæ rectis A G, quadrata igitur T Q æqualia ſunt
a 45. huius. quadratis A G id eſt rectangulis G E V. planum igitur T Q a ductum in ſe æquatur E G plano ducto in E V.

PROPOSITIO CCXIX.

CIrculi A D B C diametrum A B, ſecet orthogonaliter recta quæuis C D: centroq́; B, interuallo B C, ſiue B D circulus C E D deſcribatur, quem in E ſecent quotuis rectæ D E F occurrentes circulo A E B in F punctis, per quæ normales ad A B ponantur F G. fiant deinde D E lineis, æquales L K, ita poſitæ vt à diametro A B biſecentur in G. Rectis autem D F, æquales fiant K N & L I.

Dico I B N puncta, item C K L D, ad veras eſſe parabolas.

Demonſtratio.



DVcantur rectæ B D, D A, A F. Quoniam angulus B D A rectus eſt, vt pote in ſemicirculo conſtitutus, eſtq́ue B D ſemidiameter circuli C E D, linea D A tanget
b 32. tertij. circulũ C E D, in D. Quare anguli inſiſtẽtes arcubus D E, æquantur b angulis A D F, arcus igitur D E ſimiles ſunt arcubus A F. Ergo ſubtenſæ D E ſubtenſis A F, adeoq́;
c Per elementa. & quadrata D E quadratis A F proportionalia ſunt: ſed quadratum A F eſt ad quadratum A F vt c rectangulum B A G ad B A G, id eſt vt recta A G ad rectam A G. Ergo quadratum D E eſt ad quadratum D E, hoc eſt ex hypotheſi quadratum K L ad K L, hoc eſt K G eſt ad quadratum K G, vt A G ad A G; puncta igitur K ad veram ſunt parabolam. Idem eodem diſcurſu oſtendemus de punctis L.

Quod autem puncta I I, N N etiam ad veram ſint parabolam, ſic demonſtro. Super B D deſcripto ſemicirculo ſecante B F in H, iungantur B H. Quoniam anguli B H D poſiti in ſemicirculo ſunt recti, etiam anguli B H F recti erunt, adeoq́ue æquales. ſunt autem & anguli B F D in eodem facti ſegmento æquales. ergo triangula B F H ſimilia ſunt; ergo B F ad B F, vt H F ad H F. Deinde, quoniam rectę B H ex centro B circuli E E, normales ſunt ad D E, (anguli enim B H D ſunt in ſemicirculo) erunt D E biſectę in H. Quare cùm etiam K L ex hyp. biſectę ſint in G, ſintq́ue æquales ipſis D E, erunt D H æquales L G. Atqui ex hyp. totæ D F æquantur totis L I. ergo reliquæ H F reliquis G I æquales. quia igitur iam oſtendi eſſe H F ad H F, vt B F ad B F, etiam G I eſt ad G I, vt B F ad B F, adeoq́ue quadratum G I ad

quadra-

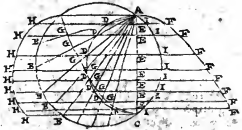
quadratum G I vt quadratum B F ad quadratum B F, hoc eſt vt recta B G ad rectam B G. Puncta igitur I I ſunt ad parabolam. idem eodem diſcurſu oſtendam de punctis N N; habemus ergo propoſitum.

PROPOSITIO CCXX.

Circulum A B C, ſecet recta quæuis A C, ſuper qua vt diametro ſemicirculus deſcribatur A D C: dein ex A rectæ ponantur quæuis A B, occurrentes circulo A B C in B, & circulo A D C in D, per D normales ponantur E H, æquales rectis A D B.

Dico puncta H H ad parabolam eſſe virtualem.

Demonſtratio.



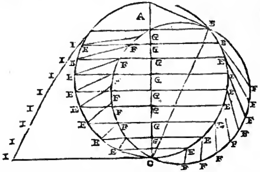
Rectæ H E producantur in F, vt E F æquales ſint A D, erunt per 300. libri de parabola, puncta F F, ad parabolam. Deinde rectis D B æquales ſumantur E G: per 305. libri de parabol. puncta quoque G, G ad parabolam erunt. cùm igitur lineę A D, D B, id eſt ex hypotheſi E H, veras producant parabolas, ex definitione patet H, H virtualem eſſe parabolam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXXI.

Circulum A B C ſecet recta quæuis B C, ſuper qua deſcripto circulo B F C, ponantur ex B lineæ quotcunque B F E, occurrentes quidem circulo B F C in F, & A B C in E punctis; per quæ rectæ ponantur E G I normales ad A C diametrum circuli A B C, occurrentes eidem in G: fiant autem lineæ G I æquales lineis B F.

Dico puncta I I ad veram eſſe parabolam.

Demonſtratio.



INtelliganturiungi A E, E C, item F C: quoniam igitur anguli C A E, C B E iiſdem inſiſtunt arcubus C E, anguli C A E, C B E æquales ſunt. ſed anguli A E C, B F C, in ſemicirculis A E C, B F C, recti ſunt, adeoque & æquales; ſimilia igitur ſunt triangula A E C, B F C: quare vt A E ad A E, ſic F B ad F B; ſed [a] A E translatę in normales G I, veram produeunt parabolam; igitur & B F in eaſdem translatæ ad veram ſunt parabolam. Quod erat demonſtrandum.

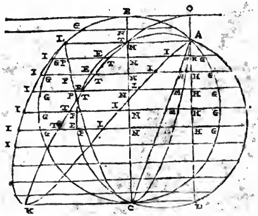
a Per 300. lib de parab.

PROPOSITIO CCXXII.

CIrculum A B C cuius diamerer B C, ſecet A D parallela B C, occurrens contingenri per C ductæ in D: ponanrur deinde ex A lineæ A G quotcumque oecurrenres cireuli A B C perimerro in G puneris, per quæ reeræ ponanrur H G I, normales ad diamerrum B C: fianrque H I lineæ æquales lineis A G.

Dico puncta I I ad virrualem eſſe parabolam.

Demonſtratio.



IVncta A C deſcribatur ſuper A C vt diametro, circulus A E C, oecurrens lineis A G in punctis E, E. quoniam igitur A D, parallela eſt diametro B C, & C D in C, circulum A B C contingit, recta A D normalis eſt ad C D, adeoq; circulus A E C tranſit [b] per D. Fiant deinde A E lineis, æquales H T, erunt puncta T T ad parabolam.

b 31. tertij.

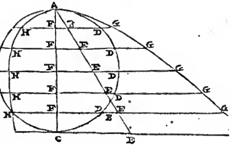
bolam. Fiant inſuper lineis A, E G (id eſt lineis E G quę ſunt partes linearum A G) æquales N M, N P. erunt rurſum puncta M M, è P P ad parabolam. quia verò H I lineę ęquales ſunt A G; & H T ipſis A E æquales, rectæ T I æquales ſunt rectis A, G E, id eſt ex conſtr. N M; ac proinde I I rectæ, duplę ipſarum I T æquales ſunt rectis M P, duplis M N: igitur cùm I I lineæ translatę in M P, veram producant parabolam M P; erit I I, parabola virtualis, cuius axis eſt linea T T, quam oſtendimus ſupra veram eſſe parabolam.

PROPOSITIO CCXXIII.

Circulum A B C ſecet recta per centrum A C, & altera non per illud A E, & poſitis D F ordinatim ad diametrum A C fiant rectis A D, æquales lineæ D, E G, & D, E H.

Dico G H eſſe parabolam cuius latus rectum eſt A B.

Demonſtratio.



Qvandoquidem quadratum A D, eſt ad quadratum A D, in ratione A F lineæ ad lineam A F. Cùm ſit F A C, rectangulum æquale A D, quadrato. quia verò ex elementis conſtat A F ad A F, eandem habere proportionem, quam habet linea A E ad A E. Igitur quam rationem habebit quadratum A D ad A D quadratum, eandem quoque recta A E habebit ad rectam A E: ſunt autem E G æquales ex conſtructione rectis A D. Igitur quam proportionem habet recta A E ad A E, rectam, eandem quoque habebit E G quadratum, ad quadratum E G; eſt igitur G G, vel H H, parabola. quod verò recta A B, æqualis ſit lateri recto eiuſdem, ſic cōſtabit: recta A B eſt ex conſtructione lineæ B G, æqualis; igitur B G quadratum ad E G, quadratum talem habet rationem quam habet linea B A ad E A lineam: hoc eſt quam habet B G, linea ad lineam E A. quocirca patet B G, hoc eſt B A, eſſe latus rectum parabolę G H. Quod erat demonſtrandum.

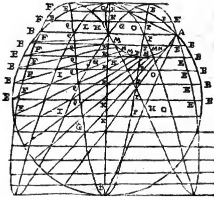
PROPOSITIO CCXXIV.

Sit in A B C circuli perimetro aſſumptum quoduis punctum A, ex quo rectæ ponantur quotcunque A B occurrentes circuli A B C perimetro in B B punctis, per quæ rectæ ponantur E F, normales ad C D diametrum circuli A B C: ſint autem E F, æquales ipſis A B, & in K à diametro D C bifariam diuiſæ: iunctâ deinde A C, deſcribatur ſuper A C vt diametro ſemicirculus A M C, occurrens A B lineis in M M:

fiant autem dimidijs rectarum M B æquales, K I, K O; & E O lineis æquales O H, denique F I æquales fiant I G: & E H transferantur in K, P Q: vt P Q in K diuiſæ ſint bifariam.

Dico E H, G F, item E G, H F parabolas eſſe virtuales: deinde O I, P Q veras eſſe parabolas.

Demonſtratio.



INtelligantur ad eirculorum petipherias duci lineæ C M, C B; erunt igitur triangula C M B ſimilia inter ſe, vt ex elementis patet, quod etiam oſtendimus 219. huius. quare vt quadratum C B ad quadratum C B, id eſt vt C K [a] linea ad lineam C K, ſic M B quadratum ad quadratum M B: id eſt O I quadratum ad quadratum O I, quia M B, O I lineæ per hypotheſim æquales ſunt; parabola eſt igitur vera, O C I cuius axis C D.

a Per elementa.

Rurſum cùm E F lineæ æquales ſint A B, & O I æquales M B; ſint autem & E F, O I in K diuiſæ bifariam, reliquæ E O, F I æquales ſunt, & ſimul ſumptæ æquales lineis A M: ſunt verò E O lineis æquales O H, & F I æquales I G, ſingulæ igitur E H, G F æquales ſunt ipſis A M. ſed A M, tranſlatæ in P Q normales ad C D, veram produeunt [b] parabolam; igitur & E H, G F trãnſlatæ in P Q ad veram ſunt parabolam. ergo E H, F G ſunt virtuales parabolę. cum autem lineæ O O, I I, rectas E H, E H & F G, F G bifariam diuidant ex hypotheſi, parabolarum virtualium axes erunt lineæ O, O, I, I, quas oſtendi veras eſſe parabolas.

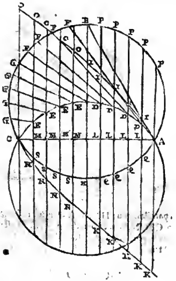
b 300. parabol.

Iterùm cùm E F lineę æquales ſint A B, & F G oſtenſæ æquales A M, reliquæ E G ęquales ſunt M B, id eſt O, I, ex hypotheſi. ſimiliter H F rectæ æquales oſtenduntur rectis O I; igitur eùm O I vera ſit parabola, puncta E G, H F ad virtuales ſunt parabolas: quod verò P P, Q Q; quas veras oſtendi eſſe parabolas, rectas E G, H F biſecent, ſic oſtendo. quoniam E O ex hypotheſi æquales ſunt P K, addito vel dempto eommuni O P, rectæ E P æquales ſunt O K, totę autem E G oſtenſæ ſunt æquales O I; igitur P G reliquę æquales ſunt K I: vnde E G in P P diuiſæ ſunt bifariam. Similiter lineæ H F in Q Q bifariam ſectæ ſunt in Q; igitur, &c. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO CCXXV.

INterſecent ſeſe circuli duo ABC, ADC in A & C punctis: quibus iunctis, ponatur per vtriuſque circuli centrum recta BH, cui parallelæ ponantur DQ, ES: & DQ quidem verſus A; SE verò verſus C, occurrantque lineę AC in L & M: per puncta verò D, E ex A rectæ ponantur ADF, AEG. lineis deinde AD fiant æquales D, LI; & DF lineis æquales Q, LK. deinde & AE lineis æquales ponantur E, MO, & ipſis EG æquales SMN: ostendimus ſuprà puncta IO, & NK ad parabolas [a] eſſe virtuales. a 216. huius.



Dico autem corpus ortū ex ductu plani IL in LK, æquari corpori orto ex ductu OM in MN.

Demonſtratio.

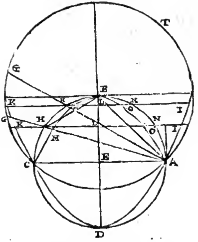
PRoductæ LI, circulo occurrant in P, & ME rectæ eidem occurrant in F, rectāgulis ADF æqualia ſunt rectangula KLI per hypotheſim; ſimiliter AEG rectangulis æqualia ſunt rectangula NMO: ſed ADF rectangulis æqualia ſunt rectangula PDQ, & AEG rectangulis æquantur FES, rectangulis igitur PDQ, FES æqualia ſunt rectangula ILK, OMN; ſed PDQ rectangula æqualia ſunt rectangulis FES, (modò diſtantiæ à diametro BH ſumantur æquales) rectangulis igitur ILK æqualia ſunt rectangula OMN: quare IL ductum in LK [b] æquale eſt OM ducto in MN. Quod erat demonſtrandum. b 46. huius.

PROPOSITIO CCXXVI.

INterſecent ſeſe circuli duo ABC, ACG in A & C, ſit autem B centrum circuli ACG, iunctiſq; AC ducantur ex A lineæ AG occurrentes circulo ABC in H: dein rectæ AG transferantur in H, KI normales ad diametrum BD, à qua bifariam diuidantur in LL: ipſę autem AH transferantur in H, KO, & in N, IO, erunt KK, MM, II, OO, veræ ac formales [c] parabolæ. c 219. huius.

Dico HN ſuperficiem ductam in altitudinem CA, corpus exhibere æquale illi quod oritur ex ductu MI in ſe ipſum, minus KM ducto in ſe.

Demonſtratio.



CVm parallelæ ſint HN, CA, [a] igitur rectangulum HN, CA, vnà cum rectangulo CH, NA, id eſt quadrato CH, id eſt [b] HG, æquatur quadrato AH, id eſt KO ex hypotheſi. Igitur KO ductum in ſe excedit ABC ductum in AC quantitate KM in ſe ducta. Quod fuit demonſtrandum.

a Ptolemæus lib. 1. propoſ. 24.
b Seren. lib. 2. p. 44.

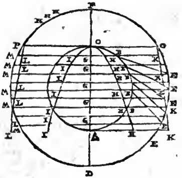
PROPOSITIO CXXXVII.

HAbeant ABC, DEF circuli duo concentrici communem diametralem DF, ductiſque ex C extremitate diametri circuli minoris, ſecantibus CBE, agantur per B lineæ orthogonæ BGI ad diametrum AC occurrentes illi in G; dein CB lineis translatis in normales HI, ad diametrum AC, à qua bifariam ſecentur in G; fiant BE lineis æquales B, HK, item IL.

Dico tam puncta HI, quàm KL ad veras eſſe parabolas.

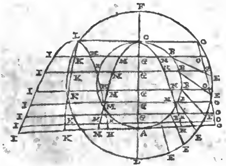
Demon-

Demonſtratio.



QVoniam HI lineæ æquales ponuntur lineis BC, quadratum HI ad quadratum HI, eſt, vt BC quadratum ad quadratum BC, id eſt vt CG recta ad rectam CG: igitur HI vera ac formalis eſt parabola. Rurſum actâ per C contingente OP, patet BEC, rectangula æqualia eſſe quadrato CO, adeoque & inter ſe: ſed cùm per hypotheſim rectis EB, EC æquales ſint rectæ KH, HL, erunt KHL rectangula, æqualia rectangulis BEC; igitur KHL rectangula æqualia ſunt quadrato CO, adeoque & inter ſe. vnde [a] KL ad veram & formalem ſunt parabolam. Quod fuit demonſtrandum. *a Per 346. parabol.*

PROPOSITIO CCXXVIII.



HAbeant ABC, DEF circuli paralleli communem diametralem DF, actaq; per C extremitatem diametri circuli minoris, tangente CL, ducantur ex C ſecantes quotuis CE occurrentes circulo ABC in B punctis, per quæ orthogonæ ducantur ad diametrum AC, fiant autem rectis BE æquales GH; rectis verò CB æquales HI.

Dico HLI parabolam eſſe virtualem.

Demon-

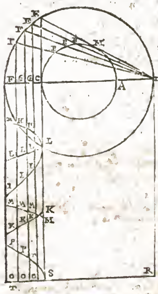
Demonſtratio.

REctis CB æquales ponantur NM, quas CA diameter biſecet in G, rectis autem BE æquales fiant NO, MK; erunt igitur per præcedentem NCM, OK veræ ac formales parabolæ. quoniam tam GH quam MK lineæ æquales ſunt rectis BE, rectæ GH, MK æquales ſunt inter ſe; ablatis igitur vel additis communibus MH, reliquę GM, HK æquales ſunt. ſed MG dimidiæ ponuntur ipſarum CB, id eſt ex conſtr. ipſarum HI; igitur & HK dimidiæ ſunt HI: quare cum LKK linea diuidens HI rectas bifariam, vera ſit parabola, & HI translatæ in NM veram quoque produeant parabolam, patet HLI virtualem eſſe parabolam.

PROPOSITIO CCXXIX.

HAbeant circuli duo concentrici communem diametralem DF: & ex D rectæ ponantur DBE occurrentes circulo minori in B, maiori in E punctis, per quę rectæ ducantur EGN normales ad DF diametrum, cui occurrant in G: rectæ autem DE transferantur in E, GK, & D, BE transferantur in GH, KI.

Dico HI parabolam eſſe virtualem.



Demonſtratio.

a Patet ex 300. parab.

b Per 319. lib de parab.

c Per 346. parabol.

SEcentur HI bifariam in LL: quoniam igitur DE lineis æquales ſunt GK normales ad DF, puncta DKK ad [a] veram ſunt parabolam. quia verò tam GH, KI, quàm HL, LI rectæ æquales ſunt, totę GK in L biſectæ ſunt; adeoque vt GK ad GK, ſic GL eſt ad GL: quare LL puncta ad veram quoque ſunt parabolam. vlterius ponantur per D & F contingentes, DR, FT, quas in R & T ſecet quęuis RT parallela DF, transferantur autem dimidiæ rectarum GK ſiue DE in G, MN, patet [b] MO veram eſſe parabolam. ſimiliter dimidiæ linearum HI transferantur in PO. quoniam igitur MO æquales ſunt dimidiis GK, rectę MO, GL dimidiæ ipſarum æquales ſunt. ſed & OP, LH quoque per conſtructionem æquantur: reliquę igitur GH, MP æquales ſunt: vnde ſi intelligantur ON fieri æquales MO rectis, MPN rectangula æqualia ſunt rectangulis GHK, id eſt per hypotheſim DBE. quia verò rectangula DBE æqualia ſunt quadrato contingentis DM, rectangula DBE adeoque & MPN, æqualia ſunt: vnde cùm MM ad veram ſint parabolam, puncta quoque PP veram [c] producunt parabolam: igitur cùm dimidię linearum HI translatę in PO formalem conſtituant parabolam, & linea LL biſecans lineas HI, vera quoque oſtenſa ſit parabola, conſtat HI puncta ad virtualem eſſe parabolam.

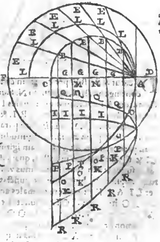
PRO-

PROPOSITIO CCXXX.

HAbeant circuli duo excentrici communem diametralem D A C F: & ex A (extremitate diametri minoris circuli) rectę ponantur A B occurrentes minori circulo in B, maiori in E: per B verò ducantur B I normales ad A C diametrum, cui occurrant in G. fiant autem A, B E lineis æquales G I, & A B rectæ transferantur in I K.

Dico I K parabolam eſſe virtualem.

Demonſtratio.



SEcentur I K bifariam in P P, & A B lineæ transferantur in G O:ᵃ erit igitur G O vera ac formalis parabola, deſcribatur inſuper circulus A L L contingens A B C in A, concentricus autem circulo D E F, occurratque A B lineis in L L, tum A, B L transferantur in I Q, K R, reliquis igitur L E æquales ſunt G Q; & A L lineis, æquales Q R: rectæ denique P Q, P R æquales ſunt. quia verò circuli A B B, A L L ſeſe contingunt in A, rectæ A B, proportionales ſunt A L; ſed A B lineis æquatur I K, & A L æquales ſunt R Q, igitur I K, R Q lineæ quoque ſunt proportionales; oſtenſum eſt autem ᵇ R Q parabolam eſſe virtualem, & P P formalem; igitur cùm I K translatæ in G O formalem producant, & P P linea, biſecans lineas I K, vera quoque ſit parabola, conſtat I K virtualem eſſe. Quod erat demonſtrandum.

a Per 100. libri de parabola.

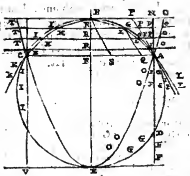
b 229. huius.

PROPOSITIO CCXXXI.

SVbtendat recta A C ſegmentum circuli A B C, erecta quoque contingente circulum in puncto A, ſcilicet A P, conueniente cum altera tangente B N, quæ æquidiſtat A C.

Oporteat magnitudinem exhibere ex ductu mutuo parabolarum quæ ęquetur corpori habenti baſim P G. ſuperficiem, & altitudinem A C, ſubtenſam ſegmenti A B C.

Conſtructio & demonſtratio.



DVcatur recta B E per centrum circuli cui ſit æquidiſtans A D, conueniens cum contingente B N, in puncto N. fiant autem rectis A G, æquales rectę G F M, rectis autem A I conſtituantur æquales I F H. diuiſis denique bifariam rectis M H, fiant ipſarum dimidijs æquales rectę R L & K R, tandem F M fiant æquales L O. Dico imprimis lineas O O, & L L, fore parabolas. Dico inſuper corpus ex ductu O L ſuperficiei in ſeipſam æquari magnitudini ſuper baſi P G conſtitutæ, habenti altitudinem parem lineæ A C. Primam igitur partem ſic demonſtro. Oſtenſum eſt lineas C I & C G, translatas in rectas, quæ à linea C V incipiunt exhibere parabolas virtuales. inſuper etiam demonſtrauimus virtuales illas parabolas, ſi medietas illarũ linearum applicetur hinc inde ex punctis R R, earum medietates in punctis ſcilicet L L & K K producere formales ac veras parabolas L K. oſtendimus prętcrea rectas A G, hoc eſt G, O L adiunctas rectis R L, formare etiam veram parabolam O O; ſunt igitur veræ parabolæ O O, & L K, lineæ; primam igitur partem ſufficienter demonſtrauimus. Reſtat itaque ſecunda, ſcilicet quod magnitodo habens baſim P G, & altitudinem A C; æqualis ſit quantitati quæ reſultat ex ductu plani O L in ſe ducti: hoc autem manifeſtum fiet hac ratione. Ducatur ex quouis puncto G, recta G Q æquidiſtans A P, contingenti, & ſimul ponatur recta A G, erit itaque, vt oſtendimus [a] quadratum A G æquale rectangulo Q A C, hoc eſt rectangulo ſub P G, & A C, poſita eſt autem ex conſtructione linea F M, hoc eſt O L æqualis lineę A G. Igitur ſi fiat C T parallela A P, O L quadratum ęquale eſt G P T, rectangulo, quamobrem per propoſitionem quadrageſimam quintam huius libri erit O L planum in ſe ductum producens molem illi parem quam exhibet baſis P G, ducta in altitudinem A C. Quod erat faciendum.

[a] Per demonſtrata prop. 93. de circ.

Corollarium.

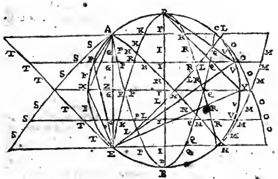
QVoniam demonſtratio communis eſt non ſolum ſegmento A B C, verùm etiam A E C, ſegmento. Hinc totam ſuperficiem P G, ductam in altitudinem A C, producere manifeſtum eſt quantitatem æqualem illi quę emergit ex plano L O ducto in ſe, partem ſcilicet L O, quæ ſegmento A B C conuenit, in ſe multiplicatam æquari magnitudini quæ habet baſim P G, interceptam parallelis, inter N B, A C, conſtitutis, partem ſimiliter L O, quæ ſegmento A D C conuenit in ſeipſam ductam, ęqualem eſſe moli productæ ex baſi P G, collocata inter parallelas A C, & E V, modò æqualis vtrique detur altitudo A C.

PRO-

PROPOSITIO CCXXXII.

Circulum ABC ſecet per centrum acta recta BD, cui ſtatuatur æquidiſtans AE. Oportet autem parti cylindri habenti baſim ſegmentum AFE, & altitudinem BD ſolidum aliud æquale exhibere, quod gignatur ex ductu parabolicarum partium in ſe inuicem.

Conſtructio & demonſtratio.

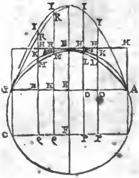


Rectis AF fiant æquales lineæ F, GN, in parallelis FV, ſecantibus AE, ad rectos angulos; rectis quoque EF ponantur æquales F, GL, lineæ; ſimiliter lineis AV, æquales ſtatuantur V, GO, vti etiam rectis EV, æquales V, GM, collocentur. Denique quoniam oſtendimus lineas NO & LM virtuales eſſe parabolas, reducantur hæ ad formales ac veras KR, PQ, & SS, TT, prout ſuperiùs explicatum eſt; oſtendendum igitur ſuperficiem TK, ductam in SP, quæ ambæ ſunt parabolicis lineis concluſæ, exhibere magnitudinem quantitati parem illi, quæ reſultat ex baſi ſegmenti AFE, & altitudine BD. quod ſic conſtabit. agatur XY, æquidiſtans AC, ſed per circuli centrum: iungantur quoque XA & XE, vti etiam AF & FE, triangulum AXE eam rationem habet ad AFE, triangulum, quam habet linea XZ ad FG, perpendicularem ad AE, ſed etiam triangulum AXE ad AFE, triangulum habet rationem compoſitam ex ratione AX ad AF, & ex ratione XE ad FE; igitur ratio XZ ad FG, compoſita eſt ex ratione AX ad AF, & ex ratione XE ad FE: ſed etiam rectangulum AXE ad rectangulum AFE, habet rationem compoſitam ex ratione AX ad AF, & ex ratione XE ad FE; igitur etiam ratio rectanguli AXE ad rectangulum AFE, eadem eſt cum ratione XZ ad FG: rectangulo autem AXE æquale eſt rectangulum XY, XZ; igitur ZXY, rectangulum ad rectangulum AFE, eam habet rationem quam linea XZ ad FG, lineam; ergo rectangulo FG, XY vel BD, æquale eſt rectangulo AFE, ſed lineæ AF æquales ſunt ex conſtructione rectis GN, & lineæ FE, æquales ſunt ex eodem capite rectis GL. Rectæ verò GN, & GL æquales ſunt quoque lineis SP, TK: igitur rectangulum SP, TK, æquale eſt rectangulo FG, BD. quare per propoſitionem quadrageſimam quintam huius, ſuperficies SP, quam oſtendimus parabolis intereeptam, ducta in planum TK, (quod idem eſt cum SP, ſi inuertatur) exhibebit corpus æquale magnitudini ſuper baſi ſegmenti AFE, conſtitutę habenti altitudinem æqualem diametro circuli BD. Quod erat exhibendum.

Corollarium.

EOdem prorſus diſcurſu patebit baſim G V, ductam in altitudinem diametri B D, æqualem magnitudinem ſubminiſtrare illi quantitati quæ exſurgit ex ductu plani S Q in ſuperficiem T R. ſunt enim S Q. & T R, lineæ æquales rectis A V, & E V, vt ex ipſa conſtructione, & præcedentium tenore ſatis manifeſtum eſt.

PROPOSITIO CCXXXIII.



CIrculum A B C, ſecet linea per centrum acta B D, quâ diuiſâ bifariam in E & F, erectiſq; ex ijs normaliter ad diametrum rectis E G, F C, deſcribatur L L parabola axem habens B D. Deinde fiant continuæ proportionales H N, K N, & M N.

Dico corpus reſultans ex plano K M, in altitudinem B E, æquari magnitudini ſub baſi K L; & altitudine B F.

Demonſtratio.

QVoniam continuant eandem rationem lineæ H N, K N, M N, ex conſtructione igitur quam habebit rationem H N ad K N, eandem habebit H K ad K M, rectangulum ergo H N, K M æquatur H K N rectangulo. demonſtratum eſt autem rectangulum H K O, hoc eſt H K N, æquale eſſe H P, K L rectangulo, propoſitione ſcilicet nonageſimaſecunda huius libri; igitur rectangulo H P, H L æquale eſt rectangulum H N, K M. Igitur per quadrageſimam quintam huius conſtat propoſitum.

Corollarium.

HInc manifeſtum eſt lineam M M, non eſſe parabolam, niſi fortè quis eam etiam virtualis nomenclatura dignari velit, eò quod ad formalem aut veram facile poſſit reduci. ſi enim fuerint I N, rectæ conſtitutæ duplæ rectarum K N, erit R R ellipſis, vt ex lib. de Ellipſi conſtat. poſitis autem tunc rectis I R, æqualibus K M, erit R R, vera parabola, cùm eandem rationem ſint habituræ rectæ I N, ad N R, lineas quam habent K O ad O L, rectas, quare patet R R, non minùs fore parabolam quàm ſit ex conſtructione facta L L parabola.

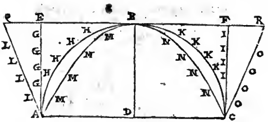
PROPOSITIO CCXXXIV.

CIrculum A B C cuius centrum D, contingant A E, C F eductæ è terminis diametri A C, occurrentes E F, contingenti quæ æquidiſtet diametro A C, & per puncta A B C deſcripta ſit parabola cuius apex B: & per puncta A C deſcribatur parabola habens verticem in concurſu lineæ B D cum circulo A B C, quæ producta occurrat contingenti E F in punctis Q & R.

Dico

Dico ſuperficiem L M, ductam in ſeipſam exhibere corpus æquale magnitudini quæ baſim habet G H, planum, & altitudinem G I.

Demonſtratio.



OStenſum eſt ſecunda propoſitione de hac materia parabolæ virtualis, rectas A K, K C diſpoſitas vt diuidantur bifariam à recta B D, producere parabolam. L L, O O. præcedenti quoque propoſitione demonſtratum eſt lineas A K, K C collocatas ex punctis G G, proferre parabolas virtuales, quæ reductæ ad veras ac formales exhibeant parabolas L O. & M N, habentes P D, axem, latus verò rectum æquale B D. Cùm igitur parabolæ A B C & L L, O O, latus rectum habeant æquale B D, neceſſarium eſt vt illæ ipſæ exiſtant de quibus præcedentibus propoſitionibus mentio facta eſt. quocirca L M, ſunt æquales A H, vel K C, ſed quadrato A H, æquale eſt H G I, rectangulum; igitur etiam quadratum L M, æquatur H G I rectangulo: quamobrem per propoſitionem quadrageſimam quintam huius lib. manifeſtum eſt magnitudinem quę fit ex ductu ſuperficiei L M, in ſeipſam, æquari corpori ſuper baſi G H, conſtituto, & altitudinem habenti G I, lineam rectam. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CCXXXV.

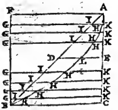
POnantur eadem quæ in ſuperiore ſcemate ſunt poſita.

Dico baſim G K, ductam in altitudinem G L, dare molem illi magnitudini parem, quę emerget ex ductu plani L N, in ſeipſum.

Demonſtratio.

SVnt etenim oſtenſæ lineæ A K, æquales rectis K, L N, ſed quadratum A K æquatur K G I rectangulo, igitur quoque quadratum L N, eidem K G I, rectangulo erit æquale. Quocirca per propoſitionem quadrageſimam quintam huius, patet huius propoſitionis veritas.

Demonſtratio.



PErfecto rectangulo AFB, factiſque tertiis lineis quæ ſint in continuâ ratione, hoc eſt lineis GK, IK, HK, erit HH [a] parabola: eritque ADE in ſe ductum, ad ABC ductum in ſe, vt eſt ſuperficies AEL ad ſuperficiem ACBLA, cùm ſuperficies ADE [b] in ſe ducta æqualis ſit AHLE ducto in altitudinem AF, item ADBC in ſe, æquale ſit ſuperficiei ALBC ductæ in altitudinem AE, altitudo autem ſit communis. ſed ſuperficies AEL ad ACBL [c] triplicatam habet rationem AE ad AC; igitur & ADE in ſe, ad ABC in ſe ductum, triplicatam habet rationem lineæ AE ad AC. Quod erat demonſtrandum.

a Per 235. parab.

b Per 45. huius.

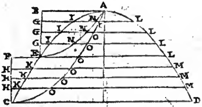
c Colligitur ex corr. 243. & 242. parab.

PROPOSITIO CCXXXVIII.

SIt linea AB contingens parabolam CAD in vertice A, ponanturq́; axi æquidiſtantes BE, FC inter ſe æquales.

Dico ſolidum emergens ex ductu GI, in GL, æquari ſolido reſultanti ex mutuo ductu ſuperficierum HK, KM.

Demonſtratio.



DEmonſtratum [d] eſt medias inter GI, GL ſcilicet GN eſſe ad eandem parabolam quæ eſt ſimilis CAD parabolę; item lineas quæ terminantur in parabolâ COA, quæ eſt ſimilis CAD, medias eſſe inter HK & HM; igitur cùm GI æquales ſint HO, illæ nempè quæ æqualiter ab E, & C, diſtant, quadrata quoque GI, HO, & conſequenter rectangula etiam IGL æqualia ſunt rectangulis KHM; ac propterea [e] corpora etiam inter ſe æqualia ſunt quæ oriuntur ex ductu ſuperficierum GI in GL, & HK in HM. Quod erat demonſtrandum.

d Per 167. de parab.

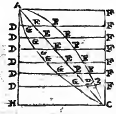
e Per 45. huius.

PROPOSITIO CCXXXIX.

SIt parabola ABC, cuius axis AD, & recta AC occurrens parabolæ in C.

Dico BD ductum in ſe, proferre ſolidum quod ad corpus reſultans ex ductu ED plani in ſeipſum, habeat rationem quam tria ad duo.

Demon-



Demonſtratio.

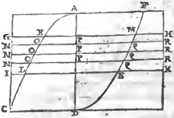
DVcta FC quæ æquidiſtet AD, erunt tres continuæ [a] FD, BD, ED. ſimiliter ſi fiant tres continuæ FD, ED, GD, [b] erit GG parabola. igitur [c] corpus emergens ex ſuperficie ED in altitudinem FD æquatur illi quod fit ex ductu ſuperficiei BD in ſeipſam. pari pacto corpus quod eruitur ex baſi GD in altitudinem FD, æquale eſt pyramidi quę exſurgit ex ED triangulo in ſe ducto. Igitur vt eſt ſuperficies ED ad ſuperficiem GD, ita eſt corpus ortum ex ductu BD plani in ſe, ad ſolidum quod oritur ex ductu ED in ſe: ſed ſuperficies ED eſt ad ſuperficiem GD, ſiue BE, vt tria ad duo, cùm [d] BF duplum ſit BE, & conſequenter ED triplum eiuſdem; igitur etiam BD in ſe ad ED in ſe ductum, rationem eandem obtinet quam tria ad duo. Quod erat demonſtrandum.

a 41. parab.
b 167. parab.
c Per 45. huius.
d Ex demonſt. 141. parab.

PROPOSITIO CCXL.

PArabolę ABC ſit axis AD, apex autem A punctum, cui ſubalternè collocetur parabola DEF ad axem DA, & poſitis duabus æquidiſtantibus ordinatim ad axem ſcilicet GH, IK, fiant rectangula OPN, æqualia rectangulis QPR; ſit autem GNI, linea recta, vti & HRK.

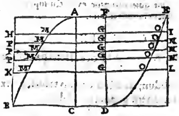
Dico corpus ex ductu ſuperficierum NO, PQ, æquale eſſe corpori quod generatur ex planis inuicem ductis OP, QR.



Demonſtratio.

QVoniam ductum planum PQ in altitudinem NP, æquatur ſolidis genitis ex ductu NO in PQ, & ex OP plano in planum PQ, & quandoquidem ſolidum habens baſim OP, & altitudinem PR, æquale eſt duabus quãtitatibus quæ fiunt ex ductu plani OP in PQ, & plani OP in QR planum, eſt autem ſolidum ortum ex ductu OP in PQ, commune vtrique; igitur ſi hoc ipſum OP in PQ, ab vtroque auferatur, remanebunt æqualia corpora, ſcilicet corpus ex ductu NO, in PQ æquale ſolido quod exhibet ductus plani OP, in QR. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CCXLI.



POnantur iterũ parabolę ſubalternè ABC, DEF habentes axes parallelos AC, DF: & ducta axibus parallela BK, fiat corpus habens baſim MG, & altitudinem GN æquale ſolido quod fit ſub baſi GO & altitudine GP.

Dico ſolidum factum ex ductu plani MG in ON, æquari corpori exhibito, per ductum GO in PM planũ.

Demon-

Demonſtratio.

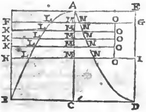
EST denuo commune corpus ex ſuperficie MG, in GO. Igitur reſidua communi dempto ſunt inter ſe æqualia hoc eſt PM in GQ, æquale MG, in ON, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXLII.

PArabolæ ABC, DAE ſubalternæ ſtatuantur habentes AC, DE axes, quos ſecent ordinatim poſitæ FG, HI; ſit autem corpus ex baſi LM in altitudinem MO, æquale ſolido quod baſim habet MN, & altitudinem KM.

Dico corpus emergens ex ductu planorum LM, NO, æquari ſolido quod fit ex multiplicatione ſuperficierum KL & MN.

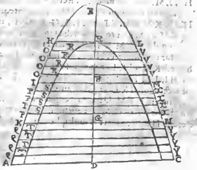
Demonſtratio.



QVoniam corpus ex MN, in altitudinem KM, æquatur ſolidis duobus, vni quod generatur ex ductu MN in ML, & alteri quod reſultat ex ductu MN, & LK. Deinde cùm ſolidum baſeos LM, & altitudinis MO, æquetur duabus quantitatibus quarum vna eſt orta ex ductu ſuperficierum LM, MN, & altera producta ex ductu planorum LM, NO. Igitur ſi commune tollatur corpus vtrimque ſcilicet quod fit ex ductu LM in MN, reſidua quę remanent inter ſe erunt æqualia, hoc eſt LM in MO, æquabitur ſolido, quod oritur ex ductu KL in MN. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CCXLIII.

POnantur duæ parabolæ parallelę ABC, & TEZ, diuiſus ſit communis axis in partes æquales in punctis EFGD, &c. & ductæ ſint ordinatim ad axem HE, IF, KG, AD.



Dico corpora quæ generantur ex ductu OR in RV, PS in SX, & QT in TY, inter ſeſe eſſe æqualia.

Demonſtratio.

LIbro de parabola demonſtratum inuenies [a] quadratum contingentis HE, æquale eſſe cuius rectangulo quod fit ſub partibus cuiuſcunque lineæ quæ æquidiſtet HE, videlicet ORV, PSX, vel QTY. quare rectangula ORV, æqualia ſunt rectangulis PSX, vel QTY. ergo cùm altitudines ponantur

a Prop. 351. parab.

Rrrrr æquales

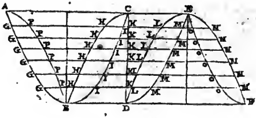
æquales E F, F G, G D patet per propoſitionem quadrageſimam quintam huius libri corpora O R V, P S X, & Q T Y, eſſe inter ſe æqualia. quod oportuit demonſtrare.

PROPOSITIO CCXLIV.

Parabolæ A B C, D E F habeant æquale latus rectum ad axem conſtitutum, ſintque ſubalternè poſitæ, quas ſecent A E, B F ordinatim ad axes conſtitutæ; ſit autem C D linea æqualiter ab axibus diſtans; ad quam collocentur ſitu ſubalterno H K & K M parabolæ.

Dico ſolidum ex ductu plani G H in planum M N emergens, duplum eſſe quantitatis quæ producitur ex ſuperficierum H K, K M mutua multiplicatione reſultantis; ſiue dico G H ductum in ſe ſubalternè producere duplum eius quod producit H K in K M.

Demonſtratio.



a Prop. 167. parab.
b Prop. 9. de progr.

Dvctis G N quæ æquidiſtent A E, fiant rectis H I, æquales G P, & ſimiliter lineis L M, fiant æquales O N, libro de parabola [a] oſtenſum eſt K I, K H, K G, & K L, K M, K N eſſe proportionales lineas. Inſuper oſtenſum [b] eſt, ſi rectis G P, fiant æquales H I, & rectis N O, fiant æquales L M, deouo lineas K I, I H, H P; & K L, L M, M O eſſe proportionales, ac proinde rectangula I K L, H I, L M, & P H, M O proportionalia eſſe: eſt autem rectangulum P H, M O quadruplum rectanguli I K L, cum lineæ P H, duplæ ſint K L, & hoc M O, duplæ linearum I K; igitur rectangulum H I, L M, quod eſt medium inter I K L & P H, M O, ſcilicet inter vnum & quatuor, duplum eſt rectanguli I K L. Quoniam autem proportionales ſunt lineæ G K, H K, I K, & K N, K M, K L erit vt K G ad G H, ita K H ad H I, & vt K N ad N M, ita K M ad M L: proportionalia ſunt igitur rectangula G H, M N & H I, L M cum rectangulis H K M & I K L: nam ratio G H, M N ad rectangulum H I, L M componitur ex ratione G H ad H I, hoc eſt H K ad I K, & ex ratione M N ad L M, hoc eſt K M ad K L; ac proinde vt rectangulum G H M N ad rectangulum H K M, ita H I, L M rectangulum ad rectangulum I K L: ſed rectangulum H I L M duplum eſt rectanguli I K L, vt paulò antè oſtendimus; ergo etiam rectangulum G H M N duplum eſt H K M. Quapropter per quadrageſimam quintam huius, ſolidum ex ductu planorum G H, M N exortum, duplum eſt quantitatis quę fit ex mutua ſuperficierum H K, K M inter ſe multiplicatione. Quod demonſtrandum fuit.

PRO-

PROPOSITIO CCXLV.

Iſdem poſitis:

Dico rectangula M O, P H, & M N G H cum N K G, rectangulis eſſe in continua ratione.

Demonſtratio.

OStenſum eſt continuare eandem rationem lineas K L, L M, M O. Igitur ſi addatur L M media tertiæ M O, orietur K N, quæ cum M O, O L [a] exhibebit tres proportionales. ſimiliter ob eandem cauſam continuabunt eandem rationem P H, H I, G K; ergo rectangula P H, M O, & H G, M N cum rectangulis G K N, erunt in continua analogia. Quod erat demonſtrandum. [a] Per 8. lib. de prog.

Corollarium.

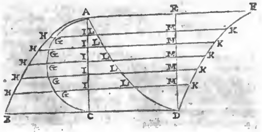
HInc colligi poterit M N in G H, planum multiplicatum ſolidum exhibere quod ſit duplum corporis orti ex ductu ſuperficierum mutuo M K, K H: nam I K L, H K M & G K N, ſunt proportionalia. Deinde M O, P H & M N, G H cum N K G ſunt proportionalia; igitur I K L ad P H in M O, habet duplicatam rationem eius quam habet H K M ad G H, ductum in M N, cùm primus terminus ſit communis in duabus illis ſeriebus trium continuarum. ſed ratio I K L ad P H, ducti in M O, eſt vnius ad quatuor, vt conſtat ex diſcurſu præcedenti demonſtratione facto; igitur ratio H K M ad H G, in M N, eſt ratio vnius ad duo, cùm ratio quadrupla ſit duplæ rationis duplicata.

PROPOSITIO CCXLVI.

SInt parabolæ vt priùs conſtitutæ ſubalternè A B C, A D E, ſintq; A C, C B æquales inter ſe, vti & A E, E D ac proinde G E, quadratum; & A C D, ſubalternè adijciatur in E F D. Deinde fiat ſemicirculus A G C.

Dico corpus exortum ex ductu H L in L K, æquale eſſe ſemicylindro ſuper baſi G I & altitudine A F.

Demonſtratio.

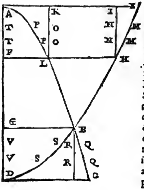


PRæcedenti propoſitione demonſtratum eſt ſolidum emergens ex ductu H L in L K, duplum eſſe ſolidi quod gignitur ex ductu H I in L M, [b] ſed ſolidum ex ductu H I in L M, æquale eſt ſemicylindro ſuper baſi G I, & altitudine I M. Igitur cùm H K ſit æqualis A F, quæ dupla eſt A E, vel I M, manifeſtum eſt corpus ex H L in L K, æquale eſſe ſemicylindro G I, baſeos, & altitudinis A F. Quod erat demonſtrandum. [b] Per 160. huius.

PROPOSITIO CCXLVII.

SVbalternè conſtituantur parabolæ A B C,D B E ad axem communem A D, interſecantes ſe in puncto quodam B, à quo demittatur B R æquidiſtans axi A D, facta autem B R,æquali F A,ductaq; ordinatim F H, ponantur H I,L K quæ æquidiſtent A D.

Dico ſolidum productum ex ductu ſuperficierum E N,O P æquari corpori quod reſultat ex ductu planorum Q R,R S.



Demonſtratio.

QVoniam æquales ſunt D G & A F, igitur vt A G ad A V, ita eſt D F ad D T, igitur vt linea B G ad V Q, ita eſt F H ad T M, & quia vt A F ad A T, ita eſt D G ad D V; igitur vt eſt F L ad T P, ita eſt G B ad V S, hoc eſt vt O T ad P T, ita eſt R V ad S V. ergo vt O P ad P T, ita eſt R S ad S V. quare cùm ſit H F ad T M, vt B G ad Q V, erit quoque N T ad M T, vt eſt R V ad Q V, & conſequenter vt M N ad N T, ita Q R ad R V. & quia eſt M T ad S T, ita quoque Q V ad P T. ergo vt eſt M N ad Q R, ita eſt R S ad O P; igitur rectangula M N, O P, & Q R S æqualia ſunt. proinde per 45. huius ſolidum ex ductu M N in O P, æquatur corpori ex ductu Q R, in planum R S, producto. Quod erat demonſtrandum.

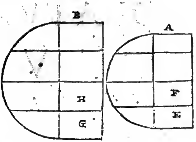
QVA-

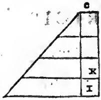
QVADRATVRÆ CIRCVLI
LIBER OCTAVVS
DE
PROPORTIONALITATIBVS GEOMETRICIS.

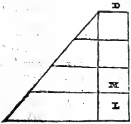
Neceſsitas & vtilitas proportionalitatis Geometricæ.

MVltam in hodiernam diem, & imperfectam eſſe Geometriæ ſcientiam multis argumentis oſtendi poſſet, atque adeò cultores exquirere qui notitiam rerum ſuo labore excludant, quas in ſinu ſuo ampliſſimæ vaſtitatis & abyſſi reconditas tenet: inter ceteras verò partes quæ necdum prodierunt adnumerari meritò poteſt pars ea omnis quæ rationum proportiones continet, & vſum explicat quo Geometricis contemplationibus inſeruire queat. Antiqui Geometriæ cultores proportionum eam particulam proſecuti ſunt, quæ rationes ſimiles in quatuor maximè terminis, in duabus ſcilicet rationibus conſiſtentes, conſiderat; proportionem ſcilicet omnem tamquam minùs vtilem reſpuentes, quæ rationes complecteretur quæ ſimilitudine rationis non conuenirent. Vnde mirum videri non debet ſi ad ſoluendas extraordinarias difficultates non ſatis præſidij adinuenerint in elementis communi Geometriæ ſtudio adaptatis. Hæc conſideratio diu multumque me ſuſpenſum tenuit, & de requirendis nouis adiumentis cogitationes iniecit. Mirabar primò tanta obſtinatione inter ſe diſſidere eas Geometriæ partes quæ rectilineis terminantur, & quæ curuis vel inflexis clauduntur, vt imperuium communicationis inter ſe commercium reddiderint tot tamque præſtantibus ingeniis quæ circa tales materias tot ſeculis verſata ſunt ſummo labore, nec minore induſtria, ſed quæ optato ſucceſſu fere caruerit. huius rei varias cauſas excutiens vix vllam reperire potui quæ vel leue momentum haberet. Tandem incidi in quandam ſpeculationem qua duorum quorundam incuruorum partes conſcrebam cum partibus duorum rectilineorum, & animaduerti rationibus conuenire partes vnius curui cum partibus alterius curui; ſimiliter partes vnius rectilinei conuenire cum partibus alterius rectilinei, & quidem rationes communes eſſe curuilineorum inter ſe & rectilineorum inter ſe. ſed quia diſcurſus ex tot terminis copulatis formandi exemplum neque in Geometricis, neque in vlla alia ſcientia exſtabat; magno ſtudio & conamine intendere debui vt ita mihi ea in re ſatisfacerem, vt à ceteris qui mea lecturi eſſent intelligi poſſent. vnde librum præſentem conſcribere neceſ-

 ſarium







ſarium fuit, vt idipſum præſtarem. conabor rudem huius rei conceptum his ſcematibus exprimere. Sint duo curua A *&* B, *comparanda cum duobus rectilineis* C *&* D, *ſintque partes curuorum* E, F *&* G H *proportionales partibus rectilineorum* I, K; L, M, *hac lege vt ratio* F *ad* E, *eadem ſit cum ratione* K *ad* I: *ratio ſimiliter* H *ad* G, *eadem cum ratione* M *ad* L, *ſic tamen vt ratio* F *ad* E, *non ſit ſimilis rationi* H *ad* G, *& conſequenter ratio* K *ad* I *ſit diſſimilis rationi* M *ad* L, *atque talis ratio comparandi reperiatur in omni ſubdiuiſione partium curuarum quantitatum cum partibus ſubdiuiſis quantitatum rectilinearum: hinc liquidò apparet neceſſarium fuiſſe rationem excogitare, qua formari poſſet diſcurſus qui loco quatuor terminorum proportionalium vteretur octo terminis, ita vt legitimè inferri poſſet, ſicut ſe habet ratio* F *ad* E, *ad rationem* H *ad* G, *ita ſe habet ratio* K *ad* I, *ad rationem* M *ad* L. *atque hac ratio diſcurſus complectitur diuerſiſſimas rationum combinationes, modò diuerſitas aſſumpta in antecedentibus, aſſignetur etiam in conſequentibus: vnde diuerſiſſimæ etiam quantitates inter ſe comparatæ, oſtenduntur certam obtinere rationem, cum quibuſuis duabus quantitatibus, modò leges ſeruentur ad talem diſcurſum concinnandum neceſſariæ. Quemadmodum ex huius lectione libri ſtudioſus lector abundè intelliget.*

DEFI-

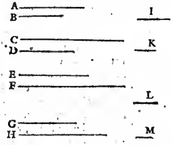
DEFINITIO PROPORTIONALITATIS PRIMA.

Proportionalitatem voco proportionum rationem.

EXPLICATIO.

EVclides proportionem definiens, ait, eam conſiſtere in duabus rationibus ſimilibus, atque adeò neceſſariò quatuor ſaltem virtuales terminos eam requirere.

Proportionalitas igitur cùm ſit ratio proportionum, duas minimùm complectitur proportiones, quocirca octo terminos poſtulat: nam ratio inter duas conſiſtit quantitates, proportio inter duas rationes verſatur, quare quatuor membra requirit. Proportionalitas igitur duas proportiones complexa, octo membra ſeu terminos exigit: quatuor ſcilicet rationes, quarum ſingulæ inter duos terminos conſtitutæ ſunt; vel duas proportiones, quarum ſingulæ quatuor terminos ſaltem virtuales complectuntur. Exemplo faciliùs res innoteſcet. Sint rationes quatuor A B, C D, E F, G H, duo termini A B, rationem conſtituunt: ſed A B, & C D ſimiles ſi fuerint rationes, proportionẽ conſtituent: ita vt dici queat vt A ad B, ita C ad D, vel vt E ad F, ita G ad H. verũ quatuor rationes A B, C D, E F, G H, proportionalitatem conſtituunt; quę ſic efferri debet: quemadmodum eſt ratio A B, ad C D rationem, ſic eſt ratio E F ad rationem G H; non tamen hoc ita eſt intelligendum vt caſu quo diſſimiles ſint rationes A B, C D, & E F, G H proportionalitas non exiſtat, plurimæ enim rationes, inter ſe diſſimiles, ſunt proportionales, vt patebit ex 3. parte huius libri, & quibuſcumque quatuor rationibus expoſitis, formari poteſt proportionalitas. Poſito enim I, denominatore rationis A B; & rationis C D, ipſo K; & reliquarum E F, G H, ipſis L & M: poterit dici proportio rationum A B, C D ad proportionem rationum E F, G H, eſt vt ratio I K ad rationem L M. quæ conſideratio non parui ponderis exiſtimanda eſt, ſcopus enim in quem collimat totus huius libri decurſus, in eo maximè conſiſtit, vt rationes diſſimiles, ad vſum Geometricum reuocari poſſint: nam in Geometricis proportionibus ab antiquis auctoribus, ſimilitudo rationum ſola fuit adhibita; ita vt argumentum à proportione nullum poſſet proferri, quod ſimiles rationes non contineret: iuxta definitionem ipſam proportionis, à veteribus nobis relictam;



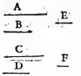
quæ

quæ rationum ſimilitudo appellatur. ex quo ſatis apparet, Geometriam huc vſque, quemadmodum circa varias materias, ita quoque in ea quæ proportiones conſiderat, mutilam remanſiſſe; tanquam ſi rationum diſſimilium proportio, ad Geometriam non ſpectaret. Conabimur itaque hoc libro diſſimillimas etiam rationum proportiones ad Geometriam reuocare: qui vſus maximè ad ſolidæ magnitudinis conſiderationes conducit; vtinam Geometriæ ſtudioſi vaſtitatem Oceani Geometrici perſpectam haberent, non hærerent in elementis ſuſque deque inuertendis, &, vt dici ſolet, de charta in papyrum transferendis.

DEFINITIO II.

Rationum denominatores voco, quantitates quæ mutua habitudine ſua exponunt qualis ipſas inter rationes proportio intercedat.

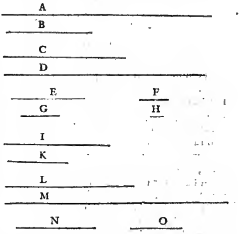
EXPLICATIO.



Datæ ſint rationes A ad B, C ad D, & ſint totidem lineæ, E, & F, quarum ratio exprimat proportionem rationis A B, ad rationem C D; hoc eſt, ſit quemadmodum linea E ad lineam F, ita ratio A B ad rationem C D: has lineas, E nimirum & F, datarum rationum denominatores appellabimus.

Porrò contemplationem eam omnemq; circa rationum proportiones denominatoreſq; verſatur, ad veram pertinere Geometriam, de qua demonſtrationes illa ſuas non ſecus ac de ſimplicibus quantitatibus, formare poſſit, extra controuerſiam eſſe debet: quæ res vt clarius intelligatur ſciendum eſt, non ſolùm lineas, ſuperficies, & corpora, ad Geometriam ſpectare; ſed omne id cui conuenit eadem ratio propter quam vel lineæ, vel ſuperficies, vel corpora à Geometra tractari poſſint: lineæ enim, ſuperficies, & ſolida, non minùs ad phyſicam contemplationem, imò Metaphyſicam pertinent, ſecundùm conſiderationes ſingulis proprias, quàm ad Geometriam; quæ in lineis, ſuperficiebus & ſolidis nihil aliud contemplatur, quàm diductionem quantitatis, ſecundùm quã, lineæ inter ſe comparantur, aut ſuperficies, aut ſolida, quatenus vna maior vel minor altera, aut alteri eſt æqualis, aut vna per alteram multiplicari, vel inuicem vna alteri addi, aut ab alia demi poteſt. quæ omnia circa æqualitatem aut inæqualitatem verſantur. vnde omnes res phyſicæ, prout huic conſiderationi ſunt ſubiectę, ad Geometriam non minùs ſpectant, quàm tres primariæ ſpecies quantitatis: nam temporis duratio, motus affectiones, ponderum momenta, & ſexcenta alia, ſecundùm eaſdem conſiderationes, Geometricis Theorematibus ſubiecta ſunt. Quare cùm rationes quantitatum inter ſe partim ſint æquales, partim inæquales, ac proinde vna alteri æqualis, alia verò maior, aut minor altera; cumq; ratio minor à maiore tolli queat, & ratio per rationem multiplicari, & ratio rationi adiungi, &c. neceſſariò concluditur etiam rationum notitiam, ad Geome-

Geometriæ ſcientiam planè ſpectare. Difficultas tamen quam Geometræ hucuſque inuenerunt in aſſignandis denominatoribus rationum, ita eos terruit, vt neminem huc vſque reperire potuerim, qui huius mentionem faceret; nonnullos, eoſque paucos reperies, qui tractarint de denominatoribus rationum rationalium, quæ exiſtunt inter terminos, qui Arithmeticè exprimi poſſunt, qui tamen vlteriùs materiam hanc proſequi abſtinuerunt: neque ſanè immeritò. quis enim non hæreat, ſi ab eo poſtuletur, denominatorē rationis cuiuſuis, ſcilicet quæ inter datas quantitates A & B conſiſtit, exhiberi? nam iure merito reſponſi loco ſubiunget, rationis denominatorem non cadere ſub cognitionem, niſi ſecunda ratio, verbi gratiâ C ad D, adferatur, cum qua prima A ad B, conferri queat, vt verè inquiri poſſit, qualis ratio exſurgat inter denominatores rationum AB & CD, ac proinde & inter rationes ipſas datas AB & CD, quo facto apparebit non rectè poſtulatum fuiſſe, exhiberi denominatorem rationis A ad B. Deinde ſi ratio A ad B, ad rationem C ad D, perhibeatur eſſe vt E ad F, ita vt denominator rationis A ad B, ſit E, & denominator rationis C ad D, ſit F, ſi quis producat alijs terminis rationem G ad H, ſimilem rationi E ad F, tunc denominatores rationum A ad B, & C ad D, erunt G, & H, non minùs quàm E & F. quare poſtulanti ſibi exhiberi denominatorem rationis AB, non minùs ſatisfiet, proferendo quantitatem G, quàm E. Vnde meritò talis quæſtio quemuis Geometram percellere nata eſt. Conabimur itaque præſenti libro aliquid lucis adferre, pro tenuitate noſtra, huic materiæ; in qua ſi quid fortaſſe Lector adhuc deſideret, dignabitur meminiſſe nullas ſcientias à primo inuentore perfectè traditas fuiſſe.



Ne tamen difficultates iam propoſitas inſolutas prætergam, reſpondeo verum eſſe, ſi ratio, quę in numeris exprimi nequeat, ſolitariè ſumatur, denominatorem eius exhiberi Geometricè non poſſe. Quod ſi binæ vel plures fuerint datæ rationes, aſſignari poterunt iuxta ſenſum definitionis noſtræ ſingularum denominatores, qui nimirum demonſtrent quales inter rationes ipſas proportio intercedat. Atque hoc non tantùm à duabus certis lineis præſtabitur, ſed à quibuſcunque alijs, quę prioribus propor-

tionales exiſtunt. Nihil igitur eſt cur Geometra percellatur, quod eiuſdem rationis cùm altera ratione comparatæ, plures denominatores exhibeantur, ſi iuxta definitionem à nobis poſitam, probè intelligat denominatorum officium non aliud eſſe, quàm oſtendere qualis inter rationes datas proportio intercedat: id quod non magis per certas lineas E & F, quàm per quaſcunque alias eandem cum ipſis E, & F, rationem obtinentibus efficietur.

PRINCIPIVM PRIMVM.

Finiti ad finitum in eadem ſpecie quantitatis eſt proportio.

EXPLICATIO.

NOnnulli reperiuntur, qui poſtquam quadraturæ circuli multùm, ſed vano ſucceſſu inſudarunt, Geometras reliquos à problematis illius inueſtigatione terrere cupientes, ne fortè illis inferiores haberentur, ſolutionem planè impoſſibilem aſſeruerunt, hoc ſolo fundamēto innixi, quòd curui & recti proportio nulla eſſet. In gratiam illorum, quamuis principium à nobis poſitum explanatione non egeat, paucula nihilominùs hoc loco præmittenda cenſui; neque enim hæc ipſa aſſertio vanitate carere videtur, quippe ſi theorematis nomine profertur, immeritò poſtulant ei fides vt habeatur, cùm demonſtrationis Geometricæ nucleo non excludatur. Quod ſi verò principij indemonſtrabilis ſerie contineri poſtulent, potiori iure noſtrum quod poſuimus principium, id ſibi vendicat. quis enim neget parabolam curuam figuram? imò tali inflexione inclinatam quæ in ſuis partibus longè difficiliorem contineat curui rationem quàm circulares, quæ ita inter ſe ſunt vniformes vt qui vnā norit, omnes penè reliquas perſpectas habeat, atque inter ſe comparare queat, non minus ac Geometræ linearum rectarum inter ſe rationes contemplantur: parabolæ autem ambitus ſeu perimeter in ſuis partibus vſque adeò multiformem complectitur varietatem, vt nullum hactenùs authorem repererim qui de comparatione illarum partium inter ſe auſus fuerit vel mentionem facere. Nihilominùs nemo inficias ibit rectè ac Geometrico diſcurſu ab Archimede parabolæ cum quadrato aſſignatam eſſe rationem; vana igitur prorſus eſt hæc aſſertio, quocunque tandem modo intelligatur. quia verò tantùm ſunt tres ſpecies quantitatis, linea, ſuperficies & corpus, hinc principium noſtrum de tribus illis hoc ſenſu volumus intelligi, vt omnes lineæ ſiue rectæ fuerint, ſiue inflexæ; ſimiliter & ſuperficies ſeu curuis clauſæ fuerint terminis, ſiue rectis; quemadmodum & corpora ſeu planis ſuperficiebus terminentur, ſeu non planis, inter ſe comparari queant ſecundùm rationes quæ quantitatibus conueniant.

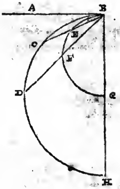
Quod ſi quis diſputationem in medium proferat qua nonnulli non infimæ ſortis Geometræ diſceptarunt de angulo contingentiæ, an ille ſcilicet ſecundùm quantitatem cum angulis rectilineis ſecundùm aliquam proportionem cōferri poſſit, reſponſi loco repono quod anguli ſiue rectilinei

lineæ fuerint,ſiue curui,ſiue mixti, non alia ratione ad quantitatem ſpectent quàm ſecundùm ſpatium quod continent,ſiue illud planum fuerit, ſiue ſolidum, ſecundùm quod inter ſe non minùs comparari poſſunt quā alia quæuis ſuperficies cum ſuperficie, aut corpus cum quauis ſolida magnitudine: angulus enim in recto (vt cum Philoſophis loquar) non eſt quantitas,ſed quantitatis in obliquo;ſiue aliquid eſt ad quantitatem pertinens. vnde ſecundùm naturam ſuam excludi debet à veris ſpeciebus quantitatis. Quod ſi enim inter veras quantitatis ſpecies angulos admiſerimus, incidemus in labyrinthos, quibus Geometriæ principia ſe deſtruant neceſſe eſt. quod vt manifeſtum fiat,ſequentis propoſitionis demonſtrationem conſiderandam pono.

THEOREMA.

Contingat AB, duos circulos ſe contingentes in B, exhibentes angulos contingentiæ ABCD, ABEF.
Dico hos angulos eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.



Illæ enim ſunt dicendæ æquales quantitates, à quibus in infinitum partes demi poſſunt inter ſe æquales:ſed hoc fieri poteſt in angulis dictis. quod ſic oſtēdo. Diuidatur ſemicirculi perimeter BDH bifariam in D, & ducta BD occurrat circulo BFG, in F:igitur angulus DBH æqualis eſt angulo FBG. eadem operatio fiat de arcu BCD: biſecetur ſcilicet in C,& ponatur recta BC, itaque etiam angulus CBD, æqualis eſt angulo EBF:ſed hoc in infinitum fieri poteſt:igitur quantitas anguli HBCD ſemiperimetri cum diametro æqualis eſt quantitati anguli GBEF ſemiperimetri BFG, cum diametro BG. Quare etiam reſidui anguli contingentiæ qui complent rectum angulum ſunt inter ſe æquales.

Hinc conſequitur doctrina quæ planè deſtruit Geometriæ principia,quod ſcilicet totum ſit parti ſuæ æquale.nam angulus GBEF pars eſt anguli HBCD. Pluribus rem hanc proſequi abſtineo, quod inſtituto noſtro parum conueniat.

Priuſquam nihilominùs concludam,memineris velim non fruſtra additam in principio poſito particulam,*in eadem ſpecie quantitatis*; lineæ etenim cum ſuperficiebus aut ſolidis nec comparantur,nec comparari poſſunt à Geometris vti nec ſuperficies cum vlla ſolida magnitudine.

PRINCIPIVM SECVNDVM.

Datis tribus vel pluribus quantitatibus, ratio primæ ad vltimam componitur ex rationibus mediarum, ſiue prima quantitas ad vltimam habet rationem quæ oritur ex denominatoribus mediarum rationum inter ſe multiplicatis.

EXPLICATIO.

QVod principium etſi veriſſimum ſit, & à magnis Geometris, non ſemel vſurpatum, non tamen vſque adeò omnibus arridet vt eius demonſtrationem non requirant. ego verò cenſeo cum omnibus Geometris tamdiu inter principia eſſe cenſendum, donec alicui ratio occurrat hoc ipſum Geometrica demonſtratione inter Theoremata reducendi. nec mirum cuipiam videri debet principium hoc communi gregarioque Geometrarum vulgo non ita cognitum, vt requirere videtur principiotum natura; pauci etenim ſunt ex ijs qui rationum compoſitiones, diuiſiones, multiplicationeſque conſiderant, eâ ſcilicet Geometriæ patte contenti quæ elementis vulgaribus continetur.

Sed quoniam toto præſenti libro de rationibus ſermo habendus eſt, operæpretium me facturum exiſtimaui ſi aliquanto diffuſiùs atque vberiùs de rationum compoſitione diſputarem.

Rationum compoſitio ab Euclide hunc in modum definitur: *Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem.*

Cæterùm duplex modus aſſignari poteſt componendi rationes, qui vterque vſitatus eſt in Geometricis. Primus, quo linea trium exempli gr. palmorum dicitur compoſita ex tribus palmis. Secundus, quo quadratum quod aream nouem palmorum complectitur perhibetur compoſitum ex multiplicatione longitudinis trium palmorum in tres palmos latitudinis: atqui hi duo modi ita inter ſe differunt quemadmodum diſcrepant inter ſe additio, & multiplicatio. Vterq; horũ modorũ etiam rationibus conuenit: nam ſi quis tres rationes in medium adducat, duplã nimirũ, triplã & quadruplã, & aliam requirat quæ his tribus æqualis exiſtat ortam ex ſola additione inter ſe datarũ rationum, illi ſatisfiet, ſi trium harum rationum denominatores in vnam ſummã addantur; quo pacto ratio noncupla emerget. Quòd ſi autem rationem requirat reſultantem ex multiplicatione harum rationum, inueniet longè diuerſam ab ea quæ per additionem producitur. denominator enim primæ rationis harum trium qui eſt duo, ductus in denominatorem ſecundæ, ſcilicet tria, producet ſextuplam rationem; cuius denuo denominator ſex ductus in denominatorem quatuor tertiæ rationis harum trium exhibebit rationem vigeſies quadruplam, quæ longè alia eſt ab ea quæ per ſolam additionem earundem trium rationum eſt producta. Verùm definitio præſens quam ex elemen-

tis

Digitized by Google

tis Euclidis attulimus, de additione intelligenda non eſt, ſed de ſola multiplicatione. quod manifeſtè patet ex ipſis verbis quibus auctor vtitur, aſſerens quantitates rationum inter ſe debere multiplicari, & rationem ex hac multiplicatione reſultantem appellat compoſitam ex rationibus ijs ſcilicet ſecundùm quas multiplicatio facta eſt.

Rationes autem quæ aſſumuntur, vt inter ſe multiplicatæ aliquam generent, vel ſimiles inter ſe ſunt, ac proinde eædem (nam ratio ſex ad duo tripla eſt, non minùs quàm ratio nouem ad tria, vnde conſequenter ſimiles & eædem dicuntur:) vel ſunt diuerſæ inter ſe, quemadmodum eſt dupla, tripla, quadrupla, &c. Quod ſi rationes ſimiles ſunt quæ inter ſe multiplicantur, verbi gratiâ, dupla in duplam, tunc ratio quæ ex duabus illis compoſita eſt, duplicata dicitur illius rationis quæ fuit inter terminos primæ rationis.

Ponantur verbi gratiâ quotuis rationes ſimiles nouem ad tria, duodecim ad quatuor, triginta ad decem, trium ad vnum, &c.

			81.
		27.	
	9		
3	3.	3.	3.
9. 3.	12. 4.	30. 10.	3. 1.

Quoniam hæ rationes ſimiles ſunt, igitur eundem habent denominatorem ſiue æqualem, nimirum tria. ſuperponatur itaque denominator tria cuique rationi, quoniam quatuor rationes aſſumptæ ſunt, quatuor quoque erunt denominatores. quod ſi ducatur primus denominator in ſecundum, hoc eſt ſi fiat multiplicatio 3. per 3. exſurget ratio noncupla, quæ ſuperpoſita rationi quæ fit ex 3. in 3. oſtendet 9. eſſe denominatorem rationis quæ compoſita eſt ex multiplicatione trium in tria, ſiue denominatore primæ rationis in denominatorem ſecundæ, diceturq; ratio noncupla eſſe duplicata eius quam habet ratio nouem ad tria, vel 12. ad 4. Quod ſi denominator 9. multiplicetur vlteriùs per denominatorem rationis 30. ad 10. qui ſimiliter eſt tria, reſultabit ratio cuius denominator erit 27. diceturq; ratio viginti ſeptupla triplicata rationis eius quam habet ratio nouem ad tria, vel 30. ad 10. Quod ſi denuo denominator 27. multiplicetur per denominatorem rationis trium ad vnitatem qui eſt 3. reſultabit ex hac multiplicatione ratio 81. quæ dicetur eſſe quadruplicata rationis eius quam habet 9. ad 3. vel 3. ad 1. Eodem pacto procedendo vlteriùs incides in quintuplicatam ſextuplicatam rationem. ſignificant autem hæ formulæ loquendi, vt ex ipſis nominibus manifeſtum eſt, rationes has ſcilicet nouem ad tria, duodecim ad quatuor, triginta ad decē, & trium ad vnum per ſe mutuo multiplicari; non autem ad ſe inuicem addi vt mera fiat aggregatio rationum. duplicata igitur ratio non eſt ratio ſimpliciter tripla, ſed multiplicata per triplam, & ratio triplicata ſignificat rationem quæ naſcitur ex denominatorum multiplicatione bis factâ, atque ita deinceps.

Porrò ſi aſſumantur tres vel plures rationes quæ inter ſe diſſimiles ſint, quales ſunt rationes duorum ad vnum, quatuor ad vnum, & ſex ad duo, ſi harum rationum denominatores ſuperponantur ſingulis rationibus,

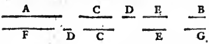
 repe-

24.
8.
2. 4. 3.
2. 1. 4. 1. 6. 2.

reperiemus duplam, quadruplam, & triplam, & ratio duorum ad vnum ducta in rationē quatuor ad vnum, quod fiet per multiplicationem denominatoris 2. in denominarorem 4. exhibebit rationem cuius denominator erit 8. ac proinde octuplam: ratio verò duorum ad vnum, ducta in rationem quatuor ad vnum, hoc eſt ratio octupla, ſi ducatur in rationem ſex ad duo, quod continget quando multiplicaueris denominatorem 8. per denominatorem 3. prodibit ratio 24. Nullo modo tamen dici debebit ratio 24. ad 3 triplicata, rationis 6. ad 2. neque ratio 8. ad 4. duplicata rationis 2. ad 1. vel 4. ad 1. quamuis per accidens nonnumquam id fieri contigerit; illa etenim nomenclatura ſolùm conuenit caſibus per ſimiles rationes multiplicatis. Quod ſi quis inter duas quantitates alias, verbi gratiâ, inter quantitates 36. & 2. interpoſuerit 12. & 4. vel plures quotcunque; ratio 36. ad 2. dicetur cōponi ex ratione 36. ad 12. & ex ratione 12. ad 4. & tandem ex ratione 4. ad 2. conſtituantur enim denominatores vti priùs factum eſt, & ſuperponantur ſingulis rationibus, ſcilicet rationi 36. ad 12. quæ eſt tripla, ſuperponatur denominator 3. & rationi ſimiliter 12. ad 4. quæ etiam tripla eſt, ſuperponatur denominator idem tria: tandem rationi 4. ad 2. denominator 2. denominator 3. ductus in denominatorem ſequentem 3. producat 9. denominatorem rationis noncuplæ, qui multiplicatus per denominatorem 2. rationis 4. ad 2. exhibeat 18. denominatorem rationis octodecuplæ, tunc apparebit qualis ratio reſultet ex tribus hiſce rationibus, per ſe inuicem multiplicatis. nam denominator 18. oſtendit rationem 36. ad 12. & 12. ad 4. & 4. ad 2. inter ſe multiplicatas proferre rationem eandem quæ eſt in 36. & 2. 18. enim ad 1. eandem habet proportionem quam 36. ad 2.

18.
9.
3. 3. 2.
36. 12. 4. 2.

Quod autem per numeros hucvſque eſt explicatum, prorſus vniuerſale eſt in omni genere quantitatum: nam ſi inter duas lineas A & B, quotuis



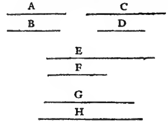
lineæ interponantur C D E, ratio A ad B, dicitur compoſita ex rationibus A ad C, ducta in rationem C ad D (hoc eſt ex ratione A ad D,) & ex ratione A ad D, ducta in rationem D ad E, (hoc eſt ex ratione A ad E.) tandem ex ratione A E, ducta in rationem E ad B, hoc eſt ex ratione A ad B. nam ſi ſemel admittatur quòd ratio A ad C, ducta in rationem C ad D, producat rationem A ad D, debebit quoque admitti quod ratio A ad D, ducta in rationem D ad E, producat rationem A ad E, & conſequenter quòd ratio A ad E, ducta in rationem E ad B, proferat rationem A ad B, & ſic quòd omnes rationes A C, C D, D E, E B, per

E B, per ſe inuicem multiplicatæ exhibeant rationem primæ A ad vltimam B, atque hoc intelligendum eſt etiam in quauis tranſpoſitione intermediorum. nam ſi ſint æquales F & G, rectis A & B, & eædem lineæ C D E interpoſitæ ſint inter F & G, quæ fuerant inter A & B, ſed ordine prorſus immutato, nihilominùs dicetur ratio F ad G, compoſita ex rationibus intermedijs eodẽ pacto quo priùs, vt rem conſideranti ſatis perſpicuum eſt. & licet hæc omnia ex elementis nota eſſe Geometris debueram ſuppoſuiſſe, paucis ea nihilominùs ad memoriam refricandam, præſertim ijs qui ſæpè hæc ſtudia coguntur intermittere, adiungere operæpretium duxi.

PRINCIPIVM TERTIVM.

Rationes quæ ex ijſdem rationibus componuntur ſiue producuntur, ſunt eædem.

EXPLICATIO.



PRopoſitæ ſint binę rationes A B, C D, & binæ aliæ E F, G H. Si ratio A B compoſita ſit, ſiue producatur ex rationibus E F, G H; itemque ratio C D, ex ijſdem componatur rationibus E F, G H: rationes datæ A B, & C D eædem ſiue æquales erunt.



Quod ſi rationes datæ fuerint I K, L M, quæ ita ex ijſdem rationibus componantur, vt ratio I P, ſit eadem cum ratione L Q, & ratio P K, eadem cum ratione Q M, tunc res coincidit cum prop. 22. libri 5. elementorum; erit enim ex æquali vt I ad K, ſic L ad M.

PRINCIPIVM QVARTVM.

Quantitas rationis ſiue denominator ductus in conſequentem terminum rationis producit antecedentem.

EXPLICATIO.

DAta ſit exempli gratiâ ratio A ad B, nempè 12. ad 3. huius rationis denominator eſt 4. qui ductus in 3. conſequentem terminum rationis producit antecedentem, nimirum 12. Idem in quouis caſu eueniet. hoc principium per ſe manifeſtum à varijs aſſumptum fuit, maximè ab Eutocio, Theone, Vitellone.

C 4.
A 12. B 3.

ARGV-

ARGVMENTVM TOTIVS LIBRI.

IN ſex partes librum hunc diuiſimus.

Primâ quidem quæ denominatores rationum concernunt exponemus.

Secundâ verò de ſimilitudine rationum, quæ eſt inter proportiones, fuſè ſatis diſſeruimus, oſtendimuſque omnia quæ rationibus quatuor terminorum competunt, etiam rationibus proportionum accommodari.

In tertiâ multiplicationem rationum complectimur.

In quartâ de proportionibus rectangulorum quæ ex varia compoſitione rationum oriuntur, agimus.

Quintâ verò parte ea quæ proportionalitatibus Geometricis cum Arithmeticis operationibus communia ſunt, explicamus.

Sextâ denique affectiones terminorum proportionalium, ac rationum continuationem, varias denique rationum multiplicationes, complectimur, per quæ aliquam ſaltem lucem difficillimis hiſce anfractibus Geometriæ ſtudioſis prætuliſſe nobis videbimur.

Digitized by Google

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS PRIMA

Fundamentales propoſitiones complectitur, naturam denominatorum concernentes.

PROPOSITIO PRIMA.

QVarumuis rationum poſſibile eſt denominatores exhibere.

Demonſtratio.

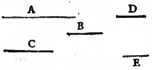
RAtio eſt mutua quædam antecedentis ad conſequens habitudo ſecundùm exceſſum, & defectum vel æqualitatem. Cùm igitur vnius rationis antecedens magis excedat conſequens, vel ab eodem magis deficiat, quàm alterius rationis antecedens ſuum excedat conſequens, vel deficiat ab eodem, manifeſtum eſt vnam rationem maiorem minorémue eſſe alterâ, planè vt vna quantitas alterâ maior minorue eſt. Quare ſicuti poteſt exprimi rectis lineis quantò vna quantitas alterâ ſit maior vel minor, ita etiam rectæ lineę exhiberi poſſunt, quæ oſtendant quantò vna proportio maior ſit vel minor quàm altera. Atqui rationum denominatores ſunt tales rectę lineæ, vt patet ex 2. definitione. Quarumuis igitur rationum poſſibile eſt denominatores exhibere. Quod erat demonſtrandum.

Problematicè autem exhibebimus denominatores propoſ. 13. huius libri.

PROPOSITIO II.

DVæ rationes habentes commune conſequens, eam ſortiuntur rationem quę inter antecedentes terminos reperitur.

Demonſtratio.



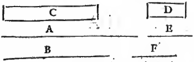
SIt ratio A ad B, & C ad B: illarum autem denominatores ſint D, & E: per quartum principium huius libri, D ductum in B, exhibet A, ſimiliter E ductum in B exhibet C. igitur vt D, ductũ in B, ad E, ductum in B, ita eſt A ad C: ſed D in B ad E in B, eam habet rationem quam D ad E. igitur A ad C, eam obtinet rationem, quam D ad E: ſed vt D ad E, [a] ita eſt ratio A, B, ad rationem C B. igitur vt eſt A ad C, ita eſt ratio A B ad C B: quare duæ rationes commune conſequens habentes, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] Patet ex defin. 2. huius.

Corolla-

Corollarium primum.

HInc optimo iure inferre licet in rationibus, quæ rectis lineis exprimuntur ita creſcere vel minui rationem inter duas quantitates, qualiter augetur vel decreſcit altera linearum quantitates expoſitas exprimens; hoc eſt, poſito quod rectæ A & B, denotent rationem inter duas quantitates C & D, ſi adiungatur rectæ lineæ A, recta E, a erit A cum E, maiorem habens rationem ad B, quàm prius habebat A ad eandem B: neque ſolùm maiorem, ſed in ea ratione maiorem in qua ratione illi incrementum accedit.



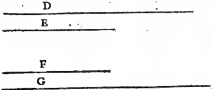
a 28. quin.

b 29. quin. b idem intellige de mutilatione lineę A per ablationem cuiuſcunque tandem particulæ; omnis enim linearum variatio præiudicium natum eſt adducere cuicumque proportioni aut rationi. vnde meritò dicere poſſumus rationes omnes habentes idem conſequens ita creſcere aut minui, vt augentur vel mutilantur antecedentes rationum termini.

Corollarium ſecundum.



HInc præstereà etiam conſtat quòd poſitis tribus quantitatibus quæ ſint in continua analogia, nimirum A,B,C, ex eo quod ratio A ad C, ad rationem B ad C, ſit vt A ad B, optimè ſequi, quod denominator rationis duplicatæ, & denominator rationis ſimplicis eiuſdem ſeriei habeant rationem inter ſe, quam duæ primæ quantitates continent inter ſe; nihil autem aliud intendimus toto proportionalitatum libro, quàm proprietates inueſtigare quas habent inter ſe rationum denominatores. Quamuis autem ipſi denominatores in Geometricis exhiberi non poſsint ſecundùm ſe; tamen ſecundùm comparationē ſeu proportionem cum denominatore alterius rationis facilè innoteſcunt. Datis enim duabus lineis D & E, ſi quis requirat denominatorem rationis D ad E, fruſtra quærit, cùm vel exhiberi non poſſit, vel quæuis linea ad eundem denotandum aſſumi poſſit. Quod ſi verò alia ratio addatur, & inquiratur proportio quæ intercedit inter denominatorem rationis D ad E, & denominatorem rationis F ad G, tunc aliquid poſtulatur quod à Geometria præſtari poteſt, eſtque ille maximè ſcopus in quem præſenti libro collimamus, ſimul cum alijs affectionibus quæ materiam hāc dilucidare queant hactenus vſqueadeò intactam, & alto ſilentio obuolutam.



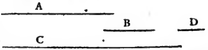
PROPOSITIO III.

DAtis tribus A,B,C iungatur quæuis D.

Dico rationem AD ad CD rationem, eandem habere proportionem, quam ratio AB obtinet ad CB rationem.

Demon-

Demonſtratio.

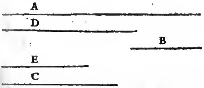


PEr præcedentem ratio A B ad C B, eandem proportionem habet, quam A ad C, antecedens ad antecedens, inſuper per eandem propoſitionem ratio A D, ad C D rationem, eadem eſt cum ratione A ad C: igitur A D ratio, ad rationem C D, eandem continet proportionem, quam ratio A B ad rationem C B. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

SIt ratio A B ad rationem C B, vt ratio D B ad rationem E B. Dico quantitates A, C, & D, E proportionales eſſe.

Demonſtratio.

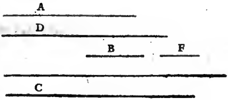


QVemadmodum eſt ratio A B ad C B rationem, ita eſt per ſecundam huius, A ad C: ſimiliter vt ratio D B ad E B rationem, ita eſt D ad E: ſed vt ratio A B ad C B rationem, ita ponitur ratio D B, ad E B rationem: ergo vt A ad C, ita eſt D ad E: quare proportionales ſunt A, C & D, E. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO V.

SIt ratio A B ad rationem C B, vt ratio D F ad rationem E F. Dico iterum A, C & D, E proportionales eſſe.

Demonſtratio.



RAtio A B ad C B, eadem eſt cum [a] ratione A ad C, antecedentis ad antecedens. ſimiliter ratio D F ad E F, eadem eſt cum [b] ratione D ad E: ſed vt ratio A B ad C B, ita ponitur ratio D F ad E F. ergo A eſt ad C, vt D ad E. Quod erat demonſtrandum.

[a] 2. huius.

[b] ibid.

PROPOSITIO VI.

SI rationes A B, C D, ſimiles fuerint, & aſſumatur quæuis linea E. Dico E B rationem eſſe ad rationem C, D, vt E eſt ad A.

Demonſtratio.

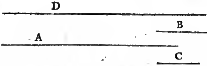


QVoniam ſimiles ponuntur rationes C D, & A B. Vt E B ratio ad C D rationem, ita eſt eadem ratio E B ad rationem A B: ſed per ſecundam huius, ratio E B ad A B rationem, eſt vt E ad A, ergo vt E ad A, ita quoque eſt ratio E B ad C D rationem. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

RAtiones duæ commune antecedens ſortitæ, eandem obtinent rationem quam ſecundum conſequens ad primum.

Demonſtratio.



SInt duæ rationes A B, & A C, quarũ commune exiſtat antecedens A. Dico illas rationes, inter ſe eandem habere proportionem, quã C ſecundum cõſequens, ad B primũ: fiat enim vt C ad A, ita B ad D, [a] ratio A B, ad rationem D B, eſt vt A ad D, ſed ex hyp. ratio D B, eſt ratio A C. ergo ratio A B ad rationem A C, eſt vt A ad D, ſed ex hyp. vt A eſt ad D, ſic C eſt ad B; patet igitur rationes duas A B & C B, habentes commune antecedens, eam inter ſe rationem obtinere quam habet C ad B, ſecundum conſequens ad primum. Quod demonſtrandum fuerat.

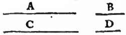
a 1. huius.

PROPOSITIO VIII.

SI proportio rationis A B ad rationem A D eadem ſit cum proportione rationis A B ad rationem C ad D, hoc eſt ſi ratio A B ſit ad rationem A D, vt ratio A B eſt ad rationem C D.

Dico A & C æquales eſſe quantitates.

Demonſtratio.



QVoniam ratio A B ad A D rationem, eſt vt ratio A B ad C D, igitur ratio A D, eadem eſt cum ratione C ad D: eſt autem ratio A D ad C D rationem vt [b] A ad C; igitur A æquatur etiam C.

b 1. huius.

PRO-

PROPOSITIO IX.

SI ratio AB ad CD, fuerit vt D ad B.
Dico A & C æquales eſſe.

Demonſtratio.



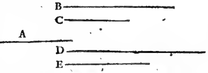
RAtio AB ad rationem AD, eſt vt [a] linea D ad B: ratio autem AB, ad rationem CD, eſt ex hypotheſi vt D ad B: ergo vt ratio AB ad AD rationem, ita eadem ratio AB ad CD rationem, ſunt igitur [b] quantitates inter ſe æquales A & C. Quod fuit demonſtrandum.

a 7. huius.
b 8. huius.

PROPOSITIO X.

SI ratio AB ad AC rationem, ſit vt ratio AD ad AE rationem.
Dico B, C & D, E quantitates eſſe proportionales.

Demonſtratio.



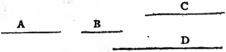
VT eſt ratio AB ad AC rationem, [c] ita eſt C ad B, ſimiliter vt ratio AD ad AE rationem, ita eſt E ad D, ſed vt ratio AB ad AC, ita eſt ex hypotheſi ratio AD ad AE rationem, ergo vt C eſt ad B, ita E ad D. quare inuertendo vt B ad C, ita D ad E; ſunt igitur proportionales BC & DE. Quod demonſtrandum fuit.

c 7. huius.

PROPOSITIO XI.

EXponantur quæuis quantitates A & B, & duæ aliæ CD.
Dico rationem AC eſſe ad AD rationem, vt ratio BC ad BD rationem.

Demonſtratio.



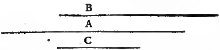
RAtio AC ad AD, eſt vt D ad [d] C, & ratio BC ad BD rationem, quoque eſt vt D ad C, igitur vt ratio AC ad rationem AD, ita eſt BC ratio ad BD rationem. Quod fuit demonſtrandum.

d 7. huius.

PROPOSITIO XII.

DAtæ ſint tres quantitates A, B, C.
Dico rationem AB eſſe ad AC rationem, vt ratio CA ad BA.

Demonſtratio.



a 7. huius. b 2. huius.

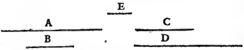
RAtio AB ad AC rationem, eam habet, [a] proportionem quam C ad B, ratio autem CA ad BA rationem eſt [b] vt C ad B; ergo vt ratio AB ad AC rationem, ita quoque eſt ratio CA ad BA rationem. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

DAtæ ſint qualeſcunque rationes AB,CD: fiat autem vt D, conſequens ſecundæ rationis ad C antecedens ſecundæ, ita B conſequens primæ rationis ad aliud E.

Dico A & E eſſe denominatores rationum datarum.

Demonſtratio.



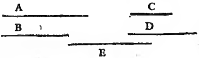
c 2. huius. d Defin. 2. huius.

QVoniam ex hypotheſi D eſt ad C, vt B ad E, erit inuertendo ratio E ad B, eadem cum ratione C ad D: ratio igitur AB, ad rationem CD, eſt vt ratio A ad B, ad rationem E ad B; ſed ratio A ad B, ad rationem E ad B, eſt vt [c] A ad E, igitur ratio A ad B, ad rationem C ad D, eſt vt A ad E: ſunt igitur [d] A & E denominatores rationum AB, & CD. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

DAtis quibuſcunque rationibus AB,CD, fiat vt C ad D, ita A ad E. Dico rationum AB, CD denominatores eſſe E, & B.

Demonſtratio.



e 7. huius.

RAtio AB ad AE rationem, eſt vt [e] E ad B, ſed ratio AB eſt ex hypotheſi eadem cum ratione CD. ergo vt E ad B, ita ratio AB ad CD rationem; ſunt igitur E & B, denominatores datarum rationum AB, & CD.

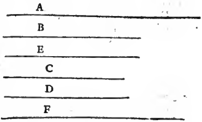
PROPOSITIO XV.

POnatur ratio inæqualitatis AB & altera æqualitatis CD.

Dico rationem AB ad CD rationem, habere proportionem A ad B, rationem verò CD ad AB rationem, habere proportionem quam B ad A.

Demon-

Demonſtratio.



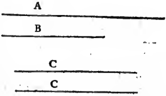
Fiat vt D ad C, ita B ad E, erit [a] vt A ad E, ita ratio A B ad C D rationem: quia autem ex hypotheſi æquales ſunt C D, eſtque vt D ad C, ita B ad E, etiam B & E æquales erunt; cùm igitur ratio A B ſit ad C D rationem, vt A ad E; erit quoque ratio A B ad rationem C D, vt A ad B. Quod erat primum. a 15. *huius.*

Secundam quoque partem ſic demonſtro. fiat vt A ad B, ſic C ad F. ergo ratio C D eſt ad rationem A B, vt [b] F ad D, hoc eſt (quoniam ex hypotheſi C & D æquantur,) vt F ad C, ſed ex conſtr. F eſt ad C, vt B ad A. Ergo ratio C D eſt ad rationem A B, vt B ad A. Quod erat alterum. b 14. *huius.*

PROPOSITIO XVI.

Sit denuo ratio inæqualitatis A B, & ſumatur quæuis quantitas C. Dico rationem A B eſſe ad C C rationem, vt ratio A C ad rationem B C: rationem verò C C ad A B, continere proportionem eandem cum ratione C A ad C B rationem.

Demonſtratio.

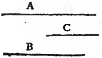


Per præcedentem ratio A B ad C C rationem, eſt vt A ad B, ſed per ſecundam huius, eſt vt A ad B, ita ratio A C ad rationem B C. ergo ratio A B [c] ad C C, rationem eſt vt ratio A C ad B C. quod erat primò propoſitum. Deinde ratio C C ad A B, rationem eſt vt B ad A, per præcedentem: per ſeptimam verò huius eſt ratio C A ad C B rationem, vt B ad A; ergo vt ratio C C ad rationem A B, ita eſt C A ratio ad C B rationem. Quod ſecundo loco erat demonſtrandum. c 11. *quinti.*

PROPOSITIO XVII.

Sit ratio quæcunque A ad B, & aſſumpta quæuis C. Dico rationem C A eſſe ad C B rationem, vt ratio B C eſt ad A C rationem.

Demonſtratio.



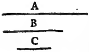
Ratio C A ad C B, [d] eſt vt B ad A, ratio quoque B C ad A C, eſt [e] vt B ad A; igitur ratio C A eſt ad C B rationem, vt ratio B C ad A C. Quod fuit demonſtrandum. d *Per 7. huius.* e *Per 2. huius.*

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

SInt duæ quantitates A & B.
Dico rationem A ad B, ad rationem B ad A, proportionem habere duplicatam eius quam habet linea A ad B.

Demonſtratio.



FIat vt B ad A, ita quædam C ad B, erit igitur per 2. huius ratio A B ad rationem C B, vt quantitas A ad quantitatem C, ſed ratio C ad B, ex conſtruct. eadem eſt cum ratione B ad A, ergo ratio A B ad rationem B A, eandem proportionem habet quam A ad C: ſed ratio A ad C, eſt duplicata rationis eius quã habet A ad B, ergo ratio A, B, ad rationem B, A, duplicatam habet rationem eius quam habet A ad B. Quod fuit demonſtrandum.

Corollarium.

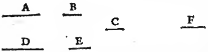
HInc ſequitur ſi A B C tres fuerint proportionales, A ad C, eandem rationem habere cum eâ quam A B, ratio habet ad rationem B A.

PROPOSITIO XIX.

SInt in continuâ analogia A B C, D E C.
Dico rationem A D eſſe ad B E rationem vt B ad E.

Demonſtratio.

a 13. *huius.*

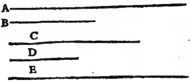


FIat vt E ad B, ita D ad F: erit a vt A ad F, ſic ratio A D ad rationem B E, & quia ratio A D eſt duplicata rationis B E: erit quoque ratio A D, duplicata rationis F D, ratio autem A ad D, eſt compoſita ex ratione A ad F, & F ad D: igitur ratio A F, eadem eſt cum ratione F D, hoc eſt B ad E. Quare cùm ratio A D ad B E rationem, eandem habeat proportionem quam A ad F, habebit eandem quoque quam B ad E. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

SIt ratio A B eadem cum ratione C D, deinde fiat vt D ad C, ita B ad E.
Dico A & E æquales eſſe quantitates.

Demonſtratio.



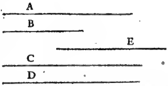
QVoniam ſimiles ponuntur rationes A B & C D, erit vt A ad B, ita C ad D, & inuertendo vt D ad C, ita B ad A; ſed ex conſtructione factum eſt D ad C, vt B ad E. ergo vt B ad A, ita B ad E; ſunt igitur A & E, quantitates æquales, Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Sint rationes AB, CD vt A ad B.
Dico quantitates CD, æquales eſſe inter ſe. Quod ſi ratio CD, ſit ad AB rationem, vt B ad A.
Dico rurſum D & C, quantitates æquales eſſe.

Demonſtratio.



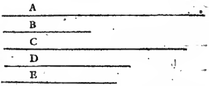
Sit igitur primò ratio AB ad CD, vt A ad B. fiatque ipſi C æqualis E: erit a vt A ad B, ita ratio AB ad CE rationem: ſed vt A ad B, ita eſt ratio AB ad CD ex ſuppoſitione, ergo vt ratio AB ad rationem CE, ita eſt eadem ratio AB ad CD: quare eædem ſunt rationes CE & CD; ac proinde D, ipſi E, hoc eſt ipſi C æqualis eſt: quod erat primum. a 15. *huius*

Sit deinde ratio CD ad rationem AB, vt B ad A. Dico ſimiliter C & D æquales eſſe quantitates. fiat enim vt priùs E ipſi C æqualis, erit vt B ad A, ita ratio CE ad AB rationem, quare iterum vt priùs oſtendetur C & D, æquales eſſe. Quod fuit demonſtrandum. Hæc eſt conuerſa 15. huius.

PROPOSITIO XXII.

Sit ratio A ad B maior ea, quam habet C ad D, & fiat D ad C, vt B ad E.
Dico A maiorem eſſe quàm vt ſit æqualis E.

Demonſtratio.

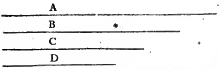


Qvoniam eſt vt D ad C, ita B ad E, ergo ratio AB ad CD rationem, eſt b vt A ad E. ſed ex ſuppoſitione ratio A ad B, maior eſt ratione, quam habet C ad D. ergo A maior eſt quàm E, pari quoque modo quod ſi ratio A ad B, minor ſit ratione quam habet C ad D, & fiat D ad C, vt B ad E, oſtendetur A, minor eſſe quàm ſit E. b 15. *huius.*

PROPOSITIO XXIII.

Qvod ſi quatuor quantitates A, B, C, D eandem continuent analogiam:
Dico rationem AB ad DC rationem, eandem habere proportionem, cum ea quæ intercedit inter A & C.

Demonſtratio.

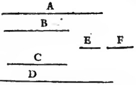


QVoniam proportionales ſunt A,B,C,D in continuata ratione conſtitutæ, erit quoque A ad B, vt C ad D, & inuertẽdo vt D ad C, ita B ad A. Sed quoniam A,B,C ſunt continuæ vt A ad C, ita per Coroll 18. huius, eſt ratio A B ad B A, rationẽ, ergo vt A ad C, ita quoque eſt ratio A B ad D C rationem. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV.

DAtis duabus rationibus duas alias rationes exhibere quæ communes habeant cum rationibus datis denominatores.

Conſtructio & demonſtratio.



a 13. *huius.*

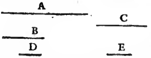
b 2. *huius.*

DAtę ſint duæ quæuis rationes A B, C D, oporteat exhibere duas rationęs illis proportionales quæ denominatores habeant eoſdem. fiat vt D ad C, ita B ad E. erit ergo [a] ratio A B ad C D rationem, vt A ad E. ponatur deinde quæuis F. Dico quod rationes A F, E F erunt, quæ requiruntur. nam [b] ratio A F eſt ad E F rationem vt A ad E; ſed ratio quoque A B ad C D rationem eſt vt A ad E, rationes igitur A B ad C D, reductæ ſunt ad rationes quę communes ſortiantur denominatores. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXV.

DVas rationes exhibere quæ datam inter ſe rationem contineant.

Conſtructio & demonſtratio.



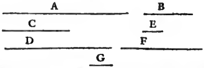
DAta ſit ratio A B, & quæuis ponatur C. dico factum eſſe quod petitur, nam ratio A C ad B C, eſt vt A ad B, per ſecundam huius; eodem modo ratio C B ad C A, eſt vt A ad B per ſeptimam huius.

Si verò petantur rationes quarum antecedens vel conſequens commune non ſit, in data ratione exhiberi: fiat vt B ad C, ita D ad E. erit ergo ex conſtr. ratio A C ad D E rationem, vt ratio A C ad B C. ſed ratio A C ad B C, eſt vt A ad B. igitur & ratio A C ad D E, eſt vt A ad B: exhibuimus igitur duas rationes, quæ datam continent rationem. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXVI.

DAta ratione A ad B, & duabus quantitatibus C, D: oportet exhibere duas alias E & F, vt ratio CD ſit ad rationem EF, vt A ad B.

Conſtructio & demonſtratio.



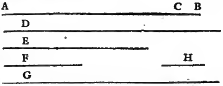
Fiat vt A ad B, ita C ad G, & vt D ad G, ita quæuis F ad E. Dico rationem CD ad EF rationem, eam habere proportionem quam continet ratio A ad B, quia enim facta eſt F ad E, vti eſt D ad G, ratio CD ad EF rationem, eam [a] proportionem habet quam C ad G. ſed ratio C ad G, eſt ea quam habent datæ quantitates A & B, ſecundùm conſtructionem factam. Igitur ratio CD eſt ad rationem EF, vt A ad B. Quod erat poſtulatum. a 13. huius.

Quod ſi C ad D ratio debeat eſſe conſequens, id eſt vt ſit quemadmodum A ad B, ita alia ratio GE ad CD rationem: fiat vt B ad C, ita quæcunque E ad F, & vt B ad A, ita F ad G, tunc erit vt A ad B; ita ratio GE ad CD rationem.

PROPOSITIO XXVII.

DAtam rectam AB ita ſecare in C, vt ſit AC linea ad CB, vt eſt ratio data DE ad FG rationem.

Conſtructio & demonſtratio.



Fiat vt G ad F, ita E ad H, deinde diuidatur AB in C, vt ſit quemadmodum D ad H, ita pars lineę AC ad CB reſiduum. Dico factum quod poſtulatur. eſt enim per 13. huius libri ratio DE ad FG rationem vt D ad H, eſt autem diuiſa recta AB in C ſecundùm rationem D ad H. ergo etiam diuiſa eſt AB, in C, ſecundùm proportionem datarum rationum DE & FG. Quod erat poſtulatum.

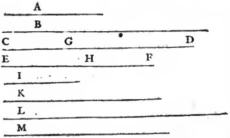
PROPOSITIO XXVIII.

DAta ratione A ad B, lineiſque CD, EF.

Oporteat rectas CD, EF ita diuidere in G & H, vt ratio CG, GD ad rationem EH, HF eandem proportionem contineat quam habet A ad B.

Conſtructio & demonſtratio.

a 15. *huius.*
b 10. *ſexti.*



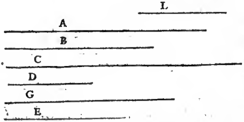
Fiat [a] vt A ad B, ita ratio I K ad L M, diuidaturq́; [b] C D in G, vt ratio C G ad G D, eadem ſit cum ratione I ad K, ſecta quoque E F in H, vt ratio E H ad H F, ſit eadem cum ratione L ad M. Dico factum quod poſtulatur, nã A eſt ad B, vt ratio I K, ad rationem L M ex conſtructione. ſed ratio I ad K, eſt eadem cum ratione C G ad G D; & ratio L ad M, eadem cum ratione E H ad H F. ergo vt A ad B, ita eſt ratio C G, G D ad rationem E H, H F. igitur diuiſimus lineas C D & E F, prout exigebatur.

PROPOSITIO XXIX.

Data ratione A ad B, & quantitatibus C & D, oporteat duas exhibere rationes, quarum antecedentes ſint C & D, proportionem autem habeant eandem cum ratione A ad B.

Conſtructio & demonſtratio.

c 1. *huius.*



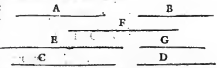
Sumatur quæuis L & fiat vt A ad L, ita C ad G, & vt B ad L, ita D ad E. Dico rationes C G, D E eas eſſe quæ poſtulantur. quoniam [c] ratio A ad L, ad rationem B ad L, eſt vt A ad B, etiam ratio C G (vtpote eadem per conſtr. rationi A L) erit ad rationem B L, vt A ad B: ſed ex conſtructione ratio B L, eſt ratio D E. ergo ratio C G eſt ad rationem D E, vt A ad B: & ſunt C ac D, termini antecedentes. Factum igitur eſt quod petebatur.

PROPOSITIO XXX.

Data iterum ratione A ad B, alijsq́; duabus quantitatibus C & D. Oporteat aſſignare duas rationes quæ talem ſortiantur rationem inter ſe, qualem habent A & B, ita tamen vt C & D, ſint conſequentes termini earum rationum.

Con-

Conſtructio & demonſtratio.

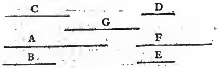


SVmatur quæuis G, & fiat vt D ad G, ita C ad F, deinde vt B ad A, ita fiat F ad E. Dico rationem E C ad G D rationem, eam continere proportionem quam A ad B: Quoniam eſt vt D ad G, ita C ad F, erit [a] ratio E C ad G D rationem, vt eſt E ad F: ſed eſt vt F ad E, ita B ad A, & inuertendo A ad B, vt E ad F. igitur ratio E C ad rationem G D, eſt vt A ad B: ſuntque C & D, harum rationum termini conſequentes. præſtitimus igitur quod imperatum fuerat. [a 11. huius.]

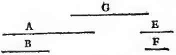
PROPOSITIO XXXI.

DAta ratione A ad B, & denominatoribus duarum rationum C & D; denique termino E aſſignare quartum F, ita vt ratio data A B ad E F rationem ſit vt C ad D.

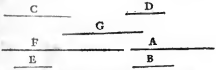
Conſtructio & demonſtratio.



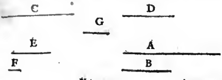
OPorteat primò terminum E eſſe conſequentem rationis eius, cuius denominator eſſe debet D. fiat vt C ad D, ita A ad G: deinde vt B ad G, ita E ad F. Dico F terminũ eſſe quæſitũ: cũ enim ſit vt E ad F, ita B ad G, erit per 13. huius, vt A ad G, hoc eſt ex conſtruct. vt C ad D, ita ratio A B ad ratione F E.



Quod ſi quæratur vt quantitas E ſit antecedens in ratione cuius denominator eſt D. Fiat A ad G, vt C ad D; & vt G ad B, ita E ad F. Dico rurſum F eſſe terminum quæſitum, erit enim inuertendo vt F ad E, ita B ad G. quare [b] denuo, vt A ad G, hoc eſt ex conſtruct. C ad D, ita ratio A B ad E F, rationem. [b 13. huius.]



Oporteat vlteriùs ita diſponere terminos rationum vt quantitas E terminus ſit conſequens illius rationis cuius denominator eſt C. fiat vt B ad A, ita E ad G, & vt D ad C, ita G ad F. Dico F eſſe terminum quæſitum. cùm enim ſit B ad A, vt eſt E ad G, iterum ratio F E, ad rationem A B, [c] eam continet proportionem quæ inuenitur inter F & G: ſed quia vt D ad C, ita facta eſt G ad F, erit inuertendo C ad D, vt F ad G. ergo ratio F E ad rationem A B eſt vt C ad D. [c Ibid.]



Denique ſubiungemus etiam methodum quâ quantitas E fiat antecedens illius rationis quę denominatorem habet C. Fiat enim vt C ad D, ita E ad G, & vt A ad B, ita G ad F. dico factum. nam

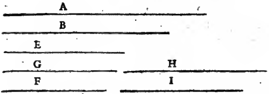
 inuerten-

a 13.huius. inuertendo erit vt B ad A, ita F ad G, proindeq́ue vt priùs a erit ratio E F, ad rationem A B, vt E eſt ad G, hoc eſt ex conſtr. vt eſt C ad D. Igitur omni ex parte propoſitionis præſentis intento eſt factum ſatis.

PROPOSITIO XXXII.

DAta ratione A ad B, oporteat duas quantitates exhibere E & G, vt ratio EG ad GE, eam proportionem obtineat quam A ad B.

Conſtructio & demonſtratio.



Fiat vt A ad B, ita quæuis E ad F, inter quas ſtatuatur media proportionalis G. Dico E, G eſſe quantitates poſtulatas. Nam cùm E, G, F ſint in continua analogia, erit per Corollarium 18. huius, ratio EG ad rationem GE, vt E ad F, hoc eſt ex conſtr. vt A ad B. fecimus ergo quod fuerat imperatum.

PRO-

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS SECVNDA.

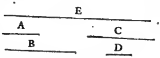
De ſimilitudine proportionum inter rationes exiſtentium.

PROPOSITIO XXXIII.

DAtæ ſint rationes A ad B, & C ad D.

Dico proportionem rationis AB ad CD rationem, compoſitam eſſe, ex ratione A ad C, & ratione D ad B.

Demonſtratio.



FIat vt D ad C, ita B ad E. erit igitur a ratio AB ad CD rationem, vt A ad E: ſed ratio A ad E, componitur ex ratione A ad C, & C ad E, igitur & proportio rationis AB ad CD rationem componitur ex ratione A ad C, & C ad E: quia verò ex conſtruct. eſt D ad C, vt B ad E, erit quoque D ad B, vt C ad E. igitur ratio A ad E, compoſita eſt ex ratione A ad C, & ex D ad B. quare & AB, ratio ad rationem CD, proportionem habet compoſitam ex ratione A ad C, & ex ratione D ad B. Quod erat demonſtrandũ.

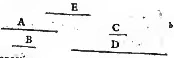
a 13. huius.

PROPOSITIO XXXIV.

IIſdem poſitis:

Dico proportionem rationis AB ad CD rationem, compoſitam eſſe ex ratione A ad B, & ex D ad C.

Demonſtratio.



FIat vt D ad C, ita B ad E, erit itaque b ratio A ad E, illa quam inter ſe habent rationes AB, CD. ſed ratio A ad E compoſita eſt ex ratione A ad B, & B ad E, hoc eſt D ad C, igitur & ratio A B, ad rationem CD, compoſitam habet proportionem ex ratione A ad B, & D ad C. Quod erat demonſtrandum.

b ibid.

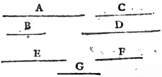
PROPOSITIO XXXV.

RAtionum AB, CD denominatores ſint E & F, fiatq; vt A ad B, ſic E ad G.

Dico G eſſe ad F, vt D eſt ad C.

Demon-

Demonſtratio.



a Definit. 2. huius.
b 34. huius.

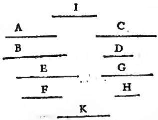
QVoniam E & F, ponuntur denominatores rationum A B, C D : ergo ratio E ad F, eſt[a] proportio rationum A B, C D: ſed proportio rationum A B, C D[b] compoſita eſt ex rationibus A B, & D C. ergo ratio E ad F ex rationibus A B, & C D compoſita eſt. ſed ratio E F componitur etiam ex rationibus E G, (hoc eſt per hypotheſim A B) & G F. ratio igitur A B cum ratione D C eandem rationem componit quàm ratio A B cum ratione G F; rationes igitur D C & G F, eædem ſunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

SI proportio rationis A B ad rationem C D, compoſita ſit ex iiſdem rationibus ex quibus componitur proportio rationis E F ad G H, rationem:

Dico rationem A B eſſe ad C D, vt ratio E F ad G H rationem.

Demonſtratio.



c 13. huius.

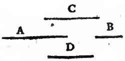
FIat vt D ad C, ita B ad I: & vt H ad G, ita F ad K, erit itaque[c] ratio A B ad C D rationem, vt A ad I; & ratio E F ad G H rationem, vt E ad K, ſed ratio A B ad rationem C D, proportionem habet cõpoſitam ex hypotheſi ex iiſdem rationibus ex quibus cõpoſitam habet ratio E F ad G H rationem; igitur etiam ratio denominatoris A ad I, denominatorem ex iiſdem rationibus ex quibus ratio denominatoris E ad denominatorem K eſt compoſita. quare A eſt ad I, ſicut E eſt ad K. vnde etiam ratio A B ad C D rationem, eſt vt ratio E F ad G H rationem. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO XXXVII.

SI inter A & B quiuis ponantur termini C, D.

Dico rationem A C eſſe ad A D rationem, vt ratio D B eſt ad C B rationem.

Demonſtratio.



d Per 7. huius.
e Per 2. huius.

RAtio A C ad A D, eſt vt D ad C,[d] ratio autem D B ad C B[e] rationem, rurſum eſt, vt D ad C, igitur eſt ratio A C ad A D rationem, vt eſt ratio D B ad C B rationem. Quod erat demonſtrandum.

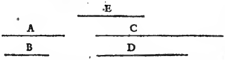
PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

SInt duæ rationes A B, C D, quæcunque.
Dico rationem A B ad C D rationem, eandem habere proportionem quam D C ratio ad B A rationem.

Demonſtratio.

Fiat vt D ad C, ita B ad E: erit [a] vt A ad E, ita ratio A B ad C D rationem. Deinde ratio B E ad B A, eſt vt A ad E: [b] ſed ratio B ad E, eadem eſt cum



a Per 13. huius.

b Per 7. huius.

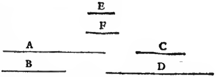
ratione D ad C ex conſtructione, ergo ratio D C ad B A, etiam eſt vt A ad E. quare ratio A B ad C D rationem, eſt vt ratio D C ad rationem B A. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIX.

POnantur denuo rationes A B, C D.
Dico rationem A B ad C D, eandem habere proportionem quam ratio A C ad B D rationem.

Demonſtratio.

Fiat vt D ad C, ita B ad E, erit vt A [c] ad E, ita A B ad C D rationem: ſimiliter poſitis rationibus A C & B D, fiat vt D ad B, ita C ad F, erit vt A ad F, ita ratio A C ad B D rationem: quia verò ex conſtructione eſt vt D ad



c 13. huius.

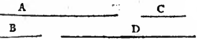
C, ita B ad E, erit permutando vt D ad B, ita C ad E; ſed vt D ad B, ita facta eſt C ad F, ergo vt C ad E, ita C ad F. ſunt igitur æquales quantitates E & F, adeoque eſt A ad E, vt A ad F; ſed vt A ad E, ita erat ratio A B ad C D rationem, & vt A ad F, ita ratio erat A C ad B D. ergo vt ratio A B ad C D rationem, ita eſt ratio A C ad rationem B D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

POſitis iterum duabus rationibus A B, C D.
Dico A B eſſe ad C D rationem, vt ratio D B ad C A rationem.

Demonſtratio.

RAtio A B eſt ad C D rationem, vt [d] ratio D C ad B A rationem: ſed per præcedentem vt ratio D C ad B A rationem, ita



d 38. huius.

ratio D B ad C A rationem, ergo A B ratio ad rationem C D, eſt vt ratio D B ad rationem C A. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XLI.

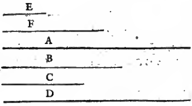
POſitis rationibus AB, CD fiat vt D ad C, ita B ad E, ſtatuatur quoque F media proportionalis inter quantitates. A & E.

Dico rationem AF ad rationem FA, eandem habere proportionem quam habet ratio AB ad CD.

Demonſtratio.

a 18. *huius.*

b 13. *huius.*



RAtio AF ad FA rationem a eſt in duplicata ratione eius quam habet A ad F: cùm igitur proportionales ex conſtructione ſint quantitates A, F, E erit vt A ad E, ita ratio AF ad FA rationem: eſt verò b ratio AB ad rationem CD, vt A ad E, ergo vt ratio AF, ad FA rationem, ita eſt ratio AB ad rationem CD. Quod fuit demonſtrandum.

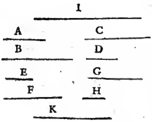
PROPOSITIO XLII.

RAtio AB ad CD rationem, ſit vt ratio EF ad GH rationem; fiat verò vt D ad C, ita B ad I, & vt H ad G, ita F ad K.

Dico A ad I, eandem obtinere rationem quam E ad K.

Demonſtratio.

c *ibid.*



QVandoquidem ponatur vt D ad C, ita B ad I, ergo c ratio AB ad CD rationem eſt vt A ad I. pari modo cùm ſit vt H ad G, ita F ad K, erit etiam vt E ad K, ita ratio EF ad GH rationem. ponitur autem ratio AB ad CD, eandem habere proportionem quam ratio EF ad GH. ergo etiam A ad I, eandem rationem habebit quam denominator E ad K denominatorem. Quod erat demonſtrandum.

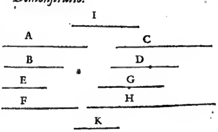
PROPOSITIO XLIII.

SInt rationes AB, CD ſimiles inter ſe quemadmodum & rationes EF, GH.

Dico rationem AB ad CD rationem eſſe, vt ratio EF ad GH rationem.

Demon-

Demonſtratio.

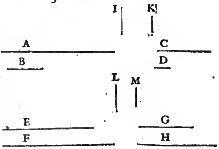


RES tam clara eſt vt demonſtratione vix indigeat, rationes enim eſſe ſimiles, nihil aliud eſt quàm rationes æquales eſſe aut eaſdem inter ſe. Quare cùm rationes AB & CD, ſimiles ponantur, ſibi mutuo æquales erunt, ob eandem cauſam æquales erunt rationes EF, GH. ergo ratio AB ad rationem CD eſt, vt ratio EF ad rationem GH.

PROPOSITIO XLIV.

SIt ratio AB ad rationem CD, vt ratio EF ad rationem GH. Dico permutando rationem AB eſſe ad rationem EF, vt ratio CD ad rationem GH.

Demonſtratio.

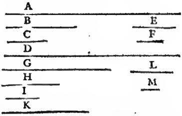


PEr 13. huius inueniantur datarum rationum denominatores I, K; L, M. erit ergo denominator I ad denominatorem K, vt ratio AB ad rationem CD, hoc eſt per hypotheſim vt ratio EF ad rationem GH, hoc eſt vt denominator L ad denominatorem M. Cùm igitur ſit, vt I ad K, ſic L ad M, erit permutando I ad L, vt K ad M. Quare & ratio AB ad rationem EF, eſt vt ratio CD ad rationem GH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLV.

SIt ratio AB ad rationem CD, vt ratio GH ad IK rationem. Dico inuertendo rationem CD ad AB, eandem eſſe cum ratione IK ad GH.

Demonſtratio.



a 13. huius.

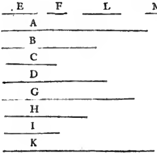
INueniantur a denominatores rationum E, F, L, M. igitur ratio AB ad CD ratio eſt, vt E ad F, & ratio GH eſt, ad IK rationem, vt L ad M, ſed ratio AB eſt ad CD rationem, vt ratio GH ad IK rationem. ergo ratio E ad F, eadem eſt cum ratione L ad M. igitur inuertendo eſt F ad E, vt M ad L, ergo & ratio CD ad AB, vt ratio IK ad GH rationem. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVI.

SI ratio A B eſt ad C D rationem, vt ratio G H ad rationem I K. Dico componendo rationem A B cum ratione C D ad rationem C D eandem habere proportionem quam ratio G H cum ratione I K ad rationem I K.

Demonſtratio.

a Per 15. huius.



INueniantur[a] denominarores harum rationum eſſe E, F, L, M, igitur vt ratio A B ad C D rationem, ita E ad F; & vt G H ratio ad rationem I K, ita L ad M. quia verò ratio A B ad C D rationem ponitur eſſe vt ratio G H ad I K rationem, ergo eſt E ad F, vt, L ad M. Deinde cùm ſit E cum F ad F, vt L cum M ad M; hinc etiam ratio A B, cum C D ad rationem C D, eſt vt ratio G H cum I K ad rationem I K. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVII.

QVod ſi ratio A B cum ratione C D ad rationem C D, ſit vt ratio G H cum ratione I K ad I K rationem: Dico diuidendo rationem A B, eandem habere proportionem ad rationem C D quam habet ratio G H ad rationem I K.

Demonſtratio.

b Ibid.

COnſtituantur[b] ſingularum rationum denominatores E, F, L, M. Quoniam ratio A B cum C D ad C D, eſt vt ratio G H cum I K ad I K, igitur denomitor E cum F ad F, erit vt denominator L cum M ad M. igitur diuidendo eſt E ad F, vt L ad M. adeoque etiam eſt ratio A B ad C D, vt eſt G H ad I K rationem. Quod erat demonſt.

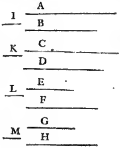
PROPOSITIO XLVIII.

SIt ratio A B cum ratione C D ad rationem C D, vt ratio E F cum ratione G H ad rationem G H.

Dico per conuerſionem rationis rationem A B cum ratione C D eſſe ad rationem A B, vt ratio E F cum ratione G H ad rationem E F.

Demon-

Demonſtratio.



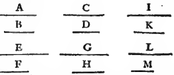
Exhibeantur, rationum denominatores I, K, L, M. Erit ergo I cum K ad K, vt ratio A B, cum ratione C D ad rationem C D, hoc eſt ex hypotheſi, vt ratio E F cum ratione G H ad rationem G H, hoc eſt vt L cum M ad M. Cùm igitur ſit vt I cum K ad K, ſic L cum M ad M, erit conuertendo, I cum K ad I, vt L cum M ad L. Quare & ratio A B cum ratione C D eſt ad rationem A B, vt ratio E F cum ratione G H ad rationem E F. Quod fuit demonſtrandum. a Per 13. huius.

PROPOSITIO XLIX.

Sit ratio A B ad rationem C D, vt ratio E F ad rationem G H, & C D ratio ad rationem I K, vt ratio G H ad rationem L M.

Dico ex æquali rationem A B eſſe ad rationem I K, vt ratio E F eſt ad rationem L M.

Demonſtratio.

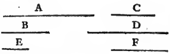


Qvoniam ratio A B eſt ad rationem C D, vt ratio E F eſt ad rationem G H, erit [b] permutando ratio A B ad rationem E F, vt ratio C D ad rationem G H. Similiter quia ratio C D eſt ad rationem I K, vt ratio G H ad rationem L M, erit permutando vt ratio C D ad rationem G H, hoc eſt (quemadmodum iam oſtendi) vt ratio A B ad rationem E F, ita ratio I K ad rationem L M. Rurſum igitur permutando ratio A B eſt ad rationem I K, vt ratio E F ad rationem L M. Quod erat demonſtrandum. b 44. huius.

PROPOSITIO L.

Si ratio A B eſt ad rationem C D, vt ratio A E eſt ad rationem C F. Dico rationem A C ad rationes B D & E F eandem habere proportionem.

Demonſtratio.



Vt ratio A B eſt ad rationem C D, ſic [c] ratio A C eſt ad rationem B D: & vt ratio A E eſt ad rationem C F, ſic [d] ratio A C eſt ad rationem E F. ſed ex hypotheſi ratio A B eſt ad rationem C D, vt ratio A E ad rationem C F. Ergo ratio A C eſt ad rationem B D, vt ratio eadem A C ad rationem E F. Quod fuit demonſtrandum. c 39. huius; d ibid.

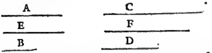
Aliter.

a 44. huius. b 7. huius. QVoniam ratio A B eſt ad rationem C D, vt ratio A E ad rationem C F, erit permutando [a] ratio A B ad rationem A E, vt ratio C D ad rationem C F, hoc [b] eſt E erit ad B, vt F ad D. Quare inuertendo & permutando ratio B D æquatur rationi E F. Ergo ratio A C ad rationes B D, & E F eandem habet proportionem. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LI.

SI ratio A B eſt ad C D rationem, vt ratio E B ad F D rationem: Dico rationem quoque E F ad B D, eam habere proportionem quàm A C ratio ad rationem B D.

Demonſtratio.



QVoniam ratio A B eſt ad C D rationem, vt ratio E B ad rationem F D. igitur permutando ratio A B ad E B [c] rationem eſt vt ratio C D ad rationem F D: ſed ratio [d] A B ad E B, eſt vt A ad E. igitur ratio quoque C D ad F D, eſt vt ratio A ad E, ſed ratio C D ad F D, eſt ratio C ad F, igitur ratio A ad E, eadem eſt cum ratione C ad F. vndè A ad C eſt, vt E ad F. ergo ratio A C ad B D, eadem eſt cum ratione E F ad B D.

c Per 44. huius. d 1. huius.

Aliter.

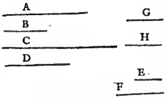
e 59. huius. RAtio A B eſt ad rationem C D, vt [e] ratio A C ad rationem B D: & ratio E B eſt ad rationem F D, vt ratio E F ad rationem B D. ſed ratio A B ex hypotheſi eſt ad rationem C D, vt ratio E B eſt ad rationem F D. ergo & ratio A C eſt ad rationem B D, vt ratio E F ad rationem B D. Quod fuit demonſtrandum.

Propoſitio ſequens ita per ſe clara eſt vt potuerit abſque demonſtratione aſſumi, conabimur eam nihilominus hoc loco demonſtrare.

PROPOSITIO LII.

POnantur A B, C D ſimiles rationes, & quæuis ratio E F. Dico quod ratio A B ad rationem E F, eandem rationem obtineat quam ratio C D ad illam ipſam rationem E F.

Demonſtratio.



FIat vt F ad E, ita B ad G; item vt F ad E, ita D ad H. erit itaque ratio A B ad E F, vt A ad G, item C D ad E F, vt C ad H. [f] Sed ratio A ad G componitur ex ratione A ad B, hoc eſt C ad D, & ex ratione B ad G, hoc eſt F ad E: item ratio C ad H, componitur ex ratione C ad D, & ex ratione D ad H, hoc eſt F ad E; igitur ratio A ad G. ex iiſdem rationibus componitur ex quibus componitur ratio C ad H. ergo eſt vt [g] A ad G, ſic C ad H, ſed vt A ad G, ſic ratio A B ad rationem E F, & vt C ad H, ſic ratio C D ad rationem E F. ergo vt ratio A B ad rationem E F, ſic ratio C D ad rationem E F. Quod erat demonſtrandum.

f Per 13. huius. g Princip. 3. huius.

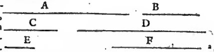
PRO-

PROPOSITIO LIII.

DAtis duabus rationibus A B, C D, ponatur & tertia E F ſimilis rationi C D.

Dico rationem A E eſſe ad B F, vt ratio A C ad B D.

Demonſtratio.



QVoniam rationes C D, E F ponuntur ſimiles ſiue eædem, ratio A B ad vtramque, eandem habebit proportionem: ſed vt ratio A B ad rationem E F ita [a] ratio A E ad rationem B F: & vt ratio A B ad rationem C D, ita ratio A C ad rationem B D. Ergo ratio A E ad rationem B F, eſt vt ratio A C ad rationem B D. Quod erat demonſtrandum.

a 19. huius.

PROPOSITIO LIV.

SI eſt ratio A B ad C D, vt A E ratio eſt ad rationem C F. Dico quod B ſit ad D vt eſt E ad F.

Demonſtratio.



QVoniam ratio A B eſt ad C D rationem vt ratio A E ad C F rationem, ergo [b] ratio A B eſt ad A E rationem, vt ratio C D ad C F rationem: ratio autem A B ad A E rationem, eſt vt E ad B, [c] ergo ratio C D ad C F, eſt vt ratio E ad B: ſed ratio quoque C D ad C F, eſt vt F ad D, [d] igitur ratio E ad B, eſt vt F ad D. vnde vt E ad F, ita B ad D, & conſequenter B ad D, vt E ad F. Quod fuit demonſtrandum.

b Per 44. huius.

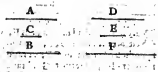
c Per 7. huius.

d Per eandem.

PROPOSITIO LV.

SI ratio A B eſt ad C B rationem, vt ratio D E ad rationem D F. Dico A ad C eandem habere rationem quam F ad E.

Demonſtratio.



RAtio A B ad C B, eſt [e] vt A ad C, & vt ratio D E ad D F rationem, ſic F eſt ad E: ponitur autem ratio D E ad D F, eandem habere proportionem quæ eſt inter A B & C B rationes: igitur vt A ad C, ſic F ad E.

e 1. huius.

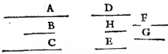
PROPOSITIO LVI.

SIt ratio A B ad C B rationem, vt ratio D E ad F G rationem. Deinde fiat vt G ad F, ita E ad H.

Dico A C, & D, H quantitates eſſe proportionales.

Demon-

Demonſtratio.



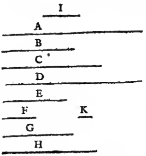
a Per 2. huius.
b Per 13. huius.

QVoniam eadem eſt ratio AB ad CB, cum ratione DE ad FG, & a cùm ratio AB ad CB, ſit vt A ad C, erit pariter ratio DE ad FG, vt A eſt ad C. ſed b ratio DE ad FG, eſt vt D ad H: ergo vt A ad C, ita eſt D ad H, proportionales itaque ſunt AC & D,H. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LVII.

SIt ratio AB ad CD rationem, vt ratio EF ad rationem GH: ſit autem ratio A ad B eadem cum ratione E ad F.
Dico etiam rationem C ad D, eandem eſſe cum ratione G ad H.

Demonſtratio.



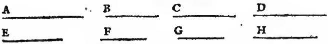
c Per 54. huius.
d per 13 huius.
e Per eandem.

INuentis denominatoribus rationum AB, CD ſcilicet A & I, item rationum EF, GH denominatoribus E & K, quoniam rationes ſunt proportionales, erit vt A ad I, ita E ad K. itaque cùm A ad B, etiam ſit ad B, vt E ad F, erit c etiam B ad I, vt F ad K. ſed vt D ad C, ita eſt d B ad I, ergo vt D ad C, ita eſt F ad K. ſed H ad G eſt e vt F ad K. ergo vt H ad G, ita D eſt ad C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LVIII.

SIt ratio AB ad EF rationem vt CD ratio ad GH rationem.
Dico rationem AE ad rationem BF, eandem habere proportionem quam ratio CG ad DH rationem.

Demonſtratio.



f 59. huius.

RAtio AE eſt ad rationem BF, vt f ratio AB ad rationem EF: & ratio CG eſt ad rationem DH, vt ratio CD ad rationem GH. ſed ratio AB eſt ex hypotheſi ad rationem EF, vt ratio CD ad rationem GH. ergo ratio AE eſt ad rationem BF, vt ratio CG ad rationem DH. Quod erat demonſtrandum.

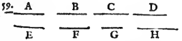
PRO-

PROPOSITIO LIX.

DAtæ ſint 8. quantitates A,B,C,D,E,F,G,H.

Dico proportionem rationum A E, B F eſſe ad proportionem rationum C G, D H, vt proportio rationum A B, E F, eſt ad proportionem rationum C D, G H.

Demonſtratio.



QVoniam [a] ratio A E eſt ad rationem B F, vt ratio A B ad rationem E F, erit proportio rationum A E, B F eadem cum proportione rationum A B, E F. ſimiliter quoniam ratio C G eſt ad rationem D H, vt ratio C D ad rationem G H, erit proportio rationum C G, D H eadem cum proportione rationum C D, G H. Ergo proportio rationum A E, B F eſt ad proportionem rationum A B, E F, vt proportio rationum C G, D H eſt ad proportionem rationum C D, G H. ergo [b] permutando proportio rationum A E, B F, eſt ad proportionem rationum C G, D H vt proportio rationum A B, E F ad proportionem rationum C D, G H. Quod erat demonſtrandum.

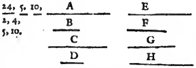
[a] 39. huius.
[b] 44. huius.

PROPOSITIO LX.

SIt ratio A B ad rationem C D, vt ratio E F ad G H rationem.

Dico quod ratio A B ad rationem H G, ſit vt ratio E F ad D C rationem.

Demonſtratio.



CVm ratio A B ſit ad rationem C D, vt ratio E F ad rationem G H, erit [c] permutando ratio A B ad rationem E F, vt ratio C D ad rationem G H; hoc eſt vt ratio [d] H G ad rationem D C. Rurſum igitur permutando ratio A B eſt ad rationem H G, vt ratio E F ad rationem D C. Quod erat demonſtrandum.

[c] 44. huius.
[d] 38. huius.

QVod ſi fuerit ratio A B ad rationem H G, vt ratio E F ad rationem D C.

Dico rationem A B eſſe ad C D rationem, vt ratio E F ad rationē G H.

Demonſtratio.

QVoniam eſt ratio A B ad H G rationem, vt ratio E F ad rationem D C; erit permutando ratio A B, ad rationem E F, vt ratio H G ad rationem D C, hoc eſt per 38. huius, vt ratio C D ad rationem G H; permutando igitur patet propoſitum.

PROPOSITIO LXI.

SIt denuo ratio AB ad rationem CD, vt ratio EF ad rationem GH. Dico rationem AE eſſe ad rationem HD, vt ratio BF eſt ad rationem GC.

Demonſtratio.



QVoniam ratio AB eſt ad rationem CD, vt ratio EF eſt ad rationem GH, erit a permutando ratio AB ad rationem EF, vt ratio CD ad rationem GH. ergo & b ratio AE eſt ad rationem BF, vt ratio CG ad rationem DH. ſed ratio CG eſt ad rationem DH vt c ratio HD ad rationem GC. ergo ratio AE eſt ad rationem BF, vt ratio HD ad rationem GC: vnde permutando ratio AE eſt ad rationem HD, vt ratio BF ad rationem GC. Quod erat demonſtrandum. Hanc quoque per præcedentem conuertes.

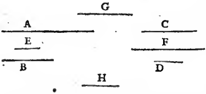
a 44. huius.
b 58. huius.
c 38. huius.

PROPOSITIO LXII.

SImiles ponantur rationes AB, & CD, & inter AB, CD ponantur E & F.

Dico rationem AE eſſe ad CF rationem, vt ratio FD ad rationem EB.

Demonſtratio.



FE
EH

AC, E
CG

FIat vt F ad C, ſic E ad G, erit d vt A ad G, ſic ratio AE ad rationem CF. Rurſum fiat vt B ad E, ſic D ad H: erit vt F ad H, ſic ratio FD ad rationem EB. Deinde quoniam eſt vt F ad C, ſic E ad G, erit permut. vt F ad E, ſic C ad G: item quoniam eſt vt B ad E, ſic D ad H, erit permut. B ad D, vt E ad H: ſed ex hypotheſi vt A, eſt ad C, ſic B ad D. ergo A, eſt ad C vt E eſt ad H. Quoniam igitur eſt vt A ad C, ſic E ad H, & ſicut paulò antè oſtendi, vt C ad G, ſic F ad E, erit ex æqua, ſed ratione perturbata vt A ad G ſic F ad H, hoc eſt quemadmodum anteà demonſtraui, vt ratio AE eſt ad rationem CF, ſic erit ratio FD ad rationem EB. Quod erat demonſtrandum.

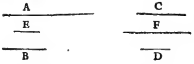
d 13. huius.

PROPOSITIO LXIII.

SInt rurſum ſimiles rationes AB, CD, & ſumantur quæuis E, & F. Dico rationem EA eſſe ad rationem FC, vt ratio EB eſt ad rationem FD.

Demon-

Demonſtratio.



RAtio E A eſt ad rationem E B, vt [a] B ad A, hoc eſt ex hypotheſi vt D ad C, hoc eſt vt ratio F C ad rationem F D. igitur permutando [b] ratio E A eſt ad rationem F C, vt ratio E B ad rationem F D. Quod erat demonſtrandum.

a 7.huius.

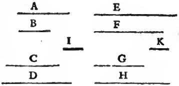
b 44.huius.

PROPOSITIO LXIV.

SIt ratio A B ad rationem C D, vt ratio E F ad rationem G H. fiat deinde vt D ad C, ita B ad I, & vt H ad G, ita F ad K.

Dico rationem A B eſſe ad E F rationem, vt ratio F K ad B I.

Demonſtratio.



QVoniam ratio A B eſt ad C D rationem, vt ratio E F ad G H, igitur [c] ratio A ad I, eadem eſt cum ratione E ad K: ergo per 62. huius, vt ratio A B ad rationem E F, ſic ratio F K ad rationem B I, Quod erat demonſtrandum.

c Per 41. huius.

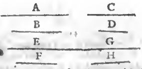
PROPOSITIO LXV.

SIt ratio A B ad rationem E F, vt ratio C D ad G H rationem, ſitque A ad B, vt C ad D.

Dico eſſe E ad F, vt G ad H. ſi verò ſit A ad E, vt C ad G.

Dico B ad F eandem habere rationem quam D ad H.

Demonſtratio.



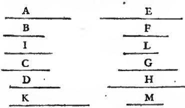
QVoniam ratio A B ad E F ponitur eſſe vt ratio C D ad G H rationem, erit igitur ratio A B ad rationē C D, vt ratio E F [d] ad G H rationem. ergo cùm ſit ratio A ad B eadem quæ C ad D, erit & ratio E ad F, eadem cum ratione G ad H. Quod erat demonſtrandum.

d 44. huius.

Secundam quoque partem ſic demonſtrabimus. quoniam eſt ratio A B ad rationem C D vt ratio E F ad rationem G H; erit etiam per 58. huius ratio A C ad rationem B D, vt ratio E G ad rationem F H: & permutando ratio A C eſt ad rationem E G, vt ratio B D ad rationem F H. ſed ratio A C eadem eſt rationi E G, cùm ex hypotheſi A ſit ad E, vt C ad G. Ergo & ratio B D eadem eſt rationi F H, adeoque & ratio B F, eadem rationi D H, hoc eſt B eſt ad F, vt D ad H. Quod erat ſecundo loco probandum.

PROPOSITIO LXVI.

SIt ratio A B ad rationem C D, vt ratio E F ad tationem G H, & tatio B I ad D K rationem, vt ratio F L ad rationem H M.
Dico eſſe I ad K, vt L eſt ad M.



a 65. huius.

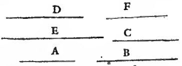
Demonſtratio.

QVoniam eſt ratio A B ad rationem C D, vt ratio E F ad G H rationem, & ratio A ad C, eadem rationi E ad G, igitur[a] B eſt ad D, vt F ad H: eſt autem ratio B I ad D K rationem, vt ratio F L ad H M rationem, & eſt oſtenſum B eſſe ad D, vt F ad H, igitur ratio I ad K, eadem eſt eum ratione L ad M.

PROPOSITIO LXVII.

SInt quantitates A, B, C, D, E.
Dico proportionem rationum D A, C B, ad proportionem rationum E A, C B, eſſe vt D ad E.

Demonſtratio.



b Per 13. huius.

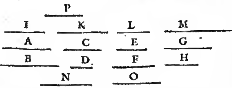
FIat vt B ad C, ita A ad F, ratio igitur D A, [b] ad rationem C B, eſt vt D ad F, ratio quoque E A ad rationem C B, eſt vt E ad F. ergo vt ratio D F, ad E F rationem, ita proportio rationum D A, C B ad proportionem rationum E A, C B: eſt autem[c] ratio D F ad E F, vt D ad E, igitur proportio rationum D A, C B ad proportionem rationum E A, C B, eſt vt D ad E. Quod fuit demonſtrandum.

c Per 2. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

DAtis quotuis pati numeto rationibus.
Opotteat rationes exhibere quæ continentur inter rationum datatum denominatores.

Conſtructio & demonſtratio.



DAtæ ſint rationes A B, C D, E F, G H quarum denominatores ſint I, K, L, M. fiat vt M ad L, ita K ad P. Dico I ad P, rationem eſſe eam quæ poſtulatur. ratio enim I ad P exhibet [d] proportionẽ quam rationes continent I K & L M. qui termini ex conſtructione ſunt denominatores rationum datarum A B, C D, E F, G H. Igitur manifeſtum eſt rationem I ad

d 13. huius.

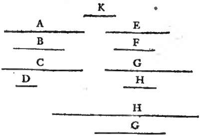
ad P eam eſſe quæ doceat proportionem quam continent inter ſe denominatores rationum datarum.

Quod quatuor aſſumpſerim rationes, eo feci conſilio quòd ex eo numero ſufficienter praxis colligi poſſit de quouis numero rationum qui par ſit. nam ſi numerus rationũ impar fuerit, antecedens remanebit ſine conſequente: quod per ſe eſt manifeſtũ.

PROPOSITIO LXIX.

Datis tribus rationibus quibuſcunque AB, CD, EF & quantitate G. Oporteat inuenire quantitatem H, vt ſit quemadmodum ratio AB, ad rationem CD, ita EF ratio ad rationem GH.

Conſtructio & demonſtratio.



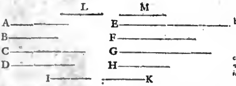
Fiat vt D ad C, ita B ad K: & per 31. huius, inueniatur quantitas H, vt ſit quemadmodum A ad K, ſic ratio EF ad rationem GH. Dico factum: nam ratio AB eſt ad rationem CD, vt [a] A ad K, hoc eſt ex conſtructione vt ratio EF ad rationem GH. a 13. *huius.*

Si volueris quantitatem datam G eſſe conſequens rationis quæſitę, ſimili diſcurſu per 31. huius habebitur intentum.

PROPOSITIO LXX.

Datæ ſint tres rationes AB, CD, EF, & alia quantitas G. Oporteat autem determinare quantitatem vt proportio rationum AB, CD, ad proportionem rationum EF, GH, datam rationem obtineat I ad K.

Conſtructio & demonſtratio.



Fiat vt D ad C, ſic B ad L. erit ergo [b] proportio rationum AB, CD eadem cum ratione AL. Inueniatur [c] deinde quantitas M, ſic vt ratio AL ſit ad rationem EM, vt I ad K. Demum fiat vt M ad F, ſic G ad H: eritque inuertendo H ad G, vt F ad M: ac proinde proportio rationum EF, GH eadem eſt cum ratione EM. Quoniam igitur proportio rationum AB, CD eadem eſt cum ratione AL, & proportio rationum EF, GH, eadem eſt cum ratione EM, eſtque per conſtructionem ratio AL ad rationem EM, vt I ad K: etiam proportio rationum AB, CD, erit ad proportionem rationum EF, GH, vt I ad K. Factum igitur eſt quod petebatur.

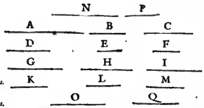
b *ibid.*
c 13. *huius vel 31. huius.*

PROPOSITIO LXXI.

SIt ratio AB ad GH, vt eſt ratio DE ad KL rationem. ſit inſuper ratio BC ad HI, vt eſt EF ratio ad rationem L ad M.

Dico proportionem rationum AB, DE, eſſe ad proportionem rationum BC, EF, vt proportio rationum GH, KL ad proportionem rationum HI, LM.

Demonſtratio.



a 44. *huius.*

b 42. *huius.*

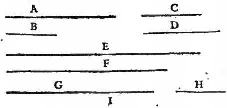
FIat vt E ad D, ſic B ad N; & vt F ad E, ſic C ad P, vt verò L ad K, ſic H ad O, vt demum M ad L, ſic I ad Q. Quoniam ex hypotheſi ratio AB eſt ad rationem GH, vt ratio DE ad rationem KL, erit permutando a ratio AB ad rationem DE, vt ratio GH ad rationem KL. ergo b A eſt ad N, vt K ad O, hoc eſt ratio AN æquatur rationi GO. eodem modo oſtendam rationem BP æquari rationi HQ. ergo ratio AN eſt ad rationem GO, vt ratio BP ad rationem HQ: & permut. ratio AN eſt ad rationem BP, vt ratio GO ad rationem HQ. ſed per 13. huius proportio rationum AB, DE eadem eſt cum ratione AN, & proportio rationum BC, EF eadem cum ratione BP: item proportio rationum GH, KL, eadem eſt cum ratione GO, proporrio denique rationum HI, LM eadem cum ratione HQ. ergo proportio rationum AB, DE eſt ad proportionem rationum BC, EF, vt proportio rationum GH, KL, ad proportionem rationum HI, LM. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXII.

DAtæ ſint tres rationes AB, CD, EF; denominatores autem AB, CD rationum, quantitates G & H.

Dico ſi quantitas I ſit denominator rationis EF reſpectu G denominatoris rationis AB, etiam erit eadem quantitas I denominator rationis EF reſpectu H denominatoris rationis CD.

Demonſtratio.



c *Definit.* 2. *huius.*

QVoniam ponitur G denominator rationis AB reſpectu H denominatoris CD rationis, igitur vt c CD ratio ad rationem AB, ita denominator H ad denominatorem G; cumque ſtatuatur rationis AB denominator G, reſpectu quantitatis I quæ eſt denominator rationis EF, erit quoque vt ratio AB ad rationem EF, ita denominator G ad I denominatorem. ergo ex æquo erit vt ratio

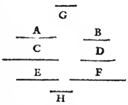
ratio C D ad rationem E F, ita denominator H ad I denominatorem. Quare & I denominator erit rationis E F reſpectu H denominatoris rationis eius quam habet C ad D. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXIII.

Sit ratio A ad B maior ratione C ad D; & ſumatur quæuis alia ratio E ad F.

Dico rationem A B ad rationem E F, maiorem habere proportionem quàm ratio C D.

Demonſtratio.



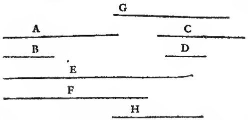
Fiat vt D ad C, ſic B ad G, & vt F ad E, ſic B ad H. erunt per 13. huius A & G, denominatores rationum A B, C D, itemque A & H, denominatores rationum A B, E F. ergo per præcedentem G & H, ſunt etiam denominatores rationum C D, E F. Iam verò quia vt ratio A B eſt ad rationem C D, ita eſt A ad G, per definitionem 2. huius, eſtque ratio A B maior ratione C D, ex hypotheſi, etiam A maior eſt quàm G. ergo A maiorem rationem habet ad H, quàm G ad H. ſed vt A ad H, ſic ratio A B ad rationem E F, & vt G ad H, ſic ratio C D ad rationem E F. Ergo & ratio A B ad rationem E F maiorem habet proportionem quàm habeat ratio C D ad rationem E F. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXIV.

Quod ſi ratio A B ad C D rationem, proportionem habeat maiorem quàm ratio E F ad C D rationem:

Dico rationem A B maiorem eſſe quàm ſit ratio E F.

Demonſtratio.

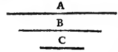


Fiat vt D ad C, ſic B ad G, & vt F ad E, ſic B ad H. Erunt [a] itaque A & G denominatores rationum A B, C D, item A & H denominatores rationum A B, E F. [a 13. huius.] ergo [b] G & H ſunt denominatores rationum C D, E F. Iam verò quoniam eſt vt ratio A B ad rationem C D, [c] ita A ad G, & vt ratio E F ad rationem C D, ita H ad G, eſtque ratio A B ad C D rationem in maiori, quam E F ratio ad rationem C D; erit quoque A ad G, in maiori quàm H ad G. ergo A denominator rationis A B maior eſt quàm H denominator rationis E F. ergo ratio [d] A B maior eſt ratione E F. Quod erat demonſtrandum. [b 71. huius.] [c Defin. 2. huius.] [d ibid.]

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS TERTIA.

De rationum multiplicatione ſeu compoſitione.

Rationum multiplicationem à compoſitione non differre ſatis arbitror, is intelliget, qui non ignoret definitiones 5. libri ſexti elementorum, eaque legerit quæ in ſecundo principio huius libri expoſuimus. Iuuat tamen, quando ſæpiùs deinceps id à me aſſumi debet, Lectori verbo vno memoriam refricare.



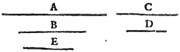
Datæ ſint tres quantitates A, B, C, *aut plures: Dicimus ergo, rationem* A C *& compoſi ex rationibus* A B, B C, *& produci ex iiſdem rationibus inter ſe multiplicatis, ac proinde rationem omnem produci ex multiplicatione earum rationum, quæ ipſam componunt.*

PROPOSITIO LXXV.

DAtæ ſint rationes A B, & C D. Fiat vt C ad D, ita B ad E.

Dico rationem A B ductam in rationem C D producere rationem A E.

Demonſtratio.



RAtiones A B, B E componunt rationem A E. ſed ratio B E eſt ratio C D ex conſtructione. Ergo ratio A B cum ratione C D componit rationem A E. ergo ratio A B ducta in rationem C D producit rationem A E. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium primum.



HInc facilè deducemus eandem rationem produci ex ratione A B in rationem C D, quæ fit ex ratione C D in rationem A B. fiat enim vt C ad D, ſic B ad E; & vt A ad B, ſic D ad F. igitur per 75. ratio A B in rationem C D, facit rationem A E, & ratio C D in rationem A B facit rationem C F. Atqui rationes A E, C F eædem ſunt. Ergo, &c. quod autem rationes A E, C F ſint eædem, ſic oſtenditur. per conſtr. D eſt ad F, vt A ad B; & C eſt ad D, vt B ad E. ergo 23. quinti, C eſt ad F, vt A ad E.

Corollarium ſecundum.

DAtis duabus rationibus A B, C D, exhibebimus rationem quæ producitur ex ratione A E ducta in rationem C D.

Fiat

Fiat enim vt C ad D, ſic A ad E, Dico rationem AB ductam in rationem CD producere rationem AE. Demonſtratio patet ex præcedenti.

PROPOSITIO LXXVI.

Data ſit quæuis ratio A ad B.

Dico rationem AB ductam in rationem BA producere rationem æqualitatis.

Demonſtratio.

Quantitati A æqualis aſſumatur quantitas C: ratio A ad C componitur ex ratione AB, & ratione BC,[a] hoc eſt ratio A ad C, producitur ex multiplicatione rationum AB, & BC. ſed ratio BC eſt ratio BA, eſt enim C æqualis A. Ergo ratio A ad C etiam producitur ex multiplicatione rationum AB, & BA. ſed ratio AC eſt ratio æqualitatis; liquet ergo propoſitum.

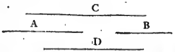
[a] *Princip. 2. huius.*

PROPOSITIO LXXVII.

Si inter A & B quiuis ponantur termini C, D.

Dico AC rationem ductam in CB eandem producere quam ratio AD ducta in DB rationem.

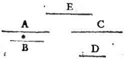
Demonſtratio.



Ratio A ad B, componitur ex rationibus AC & CB, hoc eſt[b] producitur ex rationum AC & CB multiplicatione. Eadem quoque ratio A ad B, componitur ex rationibus AD, & DB; hoc eſt producitur ex ductu rationum AD, DB. Ergo ratio AC ducta in rationem CB, eandem producit rationem quam ratio AD ducta in rationem DB. Quod erat demonſtrandum.

[b] *Ibid.*

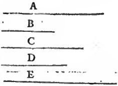
PROPOSITIO LXXVIII.



Datæ ſint quatuor quantitates A, B, C, D.

Dico rationem AC ductam in rationẽ BD eandem producere rationem quam ratio AD, ducta in rationem BC.

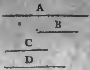
Demonſtratio.



Fiat vt B ad D, ſic C ad E. Ergo per 75. huius A ad E, producitur ex multiplicatione rationum AC, & BD. Deinde quia eſt vt B ad D, ſic C ad E, erit permutando B ad C, vt D ad E. ergo ratio AD ducta in rationem DE idem producit quod ratio AD ducta in rationem BC. ſed ratio[c] AD ducta in rationem DE producit rationem AE. ergo & ratio AD ducta in rationem BC producit rationem AE, ſed hanc etiam producit ratio AC, ducta in rationem BD, vt oſtendi ſuprà. Ratio igitur AC ducta in rationem BD, idem producit quod ratio AD ducta in rationem BC. Quod erat demonſtrandum.

[c] *Ibid.*

Corollarium.

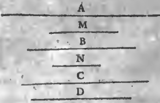


Hinc ſequitur datis tribus quantitatibus A, C, D. quod ratio A C ducta in rationem C D, producat idem quod ratio A D ducta in rationem æqualitatis. Sumatur enim B, æqualis C, per 78. ductus rationum A C, B D producit idem quod ductus rationum A D, B C. Atqui rationes A C, B D, ſunt rationes A C, C D (eſt enim B æqualis C:) ergo ductus rationum A C, C D idem producit quod ductus rationum A D, B C, hoc eſt ratio A D ducta in rationem æqualitatis.

PROPOSITIO LXXIX.

Iiſdem poſitis:
Dico rationem A B ductam in rationem C D, idem producere quod ratio A D ducta in rationem C B.

Demonſtratio.



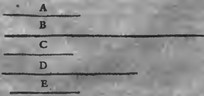
a 75. huius.

Fiat vt C ad D, ita B ad N; ergo ratio A B ducta in rationem C D, producit rationem A N. rurſum fiat vt A ad D, ſic B ad M. igitur a rationes A D, C B inter ſe multiplicatæ producunt rationem C M. Iam verò quoniam rationem A C componunt tā rationes A B, B C, quā A D, D C rationes; idem producent rationes A D, D C inter ſe multiplicatæ quod rationes A B, B C, ſed per conſtruction. ratio D C eſt ratio N B, & ratio A D eſt ratio B M. ergo etiam rationes N B, B M idē producunt quod rationes A B, B C. ſed rationes A B, B C producunt rationem A C, & rationes N B, B M producunt rationem N M. rationes igitur A C, N M ſunt eædem. Igitur permutando etiam rationes A N, C M eædem ſunt. Atqui ſuprà oſtendi rationes A B, C D producere rationem A N, rationes verò A D, C B producere rationem C M. ergo rationes A B, C D idem producunt quod rationes A D, C B. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXX.

Iiſdem poſitis:
Dico idem produci ex multiplicatione rationum A C, B D, quod fit ex ductu rationum A B, C D, & B C bis ſumptæ.

Demonſtratio.



b Prim. 2. huius.

Fiat vt B ad C, ſic D ad E, ratio A ad E, componitur ex rationibus A B, B C, C D, D E, hoc eſt, quoniam rationes B C, D E, ex conſtruct. ſunt eędem, ex rationibus A B, C D, & B C bis ſumptæ. ergo ratio b A ad E producitur ex ductu rationum A B, C D, & B C bis ſumptæ. ſed ratio A ad

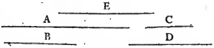
A ad E, etiam cōponitur ex rationibus A D & D E, hoc eſt ex rationibus A D, B C, ac proinde ratio A ad E producitur ex ductu rationum A D, B C. Idem ergo producit ductus rationum A B, C D, & B C bis ſumptæ quod producit ductus rationum A D, B C. ſed per 78. huius ductus rationum A D, B C idem producit, quod ductus rationum A C, B D. ergo ductus rationum A B, C D, & B C bis ſumptæ idem producit quod ductus rationum A C, B D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXI.

Sint duæ quæuis rationes A B, C D.

Dico proportionem rationum A B, C D eſſe eandem cum ea quæ oritur ex multiplicatione rationum A B, D C.

Demonſtratio.



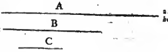
Fiat vt D ad C, ſic B ad E. patet ex 75. huius rationem A E produci ex multiplicatione rationum A B, D C. Deinde per 13. huius ratio A B eſt ad rationem C D, vt A ad E, ac proinde proportio rationum A B, C D eadem eſt cum ratione A E. ergo proportio rationum A B, C D eadem eſt cum ea quæ fit ex multiplicatione rationum A B, D C. Quod fuerat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXII.

Data ſit quæuis ratio A ad B.

Dico quod ratio A B ducta in ſe, duplicata ſit eius quam habet A ad B.

Demonſtratio.



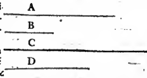
Fiant proportionales A, B, C. erit [a] ergo ratio A ad C, illa quæ fit ex A B ducta in B C, hoc eſt in ſeipſam. ſed ratio A ad C duplicata eſt eius quam habet A ad B, igitur ratio A ad B, ducta in ſe ipſam duplicata eſt rationis A ad B. Quod erat demonſtrandum. a Princ. 2. huius.

PROPOSITIO LXXXIII.

Ratio A ad B ſimilis ſit rationi C ad D.

Dico rationem A B ductam in D C, producere rationem æqualitatis.

Demonſtratio.

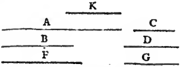


Qvoniam ratio A B ſimilis eſt rationi C D, erit inuertendo ratio B A ſimilis rationi D C. quod ergo fit ex multiplicatione rationis A B in rationem B A; fit etiam ex ductu rationis A B in rationem D C. ſed ex ductu rationis A B in ratione B A [b] producitur ratio æqualitatis; ergo & ex ductu rationis A B in rationem D C, producitur ratio æqualitatis. Quod erat demonſtrandum. b 76. huius.

PROPOSITIO LXXXIV.

DEntur quatuor quantitates AB, CD; & A ductum in D producat F, & C ductum in B, producat G.
Dico rationem AB ad CD rationem, eſſe vt F eſt ad G.

Demonſtratio.



a Per 13. huius.

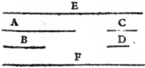
FIat vt D ad B, ita C ad K, erit itaque [a] ratio AB ad CD rationem, vt A ad K, ratio verò A ad K, compoſita eſt ex ratione A ad C, & C ad K: ratio quoque F ad G, compoſita eſt ex ratione A ad C, & D ad B (quia A in D produxit F, & C in B produxit G; igitur cùm ratio D ad B, ſit ex conſtruct. eadem cum ratione C ad K, erit ratio A ad K, ex ijſdem rationibus compoſita, ex quibus ratio F ad G, componitur. ergo [b] A eſt ad K, hoc eſt ratio AB eſt ad rationem CD, vt F eſt ad G. Quod erat demonſtrandum.

b Princip. 3. huius.

PROPOSITIO LXXXV.

POſitis quatuor terminis AB, CD. Si A ductum in D producat E quantitatem æqualem F, quę fit ex ductu C in B.
Dico rationes AB & CD æquales eſſe ſeu ſimiles.

Demonſtratio.



PEr præced. ratio AB ad rationem CD, eſt vt E ad F, ſed E ad F ratio æqualitatis eſt, cùm æquales ſint ex hypotheſi; igitur ratio AB æqualis eſt ſeu ſimilis rationi CD. Quod erat demonſtrandum.

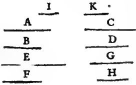
Corollarium.

HInc ſi AB, CD ſimiles fuerint rationes, A in D producet idem quod C in B.

PROPOSITIO LXXXVI.

DAtæ ſint quatuor rationes proportionales AB, CD, EF, GH.
Dico ex prima AB ducta in quartam GH, idem produci quod ex ductu ſecundæ CD, & tertiæ EF.

Demonſtratio.



c 13. huius.
d 75. huius.

FIat vt G ad H, ſic B ad I; & vt E ad F, ita D ad K. erit [c] ratio AB ad rationem HG vt A ad I, & ratio CD ad rationem FE, vt C ad K. Rurſum quoniam eſt vt G ad H, ſic B ad I, ratio [d] AI producitur ex multiplicatione rationum AB, GH. Et quia eſt vt E ad F, ſic D ad K, ratio CK producitur ex ductu rationum EF, CD. Deinde quia ratio AB eſt

AB eſt ad rationem CD, vt ratio EF ad rationem GH. etiam [a] ratio AB eſt ad rationem GH, vt ratio CD ad rationem FE. ſed antè oſtendi A eſſe ad I, vt ratio AB eſt ad rationem GH, & C eſſe ad K, vt ratio CD eſt ad rationem FE. ergo A eſt ad I, vt C ad K, hoc eſt ratio AI producta, vt ſuprà demonſtraui, ex multiplicatione rationum AB, GH, primæ & quartæ eadem eſt cum ratione CK producta ex multiplicatione rationum CD, EF, ſecundę ac tertiæ. Quod erat demonſtrandum.

a 60. huius.

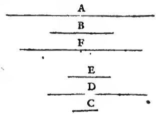
Corollarium.

QVod ſi tres fuerint rationes proportionales, prima in tertiam ducta idem producet quod media in ſeipſam. Demonſtratio patet ex propoſitione iam demonſtratâ ſi media ratio bis ſumatur.

PROPOSITIO LXXXVII.

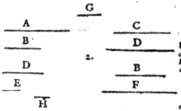
SI ratio AB ad CD rationem, eandem habeat rationem quam DE ratio ad rationem BF.

Dico A eſſe ad F, vt C ad E.



Demonſtratio.

SInt primò harum rationum termini ſex numero, virtualiter octo continentes. vt in primo ſchemate, cùm ratio AB ſit ad CD rationem, vt ratio DE ad BF rationem. igitur ratio AB ducta in BF rationem, æquatur [b] rationi CD in DE. ſed ratio AB in BF rationem, eſt [c] ratio A ad F, & ratio CD in DE, eſt [d] ratio C ad E. igitur ratio A ad F, eadem eſt cum ratione C ad E.



b 86 huius.
c Princ. 2. huius.
d 86 huius.

Sint deinde vt in ſecundo ſchemate octo termini, inueniantur [e] rationum AB, CD denominatores A & G. item DE, BF rationum denominatores D & H. Quoniam igitur ratio AB ad CD rationem, ponitur eſſe vt ratio DE ad BF rationem; igitur [f] A ad G, habet eandem proportionem quam D ad H. quare quod oritur ex ductu A in H, æquale erit [g] illi quod generatur ex ductu G in D. ergo etiam ratio A ad B, ducta in rationem B ad F, producet æqualem rationem cum ED ducto in DC. componitur autem ratio AF ex ratione AB ductâ in BF, & ratio E ad C, compoſita eſt ex ratione ED in DC; igitur cùm æquales ſint rationes AF & EC, erit A ad F, vt E ad C. Quod fuit demnnſtrandum.

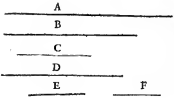
e 13. huius.
f 41. huius.
g Per corr. 85.

PROPOSITIO LXXXVIII.

SIt ratio AB ducta in CD eadem cum ratione EF ducta in ſeipſam.

Dico rationem AD ductam in CB rationem, eandem quoque eſſe cum ratione EF ducta in ſe.

Demonſtratio.



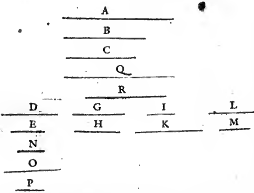
RAtio AB ducta in CD, eadem eſt cum ratione AD ducta in CB: atqui ratio AB ducta in CD, eadem ponitur cum ratione EF in ſe multiplicata; igitur etiam ratio AD ducta in CB, eadem erit cum ratione EF ducta in ſe. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIX.

SIt ratio AC compoſita ex duabus rationibus DE, GH, ſitque ratio AB æqualis rationi DE.

Dico & rationem BC æqualem eſſe rationi GH.

Demonſtratio.



FIat vt G ad H, ſic E ad N. erit igitur ratio D ad N, compoſita ex rationibus DE, & EN, hoc eſt ex rationibus DE, & GH, hoc eſt ex iiſdem rationibus, ex quibus componitur ratio data AC. Ergo per principium 3. huius libri rationes AC, DN ſunt eædem, ſiue A eſt ad C, vt D ad N. Quoniam verò ex hypotheſi eſt vt D ad E, ſic A ad B; erit & B ad A, vt E ad D: & iam oſtendi vt D eſt ad N, ſic A eſſe ad C. ergo ex æquo vt E eſt ad N, hoc eſt vt G ad H, ſic B eſt ad C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XC.

DAta iam ſit ratio A ad R, compoſita ex quotuis rationibus, DE, GH, IK, LM, ſint autem rationes AB, BC, CQ æquales rationibus DE, GH, IK.

Dico rationem QR æquari etiam rationi LM.

Demon-

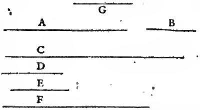
Demonſtratio.

Rationibus DE, GH, IK, LM æquales ſiant rationes DE, EN, NO, OP. Ratio DO componitur ex rationibus DE, EN, NO, hoc eſt per conſtr. ex rationibus DE, GH, IK, hoc eſt per hypotheſim ex iiſdem, quibus componitur ratio AQ. Ergo per principium 3. huius libri, rationes AQ & DO, ſunt æquales. Deinde quoniam ex conſtr. ratio quoque OP æqualis eſt rationi LM, erit ratio DP compoſita ex rationibus DE, GH, IK, LM. ſed ex iiſdem ponitur componi ratio AR. ſi igitur rationes DP, AR æquantur. Quare cùm & rationes DO, AQ iam oſtenderim eſſe æquales, per præcedentem ratio quoque QR rationi OP, hoc eſt rationi LM æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCI.

Sit A ad B, ratio maioris inæqualitatis compoſita ex rationibus CD & EF: ſit autem ratio CD maior ratione AB.
Dico rationem E ad F eſſe minoris ad maius.

Demonſtratio.

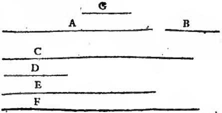


Fiat vt C ad D, ita A ad G. Quoniam ex hypotheſi AB ratio componitur ex ratione CD & EF, ratio item AB componitur ex rationibus AG & GB. Quare cùm ratio CD eadem ſit ex conſtructione cũ ratióne A ad G. Igitur ratio G ad B, eadem eſt cum ratione quam habet E ad F: ratio verò C ad D, ponitur maior ratione A ad B, igitur ratio A ad G, maior eſt ratione A ad B; eſt igitur G minor quàm ſit B. Vnde ratio G ad B, eſt minoris ad maius. quare cùm ratio G ad B, eadem ſit cum ratione E ad F, erit quoque ratio E ad F, minoris ad maius. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO XCII.

Sit iterum ratio AB, maioris inæqualitatis compoſita ex rationibus CD, & EF; ſit autem ratio CD, maior ratione AB.
Dico rationem EF minorem eſſe ratione CD.

Demonſtratio.



Fiat vt C ad D, ſic A ad G, ratio AB componitur ex rationibus AG, GB. eadem quoque ratio AB per hypotheſim componitur ex rationibus CD, EF. Atqui ratio CD ex conſtr. æquatur rationi AG. ergo & ratio EF per 89. rationi GB æqualis eſt. Deinde

cùm

cùm ex hypotheſi ratio A B ſit maioris inæqualitatis, ponaturque ratio C D maior ratione AB, etiam ratio C D, erit maioris inæqualitatis. Atqui per præcedentem ratio G B, id eſt E F, tunc eſt maioris inæqual. ergo ratio E F minor eſt ratione C D.

PROPOSITIO XCIII.

Ratio quæuis ducta in rationem æqualitatis producit ſeipſam.

Demonſtratio.



Data ſit ratio æqualitatis C D, & alia quæuis A ad B. fiat vt A ad B, ſic D ad E, per 75. huius ratio C E producitur ex ratione A B ducta in rationem C D. ſed ratio C E eadem eſt cum ratione D E (ſunt enim D & C æquales) hoc eſt cum ratione AB ex conſtr. ergo ratio AB ducta in rationem æqualitatis producit ſeipſam. Quod erat propoſitum.

Corollarium.

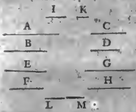
Hinc patet rationem æqualitatis in rationum compoſitione ſeu multiplicatione ceteris rationibus componentibus adiunctam nihil addere.

PROPOSITIO XCIV.

Datæ ſint 4. rationes A B, CD, EF, GH; ſi rationes A B, & G H inter ſe multiplicatæ idem producant, quod rationes CD, E F multiplicatæ inter ſe:

Dico rationem A B eſſe ad rationem CD, vt ratio E F eſt ad rationem GH.

Demonſtratio.



Fiat vt G ad H, ſic B ad I: per 75. huius AB, GH rationes inter ſe multiplicatæ facient rationem AI. Rurſum fiat vt E ad F, ſic D ad K. erit ratio CK productum CD, & EF rationum; adeoque ex hypotheſi rationes AI, CK æquales erunt, hoc eſt A erit ad I, vt C ad K. Deinde quoniam eſt vt G ad H, ſic B ad I, erit per 13. huius ratio AB ad rationem HG, vt A ad I. ſimiliter erit ratio CD ad rationem FE, vt C ad K. quoniam ergo A eſt ad I, vt C ad K; erit ratio AB ad rationem HG, vt ratio CD ad rationem FE. ergo & ratio AB eſt ad rationem CD, vt
a 60. huius. a ratio EF ad rationem GH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCV.

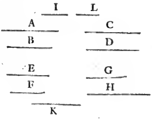
Datis quatuor rationibus A B, CD, E F, G H.

Oporteat exhibere proportionem rationum quas producunt ratio AB ducta in rationem CD, & ratio EF in rationem GH.

Con-

Conſtructio & demonſtratio.

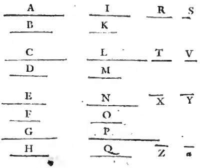
FIat vt C ad D, ſic B ad I, & vt G ad H, ſic E ad K. per 75. huius erunt rationes A I, E K, illæ, quas producet ductus rationum A B, C D & ductus rationum E F, G H. rationum autem productarum A I, & E K, proportio habebitur ſi fiat vt K ad E, ſic I ad L, vti patet ex 13. huius. Factum eſt igitur quod petebatur.



PROPOSITIO XCVI.

SIt proportio rationum A B, I K, ad proportionem rationum C D, L M, vt proportio rationū E F, N O, ad proportionem rationum G H, P Q.

Dico proportionem rationum G H, C D, ductam in proportionem rationū N O, P Q idem producere quod proportio rationum I K, L M ducta in proportionem rationū E F, G H.



Demonſtratio.

PEr 13. huius inueniantur rationum datarum denominatores R, S : T, V : X, Y : Z, α. Erit ergo proportio rationum A B, I K eadem cum ratione R S, & proportio rationum C D, L M eadem cum ratione T V, & proportio rationum E F, N O, eadem cum ratione X Y, proportio denique rationum G H, P Q eadem cum ratione Z α. Cùm igitur quatuor illæ proportiones rationum ſint ex hypotheſi proportionales, etiam rationes R S, T V, X Y, Z α proportionales erunt. ergo per 86. huius, ratio R S in rationem Z α, idem facit quod ratio T V in rationem X Y. ergo etiam proportio rationum A B, I K ducta in proportionem rationum G H, P Q, idem producit quod proportio rationum C D, L M ducta in proportionem rationum E F, N O. Quod erat propoſitum.

Corollarium.

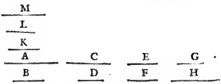
QVod ſi proportio rationum A B, I K fuerit ad proportionem rationum C D, L M, vt proportio rationum C D, L M eſt ad proportionem rationum E F, N O. Dico proportionem rationum C D, L M ductam in ſeipſam idem producere quod proportiones rationum A B, I K & E F, N O inter ſe multiplicatæ. Demonſtratio patet ex propoſitione iam demonſtrata ſi bis ſumatur media proportio rationum C D, L M.

AA PRO-

PROPOSITIO XCVII.

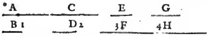
Dentur rationes quotcunque A B, C D, E F, G H.
Dico proportionem rationis primæ A B ad vltimam G H compoſitam eſſe ex proportionibus rationum mediarum.

Demonſtratio.



Fiat vt D ad C, ſic B ad K, & vt F ad E, ſic B ad L: vt verò H ad G, ſic B ad M. per 13. huius, ratio C D eſt ad rationem A B, vt K ad A; & per eandem ratio A B eſt ad rationem E F, vt A ad L. ergo ex æquo ratio C D eſt ad rationem E F, vt K ad L. Cùm igitur etiam ſit ratio A B ad rationem C D, vt A ad K, erunt rationes A B, C D, E F quantitatibus A, K, L, proportionales, & ratio E F ad rationem A B, vt L ad A: eodem diſcurſu probabimus rationem E F eſſe ad rationem G H, vt L eſt ad M; adeòque omnes rationes datas A B, C D, E F, G H eſſe proportionales quantitatibus A, K, L, M. Quare cùm ratio A ad M, compoſita ſit ex rationibus A K, K L, L M. erit quoque ratio A ad M, compoſita ex proportionibus rationum A B, C D, E F, G H. ſed, quoniam ex conſtruct. vt H ad G, ſic B eſt ad M, proportio rationis A B ad G H, eadem
a 13. huius. eſt a cum ratione A ad M. ergo & proportio rationis A B ad rationem G H eſt compoſita ex rationibus rationum mediarum A B, C D, E F, G H. Quod erat demonſtrandum.

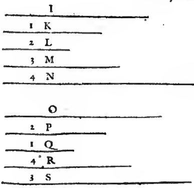
PROPOSITIO XCVIII.



Datæ ſint rationes quotcunq; A B, C D, E F, G H.

Dico ex illis quomodocunque diſpoſitis eandem ſemper produci ſiue componi rationem.

Demonſtratio.

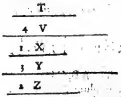


Continuentur primò in lineis I, K, L, M, N rationes datę eo ordine quo dantur, vt ratio prima I K ſit eadem primæ A B, & ſecunda K L, ſecundæ C D, & ſic deinceps. Erit ergo ratio I ad N, producta ſiue compoſita ex rationibus A B, C D, E F, G H eo diſpoſitis ordine quo dantur.

Continuentur deinde rationes datæ in lineis O, P, Q, R, S, ſed ordine perturbato, vt ratio quidem O P ſit æqualis rationi C D, & ratio P Q rationi A B, & ratio Q R rationi G H, ratio

ratio demum R S rationi E F. Erit ergo ratio O ad S, producta ſiue compoſita ex rationibus O P, P Q, Q R, R S, hoc eſt ex rationibus datis, ſed alio ordine diſpoſitis quàm quo ſunt datæ. Dico nihilominus rationem I ad N, eandem eſſe cum ratione O ad S.

Ex conſtruct. enim I eſt ad K, vt A ad B, hoc eſt vt P ad Q: & K eſt ad L, vt C ad D, hoc eſt, vt O ad P. Ergo a æqualitate perturbata, I eſt ad L, vt O ad Q. a 23. quinti.
Deinde L eſt ad M, vt E ad F, hoc eſt, vt R ad S: & M eſt ad N, vt G ad H, hoc eſt vt Q ad R. Rurſum igitur ex æqualitate perturbata L eſt ad N, vt Q ad S. Quare cùm I ſit ad L vt O ad Q. & L ad N, vt Q ad S, ex æquo I eſt ad N, vt O ad S, ſiue ratio I N eadem eſt cum ratione O S. Quod erat demonſtrandum.



Quod ſi alio quouis ordine fiat compoſitio, ſimili nihilominus diſcurſu propoſitum concludetur.

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS QVARTA

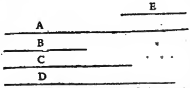
Rationum proportiones conſiderat: maximè ſecundùm rectangulorum comparationem quæ fiunt ex terminis rationum, termini autem ſtatuuntur iam lineæ.

PROPOSITIO XCIX.

SInt datæ rationes A B, C D.

Dico rectangulum A D ad rectangulum B C eandem habere proportionem quam ratio A B ad C D.

Demonſtratio.



a 13. huius.
b 23. ſexti.

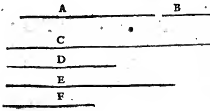
FIat vt D ad C, ita B ad E. erit igitur ratio A B ad C D, vt A ad a E: rectangulũ b autem A D, ad B C rectangulum habet compoſitam rationem ex ratione A ad B, & D ad C: eſt autem D ad C, vt B ad E. quare rectangulum A D ad B C, habet rationem compoſitam ex ratione A ad B, & ratione B ad E. Sed etiam A ad E, habet rationem compoſitam ex ijſdem rationibus; igitur rectangulum A D ad B C. eſt vt A ad E. ſed etiam ratio A B ad C D, eſt vt A ad E: igitur ratio A B ad C D, eadem eſt cum ratione rectanguli A D ad B C. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO C.

SIt quæuis ratio A B, & aliæ quæuis duæ ſimiles inter ſe, nimirum C D, E F.

Dico rectangulum A C ad B E rectangulum eandem habere proportionem quam rectangulum A D ad B F rectangulum.

Demonſtratio.



RAtio rectanguli A C ad B E, cõpoſita eſt ex ratione A ad B, & C ad E: ratio quoque rectanguli A D ad rectangulum B F ex ijſdem componitur: nam ratio A ad B, communis eſt, ratio verò C ad E, eadem ex hypotheſi eſt cum ratione D ad F; quare patet rectangulum A C

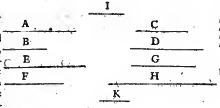
AC ad BE, eam rationem habere quam AD rectangulum ad rectangulum BF. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CI.

SIt AB ratio, ad rationem CD, vt eſt ratio EF ad GH rationem. Dico rectangulum AD ad BC rectangulum, candem habere proportionem quam EH rectangulum ad rectangulum FG.

Demonſtratio.

Fiat vt D ad C, ſic B ad I. erit ergo vt A ad I, ſic a rectangulum AD ad rectangulum CB. Rurſum fiat vt H ad G, ſic F ad K, erit vt E ad K, ſic rectangulũ EH ad rectangulum GF. Atqui vt A ad I, ſic b E ad K. ergo vt rectangulum AD ad rectangulum CB, ſic rectangulum EH ad rectangulum GF. Quod erat demonſtrandum.



a Patet ex demonſtratione 99. huius.

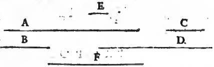
b 42 huius.

PROPOSITIO CII.

DAtis rationibus AB, CD. Oporteat exhibere quomodo ſe habeat proportio rationum AB, CD ad rationem rectangulorum AB, CD.

Conſtructio & demonſtratio.

Fiat vt D ad C, ita B ad E. Deinde vt B ad D, ita fiat C ad F. Dico proportionem rationum AB, CD eſſe ad rationem rectangulorum AB & CD, vt F, eſt ad E.



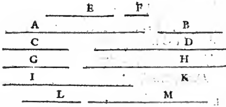
DemonStratio.

NAm proportio rationum AB, CD per 13. huius eſt eadem cum ratione AE. Ratio verò quæ eſt inter rectangula AB, CD componitur ex ratione A ad C, & ex ratione quam habet B ad D, hoc eſt quam habet ex conſtructione C ad F, igitur cùm ratio A ad F, etiam componatur ex rationibus AC & CF, ratio rectangulorum AB, CD, eadem eſt cum ratione AF. ſed ratio AE eſt ad rationem AF, vt F eſt ad E per 7. huius. ergo proportio rationum AB, CD eſt ad rationem rectangulorum AB, CD, vt F eſt ad E. Factum igitur eſt quod petebatur.

PROPOSITIO CIII.

SI ratio AB ad CD, eſt vt E ad F, ratio quoque GH ad IK, vt L ad M. Dico rationem rectangulorum AD, CB ad rationem rectangulorum GK, IH eandem habere proportionem quam ratio EF ad LM rationem.

Demonſtratio.

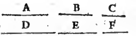


a 95. huius. Rectangulum a AD ad CB, eandem habet proportionem quæ eſt inter rationes AB & CD, ſimiliter rectangulum GK ad IH rectangulum eſt, vt ratio GH ad IK rationem. ſed propoftio rationum AB, CD ponitur eſſe ratio EF; deinde propoftio rationum GH, IK ſupponitur eſſe ratio LM. igitur patet rationem EF eſſe ad LM rationem, vt ratio rectangulorum AD, CB ad rationem rectangulorum GK, IH, Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CIV.

Qvod ſi ABC & DEF proportionales ſint:
Dico rectangulum AE ad rectangulum DB, eandem habere proportionem quam rectangulum BF ad rectangulum EC.

Demonſtratio.



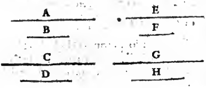
Componitur enim ratio rectanguli AE ad rectangulum DB ex ratione A ad B, & E ad D. ſimiliter ratio rectanguli BF ad EC rectangulum, ex iiſdem eſt compoſita, nam ratio B ad C, eſt eadem cum ratione A ad B, & ratio F ad E, eadem cum ratione E ad D, ex hypotheſi. ergo cùm ratio BF rectanguli ad rectangulum EC compoſita ſit ex iiſdem rationibus ex quibus componitur ratio rectanguli AE ad rectangulum DB, patet rectangulum AE ad DB, rectangulũ eandem habere rationem quam habet rectangulum BF ad rectangulum EC: quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CV.

Sint AB, EF rationes ſimiles ſicut & rationes CD, GH.
Dico primò rectangulum AD ad CB rectangulum, eandem habere rationem quam rectangulum EH ad GF rectangulum.

Secundò rectangulum AC ad BD rectangulum, eandem proportionem habere quam EG rectangulum ad FH rectangulum.

Demonſtratio.



Qvoniam ſimiles ponuntur rationes AB, EF, & rationes CD, GH. Igitur ratio AB eſt ad CD rationem, vt ratio EF ad rationẽ GH: igitur b rectangulum AD ad CB, eſt vt rectangulum EH ad GF.

b Per 101. huius.

Secundò rectangulum AC ad BD, rationem habet compoſitam ex rationibus A ad B,

A ad B, & C ad D, ſed ex iiſdem rationibus componitur ratio rectanguli E G ad F H, cùm ſint ſimiles rationes A B, E F & ſimiles quoque ſint rationes C D & G H. igitur etiam ſecundæ partis demonſtratio conſtat.

PROPOSITIO CVI.

Iiſdem poſitis:
Dico rectangulum A H eſſe ad rectangulum G B, vt E D rectangulum ad F C rectangulum.

Demonſtratio.



Rectangulum A H ad rectangulum G B, rationem habet compoſitam ex ratione A ad B, hoc eſt E ad F, & ex ratione H ad G, hoc eſt D ad C; ex quibus etiam componitur ratio rectangulorum E D, F C. ergo rectangulum A H eſt ad rectangulum G B vt E D rectangulum ad G B. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CVII.

Iiſdem poſitis:
Dico rectangulum A G ad B H rectangulum, eandem habere rationem, quam rectangulum E C ad rectangulum F D.

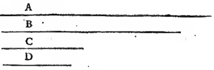
Demonſtratio.

Rectanguli A G ad B H, ratio eſt compoſita ex ratione A ad B, & G ad H; ex illis ipſis autem rationibus componitur ratio rectanguli E C ad F D, ſcilicet ex ratione E ad F, hoc eſt A ad B, & ex ratione C ad D, hoc eſt G ad H. Patet itaque veritas propoſitionis.

PROPOSITIO CVIII.

Sint A B, C D ſimiles rationes:
Dico quadratum A, rectangulum B C, quadratum D eandem rationem continuare.

Demonſtratio.



Qvadratum A ad B C rectangulum compoſitam habet rationem ex A ad B, hoc eſt C ad D, & ex A ad C, hoc eſt B ad D: ratio autem rectanguli B C ad D quadratum, compoſita ex iiſdem eſt rationibus, ſcilicet C ad D, & B ad D, manifeſtum igitur eſt rationes trium harum quantitatum eſſe ſimiles, ac proinde continuari rationem earundem quantitatum.

PRO-

PROPOSITIO CIX.

Int quæuis rationes A B, C D.

Dico quod ratio A B ducta in D C, æquetur rationi quam habet rectangulum A D ad C B rectangulum.

Demonſtratio.

a 81.*huius.* b 99.*huius.*



Ratio etenim A B ducta in D C rationem [a] eadem eſt cum proportione quam habet ratio A B ad C D rationem. Atqui [b] ratio rectanguli, A D ad C B rectangulum eadem quoque eſt cum proportione rationum A B, C D. Igitur ratio A B ducta in rationem D C producit proportionem rectanguli A D ad C B rectangulum. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO CX.

Int proportionales A B C, item D, E, F.

Dico rectangula A F, B E, D C eandem quoque rationem continuare.

Demonſtratio.



Rectangulum A F ad B E rectangulum, compoſitam habet rationem ex ratione A ad B, & F ad E, rectangulum quoque B E ad D C, habet rationem ex iiſdem compoſitam, nempe ex ratione B C, quæ eadem eſt cum ratione A ad B, ex ſuppoſitione, & ex ratione E ad D, eadem cum ratione F ad E. patet igitur rectangula A F, B E, C D proportionales eſſe quantitates, quod oportuit demonſtrare.

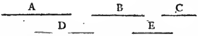
PROPOSITIO CXI.

Int A B C quantitates proportionales, deinde vt A ad B fiat quæuis D ad E.

Dico rectangula A D, D B, B E, E C, eſſe in continuata proportione.

Demonſtratio.

a 1.*Sexti.*



Ratio rectanguli A D ad D B rectangulum eſt vt [a] A ad B, cùm habeat communē baſim D. ſimili pacto ratio rectanguli D B ad B E, eſt ea quam habet D ad E, hoc eſt A ad B ex hypotheſi. Denique ratio B E rectanguli ad E C rectangulum, etiam eſt ratio B ad C, hoc eſt A ad B: ſunt enim proportionales A, B, C. igitur rectangula A D, D B, B E, E C continuant eandem rationem A ad B. Quod fuit demonſtrandum.

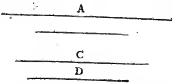
PROPOSITIO CXII.

SI ratio AB duplicata eſt rationis CD.

Dico rectanguli AC ad BD rationem triplicatam eius eſſe quam habet C ad D.

Demonſtratio.

RAtio quippe rectanguli AC ad BD rectangulum, compoſita eſt ex ratione A ad B, hoc eſt duplicata C ad D, ex hypotheſi inſuper ex ratione C ad D. ergo ratio rectanguli AC ad BC rectangulum, eſt triplicata rationis C ad D. Quod erat demonſtrandum.



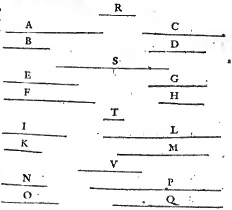
PROPOSITIO CXIII.

SIt proportio rationum AB, CD ad proportionem r: tio·ıum EF, GH, vt proportio rationum IK, LM, ad proportionem rationum NO, PQ.

Dico rationem rectangulorum AD, EH eſſe ad rationem rectangulorum IM, NQ, vt ratio rectangulorum BC, FG ad rationem rectangulorum KL, OP.

Demonſtratio.

FIat vt D ad C, ſic B ad R, & vt H ad G, ſic F ad S, vt verò M ad L, ſic K fiat ad T: demum vt Q ad P, ſic fiat O ad V. Itaque ratio AR eſt [a] proportio rationum AB, CD; & ratio ES eſt proportio rationum EF, GH: ratio autem IT eſt rationum IK, LM proportio: denique ratio NV eſt proportio rationum NO, PQ. Atqui datę rationum proportiones ex hypotheſi ſunt proportionales ſibi mutuo. ergo etiam rationes AR, ES rationibus IT, NV ſunt proportionales. Iam verò ratio rectangulorum AD, BC eſt ad rationem rectangulorum EH, FG vt [b] ratio AR eſt ad rationem ES, hoc eſt, quemadmodum iam oſtendi, vt ratio IT ad rationem NV. Atqui vt ratio rectangulorum AD, BC, eſt ad rationem rectangulorum EH, FG, ſic [c] eſt ratio rectangulorum AD, EH, ad rationem rectangulorum BC, FG. ergo etiam ratio rectangulorum AD, EH, eſt ad rationem rectangulorum BC, FG vt ratio IT, ad rationem NV. Eodem planè diſcurſu probabimus rationem rectangulorum IM, NQ eſſe ad rationem rectangulorum KL, OP, vt ratio IT eſt ad rationem NV. ergo ratio rectangulorum AD, EH, eſt ad rationem rectangulorum BC, FG, vt ratio rectangulorum IM, NQ eſt ad rationem rectangulorum KL, OP. Igitur permutando [d] ratio rectangulorum AD, EH eſt ad rationem rectangulorum IM, NQ, vt ratio rectangulorum BC, FG eſt ad rationem rectangulorum KL, OP. Quod erat demonſtrandum.



a 13. huius.
b 103. huius.
c 39 huius.
d Ibid.

PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS QVINTA

Exponit ea quæ proportionalitatibus communia ſunt cum Arithmeticis operationibus.

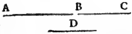
PROPOSITIO CXIV.

DAta ſit quæuis quantitas AC, vtcunque diuiſa in B, & alia quantitas D.

Dico rationem AB ad D, vnà cum ratione BC ad D, æqualem eſſe rationi AC ad D.

Demonſtratio.

a 2. huius.
b 46 huius.



RAtio [a] AB ad D, eſt ad rationem BC ad D, vt AB ad BC. ergo [b] componendo, ratio AB ad D, vnà cum ratione BC ad D, eſt ad rationem BC ad D, vt AB cum BC ad BC, hoc eſt vt AC ad BC. Atqui ratio AC ad D, eſt [b] quoque ad rationem BC ad D, vt AC ad BC. Ergo rationes AB ad D, BC ad D, ſimul ſumptæ, & ratio AC ad D, eandem proportionem habent ad rationem BC ad CD. ergo rationes AB ad D, BC ad D, ſimul ſumptæ æquantur rationi AC ad D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXV.

OPorteat quaſuis duas datas rationes, reducere ad duas ipſis æquales, quæ commune habeant antecedens.

Conſtructio & demonſtratio.



SInt datæ duæ rationes AB, CD, quarum antecedentes termini ſint inæquales, A ſcilicet & C; & ſimiliter conſequentes B & D. oporteat autem exhibere duas alias rationes illis æquales, quæ communem habeant terminum antecedentem; fiat vt C ad D, ita A ad E, ratio AE ſimilis erit rationi CD, ac proinde æqualis. ergo rationes AB & AE, æquales ſunt datis rationibus AB, CD, & antecedens commune habent. Quod fieri poſtulabatur.

PROPOSITIO CXVI.

OPorteat datas duas rationes ad duas ipſis æquales reducere quę conſequens commune habeant.

Con-

Conſtructio & demonſtratio.

DAtæ ſint rationes A B, C D & fiat vt D ad C, ita B ad E. erunt igitur rationes C D & E B, æquales inter ſe : ac proinde rationes A B, E B, æquales rationibus A B, C D: habent autem rationes A B, E B, commune conſequens B ; igitur exhibuimus quod petebatur.

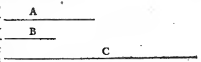


PROPOSITIO CXVII.

DAtæ rationis duplam aſſignare aut dimidiatam, aut aliam in data proportione.

Conſtructio & demonſtratio.

DAta ſit ratio A B, cuius duplam aut dimidiatam oporteat exhibere : fiat C dupla quantitatis A. Dico rationem C ad B, duplam eſſe rationis eius quam habet A ad B : & rationem B C, dimidiam eſſe eius rationis quam habet B ad A : nam ratio C B, ad A B, eſt vt C ad A, eſt autem C dupla rectæ A, igitur ratio C ad B, dupla eſt rationis A ad B. Ratio autem B ad C, & B ad A, eſt vt A ad C. ſed A eſt dimidia ipſius C: igitur ratio B ad C, eſt dimidia eius rationis, quam habet B ad A. Igitur præſtitimus quod requirebatur. eâdem praxi dabitur ratio quæ ad rationem datam, habeat datam proportionem.

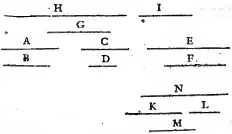


PROPOSITIO CXVIII.

DAtis quibuſuis rationibus oporteat methodum exhibere quâ in vnam illis æqualem aggregentur.

Conſtructio & demonſtratio.

SInt rationes AB, C D in vnam aggregandę ; fiat vt D ad C, ita B ad G. Deinde fiat H æqualis A & G, ſimul ſumptis. Dico rationem H ad B, æqualem eſſe aggregato duatū rationum A B, C D : eſt enim ratio A B, cum G B ex conſtr. æqualis duabus rationibus A B, C D. ſed ratio H ad B, æqualis eſt rationibus [a] A B & G B. Igitur etiam ratio H ad B, æqualis eſt aggregato rationum A B, & C D.



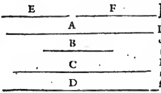
[a] 114. huius.

Eodem modo ſi fiat vt F ad E, ita B ad I, & quantitas alia fiat quæ æqualis ſit duabus H & I, tunc ratio ipſius H cum I, ad B, æqualis erit aggregato trium rationum A B, C D, E F, & ſic pergi poterit in aceruando quouis numero rationū. Quod ſi rationes datę commune habeant conſequens, cuiuſmodi ſunt rationes K M, L M, collige antecedentia in quantitatem vnam N. erit ratio N ad M, æqualis rationibus K M, L M.

PROPOSITIO CXIX.

DAtam rationem minorem ex maiori detrahere.

Conſtructio & demonſtratio.



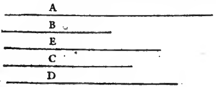
DAta ſit ratio minor C D, quam ex maiori ratione AB oporteat ſubtrahere. Fiat vt D ad C, ſic B ad E. erit ergo ratio EB eadem cum ratione CD; & quia ex hypotheſi ratio CD minor eſt quàm ratio AB, erit & EB ratio minor ratione AB; adeoque E minor eſt quàm A. ſubtrahe igitur E ex A, & reſiduum ſit F. Dico rationem FB, eſſe reſiduum rationis AB, poſt ſubtractam ex ipſa rationem CD. Nam rationes EB, FB [a] æquantur rationi ipſius E cum F, (hoc eſt ipſius A) ad B. Atqui demptâ ex rationibus EB, FB, ratione EB, remanet ratio FB. Ergo etiam demptâ ratione EB, ex ratione AB, remanet ratio FB. ſed ratio EB eſt ratio CD. Demptâ igitur ratione CD ex ratione AB, remanet ratio FA. Factum igitur eſt quod petebatur.

a 114. huius.

PROPOSITIO CXX.

DAtam rationem per datam multiplicare.

Conſtructio & demonſtratio.



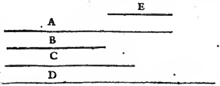
DAtas rationes AB, CD inter ſe multiplicabimus ſi fiat vt C ad D, ita B ad E, tunc enim ratio A ad E, erit productum duarum rationum AB, CD inter ſe multiplicatarum, quemadmodum propoſit. 75. demonſtrauimus.

b 75. huius.

PROPOSITIO CXXI.

DAtam rationem per datam aliter multiplicare.

Conſtructio & demonſtratio.



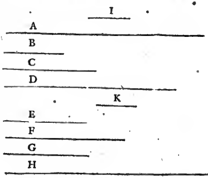
DAtis rationibus AB, CD per ſe mutuo multiplicandis fiat vt D ad C, ita B ad E. Dico A ductum in E exhibere quæſitum. Nam rationum AB, CD denominatores ſunt A & E, per 13. huius. quare hi inter ſe multiplicati exhibent id quod producunt rationes ductæ in ſe mutuò.

PRO-

PROPOSITIO CXXII.

DAtam proportionem rationum per alteram rationum proportionem multiplicare.

Conſtructio & demonſtratio.



DAtæ ſint binæ rationes AB, CD, item binæ aliæ EF, GH, fiat vt D ad C, ita B ad I, & vt H ad G, ita F ad K. erit itaque [a] ratio A ad I, proportio rationum AB, CD; & ratio E ad K proportio rationum EF, GH: per præcedentem verò nota eſt methodus multiplicandi rationem AI per EK rationem. ergo per eandem exhibebitur proportio AB, CD ducta in proportionem EF, GH. Quod erat poſtulatum.

a 13. huius.

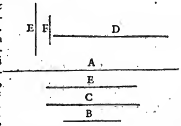
Corollarium.

NOn pergo vlteriùs ad multiplicandas proportiones proportionum: nam illæ cùm in infinitum poſſint excreſcere, exhauriri nequeunt. ſuffiet igitur praxim inſinuaſſe quam quis adhibere poterit ſi vlteriores multiplicationes proſequi in animum induxerit.

PROPOSITIO CXXIII.

DAtam rationem A ad B, in duas rationes ipſam componentes partiri, quæ datam inter ſe habeant proportionem E ad F.

Conſtructio & demonſtratio.



FIat vt E ad F, ſic A ad D; & inter B ac D, media proportionalis ſtatuatur C. Dico factum. fiat E æqualis ipſi C. Quoniam B eſt ad C, vt C ad D per conſtructionem, eſtque E par ipſi C; erit B ad C, vt E ad D. Ergo [b] ratio AE, hoc eſt ratio AC, eſt ad rationem CB, vt A ad D, hoc eſt ex conſtructione, vt E ad F. ſed ratio AB componitur ex rationibus AC, & CB. Ergo ratio AB diuiſa eſt in duas rationes ipſam componentes AC, CB, quæ datam inter ſe habent proportionem E ad F. Quod erat faciendum.

b ibid.

PROPOSITIO CXXIV.

OMnis ratio in duas ipſam componentes diuiſa denuo coaleſcit per partium ex diuiſione ortarum in ſe mutuò multiplicationem.

Demonſtratio.

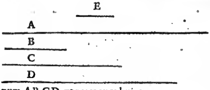


INter rationem A ad B, interponatur quæuis quantitas C; erit itaque ratio A ad B, diuiſa in duas ipſam componentes, ſcilicet A ad C, & C ad B; oſtendendum igitur eſt per multiplicationem rationis A C in CB rationem, coaleſcere denuo rationem A ad B. Nam ratio A ad B, compoſita eſt ex rationibus A C, & C B: hoc eſt, vt antè propoſ.75.docuimus, ratio A ad B producitur ex multiplicatione rationum A C,C B. Quare cùm rationes A C, CB, ſint partes rationis A ad B, ipſam componentes, patet rationem A ad B, diuiſam in partes, ex partium multiplicatione reſtaurari. Quod erat demõſtrandum.

PROPOSITIO CXXV.

OPorteat datam rationem per aliam partiri ſiue oſtendere quoties vna alteram contineat.

Conſtructio & demonſtratio.



SIt AB ratio diuidenda per CD rationem: fiat vt D ad C ita B ad E. Dico rationem AB diuiſam eſſe per rationem CD. nam toties AB, continet CD rationem, quoties A continet E, cùm A & E, ſint denominatores eatundem rationum AB,CD, vt patet ex 13.huius.

Corollarium.

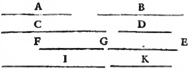
HInc manifeſtùm eſt diuiſionem vnius rationis per alteram rationem coincidere cum aſſignatione illius rationis quam continent inter ſe datæ rationes, inuicem diuidendæ.

PROPOSITIO CXXVI.

SIt proportio rationis AB ad CD rationem inæqualitatis.
Oporteat aſſignare exceſſum quo maior minorem exſuperat.

Con-

Conſtructio & demonſtratio.



Sit igitur datarum rationum maior C ad D, fiatque vt D ad C, ita B ad FE: igitur vt eſt A ad FE, ita ratio A B ad CD a rationem: ponitur autem ratio C D maior ratione A B. Igitur maior eſt quantitas FE quantitate A. ergo factâ FG æquali A remanebit GE exceſſus quo denominator FE excedit denominatorem A. Fiat igitur vt FG ad GE, ita ratio AB ad IK rationem. Dico rationem IK eſſe exceſſum quo ratio C D rationem AB excedit. nam FE eſt ad FG, vt ratio CD eſt ad rationem AB. Igitur vt FG ad GE, ita exceſſus quo ratio CD ſuperat AB rationem ad ipſam AB rationem. Eſt autem ex conſtr. ratio AB ad IK rationem, vt eſt quantitas FG ad GE quantitatem. Igitur patet IK rationem eſſe poſtulatam.

a 13 huius.

PRO.

Digitized by Google

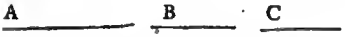
PROPORTIONALITATVM GEOMETRICARVM PARS SEXTA.

Varias proportionalitatum proprietates complectitur.

PROPOSITIO CXXVII.

Datis tribus rerminis in continua ratione ſcilicet A B C. Dico rationem A B ductam in B C, ad rationem C B ductã in B A rationẽ, eandem eſſe cum ratione quæ eſt inter A & A.

Demonſtratio.



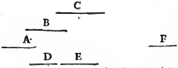
Ratio A B ducta in B C, eſt vt A ad C. Deinde ratio C B, ducta in B A, eſt ratio C ad A. Igitur vt ratio A ad C, ad rationem C ad A, ita eſt ratio A B, ducta in B C, ad rationem C B, ductam in B A rationem: ſed ratio A ad C, ad C ad A rationem, eſt eadem a cum ratione A ad A. igitur manifeſta eſt veritas propoſitionis.

a Per 77. huius.

PROPOSITIO CXXVIII.

Sint iterum in continuata proportione A B C, A D E. Dico rationem B D in ſe ductam producere rationem C ad E.

Demonſtratio.



b 75. huius. c 27. progreſſ.

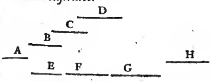
Fiat F, tertia proportionalis ad rectas B, D: erit igitur ratio B ad F, orta ex ductu rationis B, D, b in ſe. ſed ratio C ad E, eadem c eſt cum ratione B ad F, cùm habeant A, communem primum terminum hæ duę ſeries, igitur ratio B D ducta in ſe æqualis eſt rationi C ad E. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXIX.

Sint autem A B C D, & A E F G, continuantes eandem proportionem. Dico rationem B E, ductam in C F rationem, exhibere D ad G.

Demon-

Demonſtratio.



Flat vt C ad F, ita E ad H. igitur ratio B E ducta in C F rationem, efficit[a] rationem B ad H, eſt autem C F ratio duplicata[b] rationis B E: igitur ratio B, ad H eſt triplicata rationis B ad E. ſed ratio D ad G, ſimiliter eſt triplicata rationis B E. igitur patet rationem BE ductam in rationem CF, exhibere rationem D ad G. Quod erat demonſtrandum.

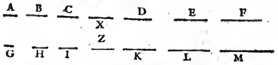
a 75. huius.
b 27 progreſſ.

PROPOSITIO CXXX.

Sint binæ continuè proportionalium ſeries A, B, C, X, D, E, F & G, H, I, Z, K, L, M: ſint autem X & Z æquales.

Dico ſi C, I, K, D ſunt in continua, etiam B, H, L, E & A, G, M, F eſſe in continua.

Demonſtratio.



Ratio B H, [c] duplicata eſt rationis CI, hoc eſt per hypotheſim rationis I K. ſed eiuſdem rationis IK duplicata eſt ratio HL, quòd H, I, Z, K, L, ſint in continua. Ergo B eſt ad H, vt H ad L. ſed [d] etiam L eſt ad E, vt B ad H. ergo B, H, L, E ſunt in continua. Quod erar demonſt. eodem diſcurſu ex ijſdem illis propoſitionibus 26. & 27. progreſſionum demonſtrabimus eſſe continuè proportionales A, G, M, F, & ſic in infinitum.

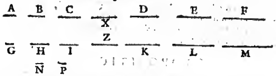
c 27. Progreſſ.
d 26. Progreſſ.

PROPOSITIO CXXXI.

Iiſdem poſitis: ſumantur B, H, & E, L æqualiter diſtantes à medijs æqualibus X, Z.

Dico rationem B H eſſe ad rationem H B, vt ratio B E, eſt ad rationem H L.

Demonſtratio.



Fiat vt B ad H, ſic H ad N, erit [e] ratio B H ad rationem H B, vt B ad N. fiat deinde vt L ad H, ſic E ad P. erit [f] ratio B E ad rationem H L, vt B ad P. Quia autem ex conſtr. L eſt ad H, vt E ad P., erit permutando L ad E, vt H ad P. ſed [g] vt L ad E, ſic B eſt ad H. ergo H eſt ad P, vt B ad H, hoc eſt ex conſtr. vt H eſt ad N: æquantur igitur N, & P. ergo B eſt ad N, vt B eſt ad P. Quare cùm

e Coroll. 18. huius.
f 13. huius.
g 26. Progreſſ.

C C ratio

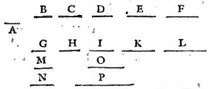
ratio BH ſit ad rationem HB, vt B eſt ad N, & ratio BE ad rationem HL, vt B eſt ad P; erit ratio BH ad rationem HB, vt ratio BE ad rationem HL. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXII.

Datæ ſint binæ ſeries continuè proportionalium ab vno termino A incipientium, & æquali conſtantium numero terminorum.

Dico rationem FL, eſſe ad rationem BG, vt E eſt ad K, & rationem EK eſſe ad rationem BG, vt D eſt ad I. Et ſic deinceps.

Demonſtratio.



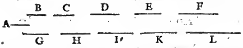
Per 27. libri noſtri progreſſionum, ratio FL, eſt quintuplicata rationis BG. Continuetur autem ratio BG per ſex terminos, B, G, M, N, O, P: eritque ratio BP etiam quintuplicata rationis BG; ac proinde eadem cum ratione FL. a 27. huius. ſed ratio BP eſt ad rationem BG, vt a G eſt ad P. Ergo ratio FL eſt ad rationem BG, vt G eſt ad P. Iam verò quia ratio GP eſt quadruplicata rationis BG: ratio b 27. Progreſſ. quoque E ad K, eiuſdem rationis b BG quadruplicata eſt; ergo vt E eſt ad K, ſic G eſt ad P, hoc eſt, vt iam oſtenſum eſt, ratio FL ad rationem BG. pari argumento demonſtrabitur ratio EK eſſe ad rationem BG, vt D eſt ad I: & ſic deinceps. patet ergo propoſitum.

PROPOSITIO CXXXIII.

Datæ ſint binæ ſeries continuè proportionalium quæ primum terminum communem habeant A.

Dico rationem DB eſſe ad rationem IG, vt C eſt ad H; & rationem EB eſſe ad rationem KG, vt D eſt ad I, & ſic in infinitum.

Demonſtratio.



c 39. huius. d 132. huius Ratio DB eſt ad rationem IG, vt c ratio DI ad rationem BG. ſed ratio D, eſt ad rationem BG vt d C ad H. Ergo ratio DB eſt ad rationem IG, vt C eſt ad K. Pari argumento oſtendam rationem EB eſſe ad rationem KG, vt D eſt ad I. Et ſic in infinitum.

PROPOSITIO CXXXIV.

Sint duæ rationes ſimiles AB, CD, ponantur autem quatuor A, E, F, G, continuare eandem rationem. Deinde ſint etiam continuè proportionales C K L M, cuiuſcumque tandem rationis: ſint autem inter B & G, duæ mediæ H & I: pari pacto ſint inter D & M, mediæ N & O.

Dico

Dico F ad I, eandem habere rationem quam habet L ad O, & E ad H, eandem quam habet K ad N.

Demonſtratio.

A	E	F	
B	H	I	G
C	K	L	.
D	N	O	M

QVoniam ponuntur AEFG, & BHIG, continuare eandem rationem in ſua ſerie, igitur ratio AB, triplicata eſt rationis eius quam habet F ad I, & pari pacto ratio CD, a triplicata eſt rationis L ad O. ſed ratio AB, eadem eſt cum ratione CD, ex hypotheſi, igitur etiam ratio AB, triplicata eſt rationis LO. quare F ad I, ratio eadem eſt cum ratione L ad O: ſimili ferè diſcurſu oſtendam rationes EH & KN eſſe eaſdem.

a 17. Progreſſ.

PROPOSITIO CXXXV.

DAtæ ſint tres ſeries continuè proportionalium, quæ commune habeant principium A.

Dico ſi B, G, M ſint in continua, etiam C, H, N, & D, I, O, & E, K, P & ſic deinceps eſſe in continua.

Demonſtratio.

	B	C	D	E	F
A	G	H	I	K	L
	M	N	O	P	Q

RAtio CH eſt duplicata [b] rationis BG, hoc eſt ex hypotheſi rationis GM. Atqui etiam ratio HN eſt duplicata rationis GM, rationes igitur CH, & HN ſunt eædem, adeoque C, H, N ſunt in continua. Similiter ratio DI eſt triplicata rationis BG, hoc eſt ex hypotheſi rationis GM: ſed eiuſdem rationis GM etiam triplicata eſt ratio IO. Ergo rationes DI & IO ſunt eædem. ergo D, I, O ſunt in continua. Pari argumento demonſtrabo E, K, P, & F, L, Q & ſic in infinitum eſſe in continua. Liquet ergo propoſitum.

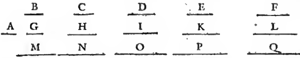
b Ibid.

PROPOSITIO CXXXVI.

STatuantur rurſum tres ordines continuè proportionalium ab eodem termino A principium ducere; ſit autem ratio BM triplicata rationis BG.

Dico etiam rationem CN fore triplicatam rationis CH, & rationem DO, rationis DI, & ſic deinceps.

Demonſtratio.

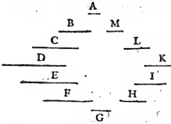


SVmatur quæuis trias exempli gratiâ E, K, P. Patet ex 27. libri noſtri progreſſionum, quoties ratio EK multiplicat rationem BG, toties rationem EP multiplicare rationem BM. Quare cùm ratio BM ponatur triplicata rationis BG, erit & ratio EP triplicata rationis EC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXVII.

SInt continuè proportionales A, B, C, D, & A, M, L, K, item totidem D, E, F, G, & K, I, H, G.

Dico B eſſe ad M, vt F ad H; & C ad L, vt E ad I.



Demonſtratio.

a 27. Progreſſ.

RAtio D ad K, eſt a triplicata tam rationis B ad M, quàm rationis F ad H. Ergo B eſt ad M, vt F ad H. Deinde rationes CL, EI ſunt duplicatę rationum BM, FH, quas iam oſtendimus eſſe eaſdem. Ergo & ipſæ ſunt eædem, ſiue C ad L, vt E ad I. Quæ erant demonſtranda.

PROPOSITIO CXXXVIII.

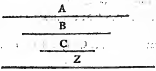
SI fuerint quotuis quantitates A, B, C in continua, & aſſumatur quæuis alia quantitas Z:

Dico rationes AZ, BZ, CZ, item rationes ZC, ZB, ZA, eandem continuare analogiam.

Demonſtratio.

b 1. huius.

c 7. huius.



RAtio AZ eſt ad rationem BZ, b vt A ad B. ſimiliter ratio BZ eſt ad rationem CZ, vt B ad C, hoc eſt vt A ad B; rationes igitur AZ, BZ, CZ continuant eandem rationem A ad B. Deinde ratio ZC eſt ad rationem ZB, vt c B ad C, & ratio ZB, eſt ad rationē ZA, vt d A ad B, hoc eſt vt B ad C.

d Ibid.

Ergo rationes ZC, ZB, ZA continuant eandem rationem B ad C. Conſtat ergo propoſitum.

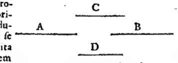
Digitized by Google

PROPOSITIO CXXXIX.

Poſitis duabus A, B, ſumatur media proportionalis D. Deinde aſſumatur quæuis C.

Dico rationes A C, A D, C B, eſſe tres rationes in continua analogia.

Demonſtratio.



Ratio A C ducta in C B rationem producit a æqualem rationem illi quæ oritur ex ductu A D, in D B, hoc eſt ex ductu rationis A D in ſeipſam: igitur ſicut ſe habet ratio A C ad A D rationem, ita b quoque ſe habet ratio A D, ad rationem C B. ſunt igitur tres rationes in continua analogia. Quod erat demonſtrandum.

a 77. huius.

b Colligitur ex 94. huius.

Aliter.

Ratio A C ad A D rationem, eſt c vt D ad C. ratio quoque D B hoc eſt ratio A D, ad C B rationem, eſt vt D ad C; eandem ergo proportionem continuant rationes A C, A D, C B. Quod erat demonſtrandum.

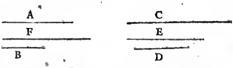
c 7. huius.

PROPOSITIO CXL.

Sint ſimiles rationes A B, C D, & inter C & D media proportionalis ſit E. Denique ponatur quæuis F inter A & B.

Dico rationes A F, C E, F B eſſe in continua analogia.

Demonſtratio.



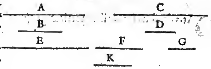
Quoniam inter ſimiles rationes A B, C D poſitæ ſunt F & E quantitates; igitur ratio A F eſt d ad C E, vt eſt E D ad F B, ſed ratio E D ex conſtructione eſt eadem cum ratione C E, igitur vt eſt ratio A F ad C E, ita eadem ratio C E eſt ad rationem F B; continuant igitur eandem rationem A F, C E, F B. Quod fuit demonſtrandum.

d 61. huius.

PROPOSITIO CXLI.

Inter duas rationes datas A B, C D, mediam proportionalem exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



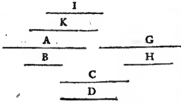
Fiat vt A ad B, ſic E ad F, vtque C ad D, ſic F ad G: tum inter E, G media proportionalis ſit K.

Dico rationem E K eſſe mediam inter rationes datas A B, C D. Quod ſic demonſtro. Rationes E F, F G componunt

 ratio-

rationem E G, hoc eſt rationes E F, F G inter ſe multiplicatæ produennt rationem E G. ſimiliter ratio E K cum ratione K G componit rationem E G, ſiue ratio E K ducta in rationem K G producit rationem K G ſed ratio K G ex conſtructione eſt eadem cum ratione E K. Ergo ratio E K in ſeipſam ducta producit rationem E G, eandem ſcilicet quam producebant rationes E F, F G, hoc eſt ex conſtructione ra-
a Colligitur ex 94. huius. tiones datæ A B, C D. Ergo [a] ratio E K media eſt inter rationes datas A B, C D, Fecimus ergo quod petebatur.

Aliter.

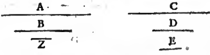


DAtæ ſint rationes binæ A B, G H, inter quas media ſit exhibenda. Fiat vt H ad G, ſic B ad I, & inter A ac I mediam fac proportionalem K : tum vt A eſt ad
b Per 25. huius. K, ſic [b] fiat ratio A B ad rationem C D. Dico hanc ſatisfacere poſtulato. Nam vt A ad K, ſic per conſtruct. ratio A B eſt ad rationem C D. quare cùm ex conſtruct. ratio A ad I, ſit duplicata rationis A ad K: erit quoque ratio A ad I duplicata proportionis rationum A B, C D. ſed
c 13. huius. vt A ad I, ſic [c] ratio A B ad rationem G H. ergo proportio rationis A B ad G H rationem, etiam duplicata eſt proportionis quam habet ratio A B ad rationem C D. Ergo rationes A B, C D, G H ſunt proportionales. factum igitur eſt quod petebatur.

PROPOSITIO CXLII.

DAtis duabus rationibus A B, C D, tertiam rationem proportionalem exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



FIat vt C ad D, ſic D ad E : vt autem C ad E, ſic A fiat ad Z. Dico rationem B Z datis rationibus eſſe tertiam proportionalem. Nam ratio C D ducta in rationem D E, hoc eſt ex conſtruct. in ſeipſam, producit rationem C E, hoc eſt ex conſtruct. rationem A Z. ſed etiam ratio A B ducta in rationem B Z producit rationem eandem A Z. ergo
d Colligitur ex 94. huius. [d] rationes A B, C D, B Z ſunt in continua analogia. Fecimus ergo quod petebatur. Alio etiam modo licebit demonſtrare rationem B Z tertiam eſſe proportionalem rationibus datis A B, C D. Quoniam enim per conſtructionem rationes A Z, C E
e 61. huius. ſimiles ſunt, erit [e] ratio A B ad rationem C D, vt ratio D E, hoc eſt ex conſtruct. vt ratio C D, ad rationem B Z.

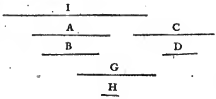
PROPOSITIO CXLIII.

DAtis duabus rationibus tertiam proportionalem aliter exhibere.

Con-

Digitized by Google

Conſtructio & demonſtratio.



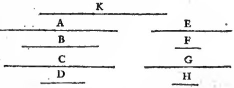
DAtæ ſint rationes binæ A B, C, D. fiat vt D ad C, ſic B ad I, vt autem A eſt ad I, ſic [a]fiat ratio C D ad rationem G H. Dico rationem G H rationibus A B, C D, tertiam eſſe proportionalem. Nam ratio A B eſt ad rationem C D, [b]vt A ad I, hoc eſt per conſtructionem vt ratio C D eſt ad rationem G H.

a 25. huius.

b 13 huius.

PROPOSITIO CXLIV.

DAtis tribus rationibus A B, C D, E F, quartam proportionalem rationem inuenire.

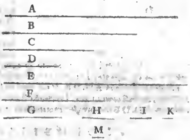


Conſtructio & demonſtratio.

FIat vt D ad C, ſic B ad K; & inueniatur [c]ratio G H, ad quam ratio E F eam habeat proportionem quam A habet ad K. c 25. huius.

Dico factum. Nam [d]ratio A B eſt ad rationem C D, vt A eſt ad K, hoc eſt per conſtruct. vt ratio E F eſt ad rationem G H. d 13. huius.

Scholion.



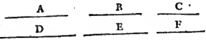
COgor hic tantiſper ſubſiſtere, ne quis fortaſſe in animum inducat, continuationem rationum non differre à continuatione illa de qua tractatur in Geometricis elementis, cùm tres vel plures quantitates eandem rationem perhibentur continuare, ac proinde exiſtimet, rationes debere eſſe ſimiles, vt eandem inter ſe continuent analogiam: ita vt datis tribus rationibus quæ ſint in continuata analogia A B, C D, E F, *ratio* A *ad* B, *debeat intelligi eſſe ſimilis vel eadem cum rationibus* C *ad* D, *&* E *ad* F, *quemadmodum contingit, ſi quatuor quantitates* G H I K *ſtatuantur in continua proportione, tum enim ratio* G *ad* H, *ſimilis eſt rationibus* H *ad* I, *&* I *ad* K. *Verùm nullo modo hoc conuenit continuationi rationum* A B, C D, E F. *nam ſicut quantitas* H, *poteſt eſſe media proportionalis inter infinita binaria linearum* L *&* M, G *&* I. *&c. ſic etiam ratio* C *ad* D, *poteſt eſſe media inter infinita binaria rationum etiam diſſimillimarum inter ſe, vti ex propoſitionibus præcedentibus ſtudioſus Lector facilè intelliget.*

PRO-

PROPOSITIO CXLV.

Sint binæ ſeries continuè proportionalium A,B,C, &c. D, E, F, &c. Dico rationes A D, B E, C F, in continua eſſe analogia.

Demonſtratio.



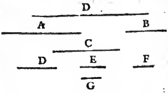
CVm ex hypotheſi rationes A B, B C ſint eædem, item eædem ſint rationes D E, E F, erit ratio A B, ad rationem B C, vt ratio D E ad rationem E F. igitur a 44. huius. a permutando ratio A B eſt ad ratiooem D E, vt ratio B C eſt ad rationem E F. ſed vt ratio A B ad rationem D E, ſic eſt ratio A D ad rationem B E; & vt ratio b 39. huius. B C ad rationem E F, b ita ratio B E ad rationem C F. Rationes igitur A D, B E, C F ſunt in continua analogia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLVI.

INter duas quantitates quaſuis A & B, media ſit proportionalis C, & aſſumatur alia quæcunque D.

Dico rationes A C, & C B ſimul ſumptas minores eſſe rationibus A D, D B ſimul ſumptis, adeoque minimas eſſe omnium rationum, datam rationem A B componentium.

Demonſtratio.



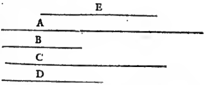
c 161. huius. RAtiones A D, A C, D B, c reducantur ad rationes D G, E G, F G ipſis æquales, quæ commune habeant conſequens G. Quoniam igitur rationes A D, A C, d 139. huius D B d ſunt in cōtinuā, etiam rationes D G, E G, F G ſunt in continua. ergo e etiam e 2. huius. D, E, F, ſunt in continua. Ergo f D cum F f Patet ex 25. quinti. maior eſt quàm E bis ſumpta. ſed vt D cum F ad E, bis ſumptam, ſic eſt g ratio g 2. huius. ipſius D cum F ad G, ad rationem ipſius E bis ſumptæ ad G. Ergo ratio D cum F ad G, maior eſt quàm ratio E bis h 114. huius. ſumptæ ad G. ſed ratio D cum F ad G, æquatur rationibus h D G, F G, hoc eſt ex i Ibid. conſtruct. rationibus A D, D B, & ratio ipſius E bis ſumptæ ad G æquatur i rationi E G bis, hoc eſt rationi A C bis, hoc eſt ex hypotheſi rationibus A C, & C B. Ergo rationes A D, D B maiores ſunt rationibus A C, C B. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLVII.

SIt ratio A B, ad rationem C D, vt C eſt ad D. Dico rationem A B duplicatam eſſe rationis C D.

Demon-

Demonſtratio.



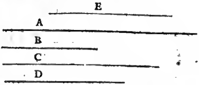
Fiat vt D ad C, ſic B ad E; igitur ratio [a] A B eſt ad rationem CD vt A ad E. ſed ex hypotheſi etiam ratio AB eſt ad rationem CD vt E ad D. Ergo A eſt ad E vt C ad D, deinde cùm ex conſtruct. B ſit ad E, vt D ad C, erit inuertendo E ad B, vt C ad D. igitur tam ratio AE, quàm ratio EB eadem eſt rationi CD. Sed ratio AB compoſita eſt ex rationibus AE, EB. ergo ratio AB componitur ex ratione CD bis ſumpta. ergo ratio AB eſt duplicata rationis CD. Quod erat demonſtrandum.

a 13. *huius.*

PROPOSITIO CXLVIII.

Lvbet etiam conuerſam huius demonſtrare.

Demonſtratio.



POnatur ratio A ad B duplicata rationis C ad D. Dico rationem AB ad CD rationem, eſſe vt C ad D. Fiat iterum vt D ad C, ita B ad E, erit [b] ratio AB ad CD rationem, vt A eſt ad E. ratio verò A ad B compoſita eſt ex ratione A ad E, & E ad B, hoc eſt ex conſtruct. C ad D; igitur cùm ponatur ratio A ad B, duplicata rationis C ad D, patet rationem quoque A ad E, eandem eſſe cum ratione E ad B, hoc eſt C ad D. ergo cùm vt A ad E, ita ratio AB ſit ad CD rationem, patet quod ratio AB ad rationem CD, ſit vt C eſt ad D. Quod fuit demonſtrandum.

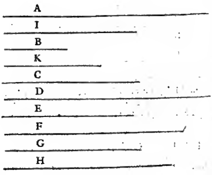
b *Ibid.*

PROPOSITIO CXLIX.

POſitis tribus quantitatibus A, B, C, & alijs inſuper tribus D, E, F: ſi ratio A ad B duplicata eſt D ad E, & ratio B ad C, duplicata E ad F.

Dico rationem quoque A ad C duplicatam eſſe rationis illius, quam habet D ad F.

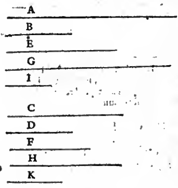
Demonſtratio.



POnatur inter A ad B, media I, & ſimiliter inter B,C, media ponatur K. Deinde fiat vt D ad E, ita F ad G, & vt E ad F, ita G ad H. Quoniam igitur ratio A B duplicata eſt tam rationum A I, I B, quàm rationum D E, F G; erunt rationes A I, I B, eædem cum rationibus D E, F G. pari argumento rationes B K, K C cum rationibus E F, G H eædem ſunt. rationes igitur A C, D H ex iiſdem rationibus (quamuis diuerſimodè diſpoſitis) componuntur, ac proinde a æquales ſunt. ſed ratio D H eſt duplicata rationis D F, vti facilè deducitur ex conſtructione. ergo & ratio A C eſt duplicata rationis D F. Quod erat demonſtrandum.

a 98. huius.

Corollarium.



HInc colligitur idem eſſe pronuntiandum de quauis continuatione terminorum quod præcedenti propoſitione de tribus eſt dictum: nam ſi fiat ratio A ad B duplicata C D, & B ad E duplicata D F, & E G, G I duplicatę F H, H K: inferri etiam legitimè poteſt, quod ratio A ad I ſit duplicata eius rationis quam habet C ad K quocunque tandem numero termini conſtituantur.

Imò quod de duplicata ratione præſens propoſitio enunciat, etiam eſt intelligendum de triplicata, quadruplicata, quintuplicata, & ſic de quauis alia multiplicata ratione reſpectu ſimplicis rationis C ad D, D ad F, &c. quod manifeſtè colligetur ſi diſcurſus demonſtrationis terminis illius multiplicationis aptetur.

PROPOSITIO CL.

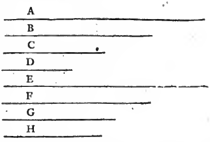
SInt quatuor numero quantitates A,B,C,D, & ratio A ad D, ſupponatur compoſitæ eſſe ex ratione duplicata A ad B, & ex ratione B ad C.

Dico rationem A ad B, eandem eſſe cum ratione C ad D.

Demon-

Demonſtratio.

VT A ad B, ita E fiat ad F, & F ad G; & vt B ad C, ita G fiat ad H. Igitur ratio E ad H, erit compoſita ex duplicata ratione A ad B, & ex ratione B ad C: ex quibus etiam cùm compoſita ſupponatur ratio A ad D, erit ratio A ad D, eadem cum ratione E ad H: & ratio B ad D, eadem cum ratione F ad H. ſed ratio G ad H, eadem eſt cum ratione B ad C, ex conſtructione; igitur ratio, a F ad G, eadem eſt cum ratione C ad D.



ſed ratio F ad G, eadem eſt ex conſtructione cum ratione E ad F, hoc eſt A ad B ex conſtructione: igitur ratio C ad D, eadem eſt cum ratione A ad B. Quod fuit demonſtrandum. a Patet ex 23. ſexti.

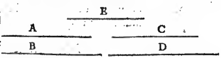
PROPOSITIO CLI.

SIt ratio A B ad C D, vt B ad A.

Dico rationem D ad C duplicatã eſſe rationis quam habet B ad A.

Demonſtratio.

FIat vt D ad B, ita C ad E, igitur permutando D eſt ad C, vt B ad E. ergo per 13 huius libri, ratio A B ad C D, eſt vt A ad E: ſed ratio A B ad C D,



ex hypotheſi eſt vt B ad A; igitur vt B ad A, ita A ad E, adeoque ratio B E eſt duplicata rationis B A: eſt autem ex conſtructione B ad E, vt D ad C; igitur cùm ratio B ad E, ſit duplicata B ad A, patet rationem D ad C, etiam eſſe duplicatam B ad A. Quod fuit demonſtrandum.

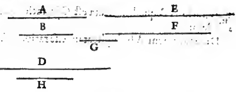
PROPOSITIO CLII.

DAtis rationibus A B & C D.

Oporteat duas exhibere quantitates E & F, vt ratio A E duplicata ſit rationis B F, ratio verò E F ſimilis ſit rationi datæ D C.

Conſtructio & demonſtratio.

FIant proportionales A B G & C D H. Deinde cõſtituantur E F G in eadem ratione in qua ſunt quantitates H D C. Dico factum quod requiritur, ſcilicet E F rationem eandem eſſe cũ ratione D C, rationem



DD 2 quoque

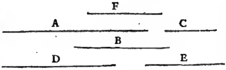
quoque A E duplicatam eſſe rationis BF. Quoniam A B G & E F G, ſunt quantitates continuè proportionales, habentes G communem primam: igitur [a] ratio A ad E, duplicata eſt rationis B ad F, eſtque ex conſtructione D ad C, vt E ad F. Quare præſtitimus poſtulatum.

a 17. Progreſſ.

PROPOSITIO CLIII.

SInt proportionales quantitates A B C ſicut & D B E.
Dico rationem A D ad C E rationem, duplicatam habere proportionem eius quam habet A ad D.

Demonſtratio.



b 13. huius.

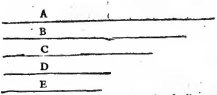
c 17 ſexti.

FIat vt E ad C, ita D ad F, erit itaque [b] ratio A D ad rationem C E, vt A ad F. deinde quia A C, D E rectangula [c] æqualia ſunt, vtpote æqualia eidem quadrato B, eſt vt E ad C, ita A ad D. ſed vt E ad C, ita quoque eſt D ad F, ex conſtructione. Igitur ratio A ad F duplicata eſt rationis A ad D, hoc eſt proportio rationis A D ad C E rationem, duplicata eſt rationis A ad D. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CLIV.

SI quinquè quantitates eandem rationem continuauerint:
Dico rationem primæ quantitatis ad quintam, duplicatam eſſe rationis quam ſecunda habet ad quartam.

Demonſtratio.



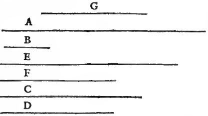
POnantur quinque quantitates A,B,C,D,E eſſe in cõtinuata analogia. Dico rationem A ad E, eſſe duplicatam rationis B ad D. cùm enim omnes quinque ſint proportionales continuæ, igitur etiam C B A & C D E, ſunt proportionales quantitates. Ergo ratio [d] A ad E duplicata eſt rationis B ad D. Quod erat demonſtrandum.

d 17. Progreſſ.

PROPOSITIO CLV.

SI ratio A B quadruplicata eſt C D, ratio autem E F, duplicata eiuſdem:
Dico rationem A B duplicatam eſſe rationis E ad F.

Demonſtratio.



Fiat vt F ad E, ita B ad G. Igitur, ratio A ad G, eadem eſt cum proportione rationum A B, E F: ſed ratio A ad B, componitur ex ratione A ad G, G ad B; hoc eſt E ad F, duplicata ſcilicet rationis C ad D; igitur ratio A ad B, eſt compoſita ex ratione A ad G, & duplicata ratione C ad D; ſed ratio A ad B, ponitur quadruplicata rationis C ad D. Igitur ratio A ad G, duplicata eſt rationis C ad D. quare ratio A ad G, eadem eſt cum ratione E ad F. vnde & proportio rationum A B, E F eadem eſt cum ratione E ad F. Quare [b] ratio A B duplicata eſt rationis E F.

a 13 huius.

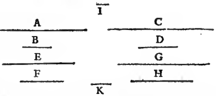
b 147 huius.

PROPOSITIO CLVI.

SI ratio A B ſit duplicata rationis E F, ratio quoque C D duplicata eius quam habet G ad H.

Dico rationem A B ductam in C D rationem, exhibere duplicatam eius rationem quæ oritur ex multiplicatione rationis E F in ratione G H.

Demonſtratio.



Fiat vt C ad D, ita B ad I, erit [c] igitur ratio A B ducta in C D, æqualis rationi A ad I. ſimiliter ſi fiat vt G ad H, ita F ad K: erit ratio E ad K, eadem cum E F ducta in G H. ſed A I ratio compoſita eſt ex A ad B, id eſt duplicata E ad F, & ex B ad I, id eſt per conſtruct. C ad D, id eſt per hypotheſim, duplicata G ad H, & ſimiliter ratio E ad K, compoſita eſt ex ratione E ad F, & F ad K. id eſt per conſtruct. G ad H. igitur ratio A ad I, duplicata eſt rationis E ad K. ergo A B ratio ducta in C D, duplicatam habet proportionem eius, quam continet E F ratio ducta in G H. Quod erat demonſtrandum.

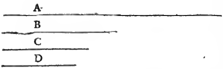
c 75 huius.

PROPOSITIO CLVII.

SI ratio A B quadruplicata fuerit rationis B ad C, & B D ratio quadruplicata rationis C ad D.

Dico rationem quoque A ad D, fore quadruplicatam eius quam habet B ad D.

Demonſtratio.

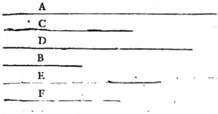


QVoniam ratio B ad D, ponitur quadruplicata rationis C ad D, igitur ratio B ad C eſt triplicata rationis C ad D. ſed ratio A ad B eſt quadruplicata B ad C, ; igitur ratio A ad B, eſt duodecuplicata rationis C ad D, ſed ratio B ad D, eſt quadruplicata eiuſdem rationis C ad D. Igitur ratio A ad D, eſt ſexdecuplicata rationis C ad D, cuius ratio B ad D, eſt quadruplicata : ratio verò ſexdecuplicata eſt quadruplicata quadruplicatæ (cùm quater quatuor proferant ſedecim) manifeſta igitur eſt veritas propoſitionis.

PROPOSITIO CLVIII.

QVod ſi inter A ad B quæuis duæ aſſumptæ fuerint C & D. Dico rationes AC in CD, CD in DB, idem producere quod ratio bis ducta in ſe exhibet cuius A ad B triplicata eſt.

Demonſtratio.



INter A & B, ponantur duæ mediæ E, & F. igitur rationes AE, EF, FB ſunt eædem. ſed ratio AB, componitur ex rationibus AE, EF, FB. ergo ratio AB ex tribus æqualibus rationibus, quarum vnius eſt triplicata, componitur, hoc eſt ex iiſdem inter ſe multiplicatis producitur. Atqui etiam ratio AB componitur ſiue producitur ex rationibus AC, CD, DB. Liquet ergo propoſitum.

Corollarium.

OCcurrit hinc reflexio notatu digna, cur ſcilicet hucvſque in vanum laborent Geometræ in mezolabiis adinueniendis, & in quo difficultatis cardo verſetur. Ego ſanè ex propoſitione iam allata obſeruo inter duas quãtitates datas A, & B, duas medias exhibere, non aliud eſſe quàm rationem inuenire quæ bis in ſe ducta producat rationem datam A ad B, ſiue rationem A ad B diuidere in tres rationes æquales, quæ inter ſe multiplicatæ producant rationem ipſam A ad B. Iam verò cùm quæuis ratio diuidi poſſit in quaſcunque & quotcunque rationes, ex quarũ multiplicatione queat produci: copia nimirum & varietas rationũ datam rationem cõponentium ſeu producentium, difficultatẽ in præſenti negotio eam parit quam ſuperare hactenus Geometræ non potuere : quemadmodum autem arcum datum circuli non eſt difficile in tres partes partiri ſine vlla alia determinatione, ita neque rationem in tres aliquas rationes quæ generent rationem datam nullius negocij eſt : ſed ſi hucvſque Geometrarum induſtria vano labore tentauit in partes æquales datum arcum circuli diuidere; mirum videri non debet quod partitio alicuius rationis in tres rationes, quæ æquales ſint inter ſe, & multiplicatæ inter ſe rationem datam producant, difficultatem contineat. Oſtendimus quidem facilem Methodum diuidendi rationem in partes æquales ſi diuiſio illa partes conſideret quæ per additionem generant ratio-

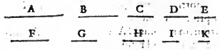
rationem datam, ſed poſtularer etiam præſentis libri mareria partiri rationem datam in partes æquales, quę facta multiplicarione inrer ſe exhibeanr rationem quam componunr. Sed cogor materiam illam in aliud tempus differre; cùm & valetudo præcipitare cogar quod præ manibus habeo, & imperium vrgeat illorum quibus obnoxium me fecit religioſa Profeſſio.

PROPOSITIO CLIX.

POnantur duæ ſeries quinque quantitatum in continuata ratione A, B, C, D, E; F, G, H, I, K.

Dico rectangulum AF ad EK, duplicatam habere eius rationem quam haber rectangulum BG, ad DI rectangulum.

Demonſtratio.



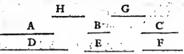
REctangulum AF ad EK rectangulum compoſitam habet rationem ex ratione A ad E, hoc eſt [a] duplicata ratione B ad D, & ex ratione F ad K, hoc eſt duplicata ratione G ad I. igitur cùm rectanguli BG ad DI ratio ex iiſdem rationibus cōponatur; rectanguli AF ad EK ratio, eſt duplicata rationis BG rectanguli ad rectangulum DI. Quod erat demonſtrandum. [a] *Per 154. huius.*

PROPOSITIO CLX.

SInt duæ ſeries trium continuarum A, B, C, D, E, F.

Dico rationem CA ductam in rationem FD, duplicatam exhibere rationem eius quæ profertur per ductum rationis BA in ED.

Demonſtratio.



FIat vt F ad D, ita A ad H: & vt E ad D, ita A ad G. Igitur ratio C ad H eſt æqualis [b] rationi CA, ductæ in FD: & ratio BG, æqualis eſt rationi BA, ductæ in rationem ED. ſed ratio CH, duplicata eſt rationis BG, nam ratio CH componitur ex rationibus CA, AH (hoc eſt ex conſtruct. FD) quæ duplicatę ſunt rationum CB, BG, hoc eſt FE, ex quibus componitur ratio CG. Igitur ratio CA ducta in FE duplicata eſt rationis BA ductæ in ED. Quod erat demonſtrandum. [b] *75. huius.*

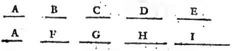
PROPOSITIO CLXI.

SInt duæ ſeries continuè proportionalium eandem ſeu æqualem habentium primam A.

Dico rationem CA ad rationem GA habere triplicatam proportionem eius, quam habet ratio BA ad rationem FA: & rationem DA ad rationem HA triplicatam habere proportionem eius quam habet ratio BA ad rationem FA. Atque ita deinceps in infinitum.

Demon-

Demonſtratio.



a 2. huius. b 27. Progreſſ.

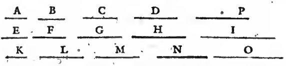
RAtio C A eſt ad rationem [a] G A, vt C ad G, & ratio B A eſt ad rationem F A, vt B ad F. ſed ratio [b] C ad G, eſt duplicata rationis B ad F. ergo & ratio C A ad rationem G A duplicatam habet proportionem eius quam ratio B A, habet ad rationem F A. pari argumento demonſtrabimus ex iam citatis propoſitionibus reliquas aſſertionis partes.

PROPOSITIO CLXII.

SInt binę ſeries continuè proportionalium A,B,C,D,P,&c. E,F,G,H,I, &c. ſiue æquales habeant primas, ſiue non.

Dico nihilominus proportionem rationis C A ad rationem G E, duplicatam eſſe eius quam habet ratio B A ad rationem F E: & proportionem rationis D A ad rationem H E triplicatam eſſe eius quam habet ratio B A ad F E. Atque ita deinceps in infinitum.

Demonſtratio.



c 161. huius.

ASſumatur quantitas K æqualis A, & fiat vt E ad F, ſic K ad L, continueturque ratio K L per terminos K L M N O. Igitur proportio rationis C A ad rationem M K [c] eſt duplicata eius quam habet ratio B A ad rationem L K. ſed ratio M K ex conſtruct. eſt ratio G E, & ratio L K eſt ratio F E. ergo proportio rationis C A ad rationem G E, eſt duplicata eius quam habet ratio B A ad rationem F E. pari modo reliquas aſſertionis partes demonſtrabimus.

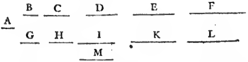
PROPOSITIO CLXIII.

DAtæ ſint binæ ſeries continuè proportionalium communem habentium primam A.

Dico rationem quartarum D I ad rationem ſecundarum B G, duplicatam habere proportionem rationis B ad G: & rationem quintarum E K, ad rationem ſecundarum B G, triplicatam habere proportionem rationis B ad G: atque ita deinceps in infinitum.

Demon-

Demonſtratio.



Flat vt G ad B, ſic I ad M. erit ergo [a] ratio D I ad rationem B G, vt D ad M. *a 13 huius.*
Iam verò ratio D ad M, componitur ex ratione D I, hoc eſt [b] triplicata rationis *b 27. Progreſſ.*
B G, & ex ratione I M, hoc eſt per conſtructionem ratione G B. Atqui rationes
B G, G B, componunt ſiue producunt [c] rationem æqualitatis. Ergo ratio D M com- *c 76 huius.*
ponitur ex ratione duplicata rationis B G, & ratione æqualitatis. ſed [d] ratio æqua- *d Coroll. 93. huius.*
litatis in rationum compoſitione nihil addit. ergo ratio D M eſt duplicata ratio-
nis B G. ſed vt D ad M, ita ratio D I ad rationem B G. ergo ratio D I ad rationem
B G, duplicatam habet proportionem rationis B G. Pari modo reliquas Theore-
matis partes demonſtrabimus.

Scholion.

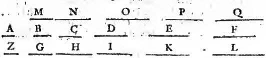
Relucet in præſenti Theoremate digna obſeruatione diuerſitas inter rationes ſimplices, & rationum proportiones. Nam per 27. libri progreſſionum Geometricarum ratio D I *triplicata eſt rationis* B G, *vbi proportio rationum* D I, B G, *vti iam demonſtrauimus, ſolùm rationis* B G *eſt duplicata. ſimiliter ratio* E K *per 27. progreſſ. eſt quadruplicata rationis* B G; *proportio autem rationum* E K, B G *tantùm triplicata eſt rationis* B G. *Atque ita deinceps in infinitum proportiones rationum ſemper vnitate minùs rationum* B G *multiplicant quàm rationes ſimplices.*

PROPOSITIO CLXIV.

Sint duæ ſeries continuè proportionalium, quæ æquales habeant primas A & Z.

Dico proportionem rationis C H ad rationem G B triplicatam eſſe proportionis quam habet ratio B G ad rationem Z A; & proportionem rationum D I, H C, quintuplicatam eſſe proportionis rationum C H, G B: proportionem verò rationum E K, I D, eſſe ſeptuplicatam proportionis rationum D I, H C, atque ita in infinitum.

Demonſtratio.



Flat vt A ad Z, ſic G ad M, & vt B ad G, ſic H ad N; & vt C ad H, ſic I ad
O, & ſic deinceps. ratio igitur B M eſt [e] proportio rationum B G, A Z; & ratio *e 13. huius.*
C N eſt proportio rationum C H, G B; & ratio D I eſt proportio rationum D I,
H C, & ſic deinceps. Iam verò quia A eſt æqualis Z, eſtque vt A ad Z ſic G ad M,
erit G æqualis ipſi M, ac proinde ratio B M æqualis rationi B G. Deinde ratio C N
compoſita eſt ex ratione C H, (hoc eſt duplicata [f] rationis B G) & ex ratione H N, *f 27. Progreſſ.*
hoc eſt per conſtructionem iterum ratione B G. ergo ratio C N, hoc eſt, vt iam
oſtendi, proportio rationum C H, G B triplicata eſt rationis B G, hoc eſt rationis
B M, hoc eſt, vt oſtenſum ſuprà, proportionis rationũ B G, Z A. Præterea ratio D O,
componitur ex ratione D I, quæ triplicata [g] eſt rationis C H, & ex ratione I O, hoc *g 27. Progreſſ.*

eſt

a ibid. eſt per conſtruct. ex ratione C H, quæ duplicata eſt rationis a B G. Ergo ratio D O hoc eſt, vt oſtenſum ſuprà, proportio rationum D I, H C, quintuplicata eſt rationis B G. Eodem ratiocinandi modo procedetur in infinitum. Conſtat ergo propoſitum.

PROPOSITIO CLXV.

POnantur duæ ſeries quinque continuè proportionalium A, B, C, D, E & F, G, H, I, K.

Dico proportionem rationum A F & E K duplicatam eſſe proportionis rationum B G, D I.

Demonſtratio.

A B C D E

F G H I K

QVoniam rationes A F, B G, C H, D I, E K ſunt in continua analogia, etiam rationes A F, C H, E K erunt in continua, vti facilè ex hypotheſi & 49. huius demonſtrabitur. Proportio igitur rationum A B, E K duplicata eſt proportionis rationum A F, C H. ſed ex hypotheſi & permutando, vt A F ratio eſt ad rationem C H, ſic ratio B G eſt ad rationem D I. ergo proportio rationum A F, E K, duplicata etiam eſt proportionis rationum B G, D I. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXVI.

DIuiſa ſit A B in punctis C & D, vt ſint proportionales A C, C D, D B.

Dico rectangulum D A C ad C B D rectangulum, triplicatam habere rationem eius quam habet A C ad C D.

Demonſtratio.

A C D B

QVoniam igitur proportionales ſunt lineæ A C, C D, D B; erit componendo & permutando A D ad C B, vt C D ad D B, hoc eſt A C ad C D, rectangulum autem D A C ad C B D rectangulum compoſitam habet rationem ex D A ad C B, hoc eſt, vt iam oſtendi, A C ad C D, & ex ratione A C ad B D. ſed ratio A C ad B D, duplicata eſt rationis A C ad C D. igitur ratio rectanguli D A C ad C B D, rectangulum triplicata eſt rationis A C ad C D. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

VNde ſi quis poſtularet datam lineam A B diuidi in C & D, vt rectangulum D A C ad C B D rectangulum datam obtineat rationem, vix aliud ab eo diuerſum exigeret qui duas medias requireret aſſignari inter duas datas.

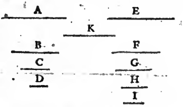
PRO-

PROPOSITIO CLXVII.

SI eandem rationem continuent quatuor quantitates A,B,C,D,& aliæ rurſum quinque E, F, G, H, I, ſic vt primæ A, E & poſtremæ D,I ſint æquales:

Dico rationem A B quadruplicatam eſſe eius cuius ratio E F eſt triplicata.

Demonſtratio.



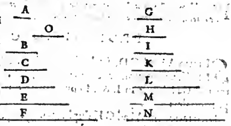
INter terminos ſingulos ſeriei A interponantur tres mediæ, & inter terminos ſeriei E duæ mediæ: & conſtabit vtraque ſeries tredecim terminis cōtinuè proportionalibus, eritque B quinta in ſua ſerie & F quarta in ſua. Præterea quoniam primæ A, E, & vltimæ D, I ſunt pares, erunt neceſſariò omnes termini vtriuſque ſeriei alter alteri æquales. Ex quo manifeſtum eſt rationem A ad B, hoc eſt primæ ad quintam, quadruplicatam eſſe eius cuius ratio E ad F, id eſt primæ ad quartam eſt triplicata. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXVIII.

SI eandem rationem continuent ſex quantitates A,B,C,D,E,F, & aliæ ſeptem quantitates G,H,I,K,L,M,N, ita tamen vt A & G, æquales ſint, quemadmodum & F N.

Dico rationem A ad B ſextuplicatam eiuſdem eſſe rationis, cuius ratio G ad H eſt quintuplicata.

Demonſtratio.



INterpoſitis enim inter terminos primæ ſeriei quinque quantitatibus, quæ cum prioribus eandem rationem continuent, & ſimiliter inter terminos ſingulos ſecundæ ſeriei interiectis quatuor quantitatibus, continuè proportionalibus, exſurget numerus quantitatũ primæ ſeriei æqualis numero quantitatum quæ in ſecunda conſtitutæ ſunt: cùm vtraque ſeries triginta & vnâ conſtet quantitatibus: Ratio autem A ad B ſextuplicata eſt rationis eius, cuius ratio A ad O (quantitatem ipſi B proximam) habet quintuplicatam. Igitur cùm O quantitas magnitudini H, ſit æqualis, ex eo quod primæ A & G ponantur æquales & ſimiliter vltimę, F, N, ſintque tam O, quàm H ſextæ in ſua ſerie, manifeſtum quoque eſt rationem A B ſextuplicatam eſſe eius rationis cuius G ad H, eſt quintuplicata. Quod fuit demonſtrandum.

Scholion.

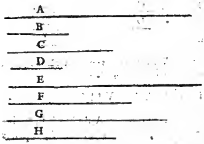
HAnc materiam vlteriùs non proſequor, cùm ex ijs quæ iam diximus, ſufficienter iudicium formari queat qua ratione in vlteriore terminorum numero ſit procedendum.

PROPOSITIO CLXIX.

SI A ad B eandem rationem habuerit quam C ad D, & E ad F, quam G ad H; ſit autem ratio A ad B, duplicata rationis E ad F.

Dico A cum E, ad B cum D duplicatam quoque habere rationem eius quam habet E cum G ad F cum H.

Demonſtratio.



QVoniam A ad B, ratio duplicata ponitur eius rationis quam habet E ad F, & quia C ad D, ratio eadem eſt cum ratione A ad B, erit & C ad D, ratio duplicata ipſius E ad F, vel G ad H: quia verò eſt vt E ad F, ita G ad H, & permutando, vt E ad G, ſic F ad H, erit vt E cum G, ad E, ſic F cum H ad F, & permutando vt E ad F, ſic E cum G, ad F cum H. ſimiliter eſt vt A ad B, ſic A cum C, ad B cum D: eſt autem A ad B, ratio duplicata ex hypotheſi rationis E ad F, quare etiam duplicata erit ratio A cum C, ad B cum D eius quam habet E cum G ad F cum H. Quod fuit demonſtrandum.

Scholion.

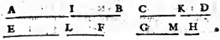
PRout hic proceſſimus in duplicata ratione, cùm opus fuerit, de quauis alia multiplicata ratione intelligi debet, modò eadem ſeruetur hypotheſis.

PROPOSITIO CLXX.

SI ratio A B ad C D, ſit duplicata E F ad G H; & diuiſæ A B, C D in I & K, proportionales exhibeant A I, I B ipſis C K, K D, & ſimiliter E F, G H diuiſæ in L & M conſtituant E L, L F ipſis G M, M H proportionales:

Dico rationem A I ad C K duplicatam quoque eſſe eius rationis quam habet E L ad G M.

Demonſtratio.



QVoniam ponuntur proportionales tam A I, I B ipſis C K, K D quàm E L, L F ipſis G M, M H: igitur vt A I cum I B ad A I, ita eſt C K cum K D ad C K, vnde

vnde vt A I ad CK, ita A B ad CD. Eodem modo infertur eſſe E L ad GM, vt eſt E F ad G H: eſt autem ratio A B ad CD. duplicata rationis E F ad G H: igitur etiam ratio A I ad C K, duplicata eſt rationis E L ad G M. Quod fuit demonſtrandum.

Quod in ſcholio præcedenti dictum eſt de 169. intelligi etiam voluimus de præſenti theoremate.

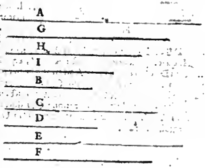
PROPOSITIO CLXXI.

SI ratio A ad B, duplicata ſit C ad D, ratio quoque C ad D duplicata rationis quam habet E ad F.

Dico rationem A ad B, quadruplicatam eſſe rationis E ad F.

Demonſtratio.

INterponantur inter A & B tres quantitates, quæ cũ A & B. ſint in continua proportione, ſcilicet G,H, & I. igitur ratio A ad B, duplicata eſt rationis A ad H. ſed ratio A ad B, ponitur duplicata rationis C ad D; igitur ratio C ad D, eſt eadem cum ratione A ad H. Cùm ergo ratio A ad H, duplicata ſit rationis A ad G, etiam ratio C ad D, eſt duplicata rationis A ad G. ſed ratio C ad D, ex hypotheſi etiam duplicata eſt rationis E ad F. igitur ratio A ad G, eadem eſt cum ratione E ad F: eſt autem ratio A ad B, quadruplicata rationis A ad G. Igitur etiam ratio A ad B, quadruplicata eſt rationis E ad F. Quod fuit demonſtrandum.



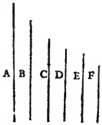
Scholion.

HAec ratiocinatio habet locum non ſolùm in caſu quo prima ad ſecundã duplicatam rationem habet tertia ad quartam, &c. ſed vniuerſaliſſima eſt in quauis multiplicata ratione. nam demonſtrandi ratio omnibus caſibus inſeruit, modò attendatur ad numerum mediarum qui interſerendus eſt inter terminos datos primæ rationis.

PROPOSITIO CLXXII.

SIt ratio A ad B, duplicata rationis B ad C, & ratio B ad C, duplicata rationis C ad D, & ratio C ad D, duplicata rationis D ad E, & ſic conſequenter in infinitum.

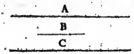
Oporteat vltimum ſiue minimum terminum exhibere ſcilicet F, huius progreſſionis in infinitum protenſæ.



Conſtructio & demonſtratio.

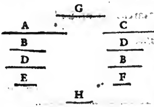
HOc problema ſolutum reperies libro quem præmiſimus de hyperbola propoſitione 133. vbi & alia plura huic ſimilia.

Pagina 909. propoſ.78. ponatur hæc figura.



Pagina 913. propoſ.87.

In ſecunda figura quantitates D,D æquales eſſe debent, vti & quantitates B,B; id enim poſcit hypotheſis: in contextu quoque addenda quædam verba & errores literarum corrigendi. Sic ergo legatur:



Sumantur deinde claritatis cauſa in ſecundo ſchemate quantitates D,D & B,B, æquales, ita vt oriantur octo termini, licet demonſtratio iam poſita etiam hic valeat, cùm hypotheſis quoad rem eadem ſit, placet tamē aliam ſubiungere quæ vtrique caſui inſeruiat. Inueniantur [a] rationum AB, CD denominatores A & G; item DE, BF rationum denominatores D & H; quoniam igitur ratio AB ad CD rationem, ponitur eſſe, vt

[a 13. huius.] [b 41. huius.] ratio DE ad BF rationem; igitur A ad G habet [b] eandem proportionem quam D [c Per Coroll. 85.] ad H. quare quod oritur ex ductu A in H, æquale erit illi [c] quod generatur ex ductu G in D. ergo etiam ratio A ad B, ducta in rationem B ad F, producet æqualem rationem ei, quam producit ratio CD ducta in rationem DE: componitur autem ſiue producitur ratio AF ex ratione AB ductâ in BF rationem, & ratio C ad E, compoſita ſiue producta eſt ex ratione CD ductâ in rationem DE. igitur cùm ſint [d Princip. 3. huius.] rationes AB, BF eædem cum rationibus CD, DE, erit [d] A ad F, vt E ad C. Quod fuit demonſtrandum.

QVA.

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER NONVS.

De Cylindro, Cono, Sphæra, Sphæroide, & vtroque Conoide Parabolico & Hyperbolico.

ARGVMENTVM.

PRæſenti libro viam tandem magis propinquam ſterno ad quadraturas: cùm enim per reductionem Cylindri circularis ad alıud corpus illi æquale conemur quadraturas aſſequi; eundem priùs Cylindrum oportuit diuidere in quaſdam partes, quarum præcipua illa eſt, quæ generatur ſectione factâ per diametrum baſeos Cylindricæ, axi non parallelâ: & fruſtum quidem tali ſectione ablatum vngulam appellabimus, quod vngularem formam non vſque adeò reſpuat. Porrò & ipſam vngulam, & eius partes ſectionibus ad axem cylindri æquidiſtantibus decuſſas ad parallelepipeda reducemus: cylindricam præterea vngulæ ſuperficiem ad quadratum aut rectangulum illi æquale reuocabimus: reliqua ex partitionum argumentis pleniùs intelligi poterunt.

DEFINITIO PRIMA.

VNgula cylindrica eſt cylindri portio, abſciſſa plano per aliquam baſis cylindricæ diametrum tranſeunte, ſemicirculo, ſemiellipſi, & parte ſuperficiei curuę cylindricæ contenta.

Eius imaginem habes paſſim in figuris huius libri expreſſam; & proximè quidem in figura propoſitionis 6. in qua portio cylindri, quæ continetur ſemicirculo FCG, ſemiellipſi FDKG, & ſuperficie curua cylindrica DFCG, vngula eſt.

DEFINITIO SECVNDA.

INuolucrum vngulæ eſt priſma vngulam ſibi inſcriptam ambiens. Vide figuram ſcholij propoſitionis 28. quæ huiuſmodi ſolidum exhibet, priſma enim AFEDHCG eſt inuolucrum vngulæ ABCD. cetera in decurſu operis ſuis quęque locis definientur.

ARGV-

PARTITIO LIBRI.

IN octo partes hunc librum diſtinguimus.

Prima vngulam cylindricam, eiuſque partes, planis ad cylindri axem parallelis reſciſſas ad cubum reducit.

Secunda idem præſtat de inuolucro vngulari eiuſque partibus, quas plana ad axem cylindri parallela abſcindunt.

Tertia cylindricam vngulæ cylindricæ ſuperficiem ad quadratum reducit, aliaſque eius affectiones notas facit.

Quarta miram vngulæ cylindricæ cum ſphæra ſimilitudinem continet.

Quinta vngulam cylindricam & ſphæram cum cylindro parabolico comparat.

Sexta ſphæroideos proprietates tractat.

Septima contemplationem inſtituit de Conoide Parabolico.

Octaua de Hyperbolico.

PARS

PARS PRIMA

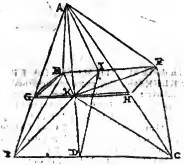
Vngulam cylindricam, eiuſq; partes, planis ad cylindri axem parallelis reſciſſas ad cubum reducit.

PROPOSITIO PRIMA.

TRiangulum ABC diuiſum ſit vtcunque recta AD, quam ſecet GH parallela BC, ducto per GH plano EGH, ponatur in eo EF, quæ æquidiſtet GH, iunctis deinde AE, EB, & AF, FC, diuiſâque EF in I, ſecundùm rationem BD ad DC, agatur planum per AD & punctum I.

Dico corpus AFCBE diuidi plano AID ſecundùm proportionem BD ad DC.

Demonſtratio.



EX puncto K linearum GH, AD communi interſectione, ponantur rectæ KB, KC. Eſt GK ad KH, vt BD ad DC, hoc eſt ex hypotheſi vt EI ad IF: ergo figura GKIE eſt ad figuram KIFH, vt GK ad KH, (ductis enim EK, KF, eſt triangulum EKI ad IKF, vt eſt EI ad IF: triangulum quoque GEK ad a 6. duodec.
KFH, vt GK ad KH, hoc eſt EI ad IF.) quare cùm [a] pyramis AEGKI ad pyramidem AIKHF eam obtineat rationem, quã figura GEIK ad figuram FIKH, b 5. duodec.
etiam pyramis ad pyramidem eſt vt GK ad KH. ſed etiam [b] pyramis GEKB eſt ad pyramidem FKHC, vt GEK baſis ad baſim KFH, hoc eſt, vt GK ad KH, veluti etiam pyramis EKIB ad IKFC pyramidem. quare tota pyramis GEIKB ad totam IKHFC, rationem habet eandem eum GK ad KH, hoc eſt BD ad DC. c 14. quinti.
Ergo [c] AIKEB corpus ad corpus AIKCF, eſt vt BD ad DC. ſed etiam pyramis IKDB ad IKDC pyramidem rationem obtinet quã baſis BKD ad baſim DKC, hoc eſt quam BD ad DC. Igitur totum ſolidum AIDB ad ſolidum AIDC, proportionem habet quam BD linea ad DC lineam. Quod fuit demonſtrandum.

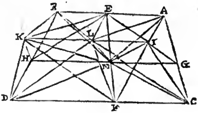
Digitized by Google

PROPOSITIO II.

POnatur figurá quadrilatera A B C D, cuius oppoſita latera A B, C D proportionaliter diuidat recta E F: ſit autem G H parallela C D ſecans E F in M, & in plano per G H ducto collocetur I K parallela G H, quæ ſecetur in L ſecundùm rationem C F ad F D. Iunctis denique A I, I C, B K, K D planum ponatur per E F & punctum L.

Dico corpus A I C D K B diuiſum eſſe plano E L F ſecundùm rationem C F ad F D.

Demonſtratio.



COncipiantur ductæ M A, M B, M I, M K, L A, L B, M C, M D, L C, L D, nec non lineæ F I, F K & E I, E K ex hac conſtructione orientur pyramides variæ, variis quidem baſibus inſiſtentes, ſed habentes communes altitudines, quemadmodum videre eſt in pyramide G I M L C & L M H K D, ac pyramidibus A I G M L, B L M H K, quarum baſes G I L M & L M H K, inter ſe eam ſortiuntur rationem, quam habet linea G M ad M H, hoc eſt F C ad F D. ſuperſunt prætereà pyramides L M F C, L M F D, & E M L A, E M L B quarum baſes etiam ſortiuntur eandem rationem quam ratio A E ad E B, ſiue C F ad F D. quare E L M A vnà cum L M G I A ad E M L B, vna cum M L K H B eandem continent rationem quam F L M C vnà cum G I L M C ad L M F D, vnà cum L M K H D. ergo totum A I C F L E ad totum E L F D K B, eſt vt C F ad F D. Quod fuit demonſtrandum,

PROPOSITIO III.

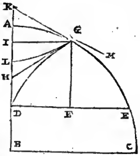
QVartæ parti ſuperficiei circularis A B C inſcribatur D E ſemidiametro B C æquidiſtans: quâ bifariam in F diuiſa, erigatur normaliter F G ad rectam D E, ponaturq́; G I parallela B C.

Dico parallelogrammum I G F maius eſſe dimidio ſegmenti A D E.

Demon-

Demonſtratio.

DVctâ GK quæ contingat circulum in G, occurratque AB productæ in K. fiat angulo KGI, ęqualis angulus IGH, factâ deinde rectâ IL æquali AI, deſcribantur circulorum arcus LG, DG ſemidiametro AB. Quoniam IGF angulus rectus eſt, reliqui duo KGI & MGF, recto ſunt ęquales. ſed angulus HGI æquatur angulo KGI. ergo etiam HGI cum MGF, facit rectum: ſed etiam HGI cum HGF, facit rectum. Igitur HGF angulus angulo FGM eſt æqualis. quare cùm MG tangat CG in G, etiam HG tanget arcum DG in G. ſimiliter demonſtrabo etiam arcum LG in eodem puncto tangi ab HG. Quare æquales ſunt figurę IGL & GDF, quantitatibus AGI & GFE. ſed rectangulum IF, excedit figuras GIL, DGF quantitate miſtilinea LGD. eâdem ergo quantitate rectangulum IF, ſuperat figuras AGI, GFE. ſunt igitur illæ dimidio ſegmenti ADE minores, & conſequenter IF maius eſt dimidio eiuſdem ſegmenti AGED. Quod demonſtrare oportuit.

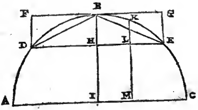


PROPOSITIO IV.

TRiangulum maximum cuiuis ſegmento circuli inſcriptum, quod ſemicirculum non excedit, maius eſt eiuſdem ſegmenti dimidio.

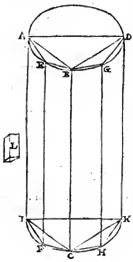
Demonſtratio.

POnatur ſemicirculus ABC, ex quo ſegmentum quoduis demarur DBE, habens DE parallelam AC diametro; erigatur deinde ex I, centro circuli normaliter IB, quæ diuidet DE bifariam; perfecto deinde rectangulo latitudinis DE, altitudinis verò HB, erit FG circulum contingens, ęquidiſtat enim DE rectæ FG, & diameter IB orthogona eſt parallelis FG, DE: poſitâ igitur quauis KLM, quæ æquidiſtet BH, erit KM minor BI. ablatis ergo HI, LM æqualibus lineis, remanebit BH maior KL. quare triangulum DBE maius erit DKE triangulo, ac proinde maximum eſt eorum quæ ſegmento DBE inſcribi queunt: eſt autem DBE triangulum dimidio ſegmenti maius, cùm triangulum DBE, rectanguli FG ſit dimidium. triangulum igitur maximum dimidio ſegmenti eſt maius. Quod fuit demonſtrandum.



PROPOSITIO V.

INſcribatur ſemibaſi cylindricæ triangulum maximum ABD, reſiduis quoque ſegmentis maxima triangula inſcribantur AEB, DGB: & hoc ſemper fiat. Per ſingulas deinde harum linearum ductis planis quæ axi cylindri ęquidiſtent, ſemicylindro inſcribantur priſmata plura ſemper ac plura in infinitum.

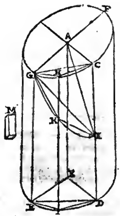


Dico tandē ex ſemicylindro ABCD, relinquendam quantitatem ſolidam quauis datâ L, minorem ex continuata ſine termino priſmatum ablatione.

Demonſtratio.

OStenſum præcedenti propoſitione triangula illa ſegmentis inſcripta maiora eſſe dimidiis ſegmentorum, quibus inſcribuntur: eſt autem ratio priſmatum ad ſegmenta cylindrica eadem cùm ratione baſium triangulorũ nempe ABD, AEB, BDG ad ſegmenta circularia, quæ ſunt baſes ſegmentorum cylindricorũ, cùm altitudinibus non differant. Igitur & priſmata inſcripta maiora ſunt dimidijs corporum quibus ſunt inſcripta. quare per primam decimi elementorum perpetuâ priſmatum ablatione tandem è cylindro reſidua fiet quantitas datâ L magnitudine minor. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.



SIt AB axis cylindri CDE, cuius baſis FCG, diuiſa ſit bifariam per FG diametrum, ſecundùm quam ſi fiat ſectio FGKL, abſcindetur vngula FCGL, baſi deinde FCG, inſcripto triangulo maximo inſcribantur & reſiduis ſegmentis maxima triangula; & ſecundùm has lineas conſtitutis planis quæ axi cylindri æquidiſtent, vngulæ priſmata inſcribantur plura ſemper ac plura in infinitum.

Dico ex continuata ſine termino priſmatum ablatione relinquendam tandem quantitatem dato ſolido M, minorem ab vngulari magnitudine.

Demonſtratio.

PEr præcedentem propoſitionem eouſque continuetur ablatio priſmatum à cylindro donec reſidua fiat quantitas ſolido M minor, hoc igitur reſiduum maius erit

reſiduo

reſiduo quod relinquetur ex vngulari quantitate, cùm ſit pars alterius reſidui quod à cylindro relictum eſt, multo igitur minus erit reſiduum vngulæ quantitate M. Quod oportuit demonſtrare.

Corollarium.

NE repetere cogamur demonſtrationes præcedentes, includere illis quoque intendo caſum qui ſpectat corpus quod reſultat ex ſemicylindro poſt vngulæ decuſſationem, hoc eſt ſi contingat fieri ſimiles ablationes priſmarum à corpore LDIEGKL remanebit quoque ſolidum quauis data quantitate minus, vt patet demonſtrationis iam poſitę vim conſideranti.

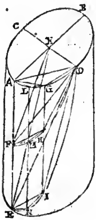
PROPOSITIO VII.

DIuidant AB, CD diametri baſim cylindricam normaliter ſibi inſiſtentes, & per AB planum ſecundùm cylindri axem conſtitutum ſignet in cylindri ſuperficie rectam AE, quę vtcunque diuiſa ſit in F. Deinde per rectam CD & puncta F & E, plana conſtituantur CDF, CDE vt reſultent vngulares quantitates CAFD, CAED.

Dico inter vngulam CAED & vngulam CAFD, eam rationem intercedere quæ eſt inter rectas AE & AF.

Demonſtratio.

DIuiſo arcu AGD biſariam in G, ponantur rectæ AG, DG. Idem fiat de arcubus reſiduis & ſectiones fiant ſecundùm has lineas quæ axi cylindri æquidiſtent exhibentes in cylindri ſuperficie rectas LN, GI, &c. erit itaque AEIGD corpus vngulę AED inſcriptum, ad corpus AFHGD, ſuæ vngulæ inſcriptum vt [a] linea AE ad AF. ſimiliter corpus AENIG inſcriptum ad corpus AFMHG inſcriptum habebit [b] rationem eandem quam AE ad AF. Corpora autem illa inſcripta, ablata ex quantitatibus quibus inſcribuntur; relinquunt [c] tandem dato ſolido minorem. Cùm igitur per tales inſcriptiones ſine fine continuatas ſemper reſultet ratio AE ad AF, per ea, quæ libro de progreſſionibus [d] præmiſimus; manifeſtum eſt etiam vngulas ipſas ADIE & ADHF, eam rationem continere quam AE linea ad lineam AF. Quod fuit demonſtrandum.



a 1. huius.
b 2. huius.
c 6. huius.
d 116. Progreſſ.

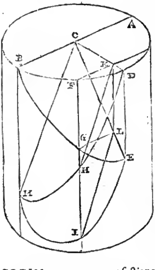
PROPOSITIO VIII.

SEcetur cylindrus ſectione per diametrum baſis AB decuſſante vngulam ADEB, erectâ deinde ex C centro normaliter CD ad diametrum AB, ducantur latera cylindri DE, BM, ad latus autem DE ductâ CE: fiant ſectiones, vna per lineam CD, & punctum M in latere BM, altera per rectam CE, & idem punctum M. Ponatur denique linea recta

 quæuis

quæuis FI in cylindri ſuperficie exhibens communes interſectiones cum planis poſitis puncta G, H, I.

Dico FG æqualem eſſe lineæ HI.



Demonſtratio.

PEr rectam IF age planum parallelum plano CBM, faciens cum plano CDB ſectionem FK, cum plano CDE ſectionem KL, cum plano CEGB ſectionem LG. Quoniam igitur planum CDB, ſecat duo plana parallela KFI, CBM, erunt [a] ſectiones KF, CB parallelæ. Rurſum quia planum CEGB ſecat duo plana parallela KFI, CBM, erunt ſectiones LG, CB etiam parallelæ. parallelæ igitur [b] ſunt KF, LG. Deiode quia plaoa parallela KFI, CBM ſecat planum EDC, erunt ſectiones communes, nimirum KL, & axis cylindri, æquidiſtantes. ſed etiam latus FG axi æquidiſtat. ergo KL, FG æquidiſtant. ergo GFKL parallelogrammum eſt. ergo FG æquatur KL. iungantur deinde CM, KH. Quoniam plana parallela LKHI, CBM ſecat planum CLEIM. erunr communes ſectiones LI, CM parallelæ. Rurſum quoniam plana parallela KFH, CBM ſecat planum CKDHM, erunt ſectiones KH, CM parallelę. ergo etiam LI, KH ſunt parallelæ: ſunt autem & HI, KL ſuprà oſtenſæ parallelæ. ergo KHIL parallelogrammum eſt. ergo HI æqualis eſt, KL. ſed etiam oſtendi ſuprà FG ęquari KL; ęquatur igitur FG, HI. Quod erat demonſtrandum.

a 16. vndecimi.

b 9. vndecimi.

Corollarium.

NOta hãc propoſitionem prorſus eſſe vniuerſalem; vera eſt enim, ſiue AB, diameter ſit circuli ADBC, ſiue quædam ei æquidiſtans, vt patet demonſtrationem conſideraoti.

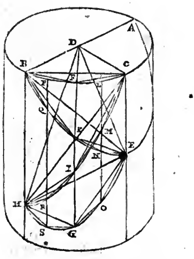
PROPOSITIO IX.

ESto cylindrus cuius baſim diuidat diameter AB: ex centro D erigatur normaliter CD ad diametrum AB: per C verò ponatur in ſuperficie cylindri CE recta linea: deinde agatur planum per AB, & punctum quoddam E, in recta CE, exhibens ſectionem ABKE. poſitâ denique in cylindri ſuperficie recta BH, ducatur planum per CD, & quodlibet punctum H in recta BH, tandem per DE rectam & idem punctum H ſectio fiat DEGH.

Dico vngulam cylindricam DBFCEKB æqualem eſſe ſolidæ magnitudini DHICEGH.

Demonſtratio.

IVnganturC B,E B, CH,E H, igitur pyramis DCEB pyramidi DCEH, æqualis eſt, cùm ſint ſuper eadem baſi & altitudine. diuidatur deinde arcus BC bifariam in F, & per punctum F axi cylindrico æquidiſtet FKIG; iungantur deinde CF, FB, EK, KB, CI, IH, EG, GH. quoniam ergo [a]FK ipſi IG æqualis eſt, ſitque FG rectæ CE parallela, perſpicuum eſt, trapezium CFKE trapezio CIGE æquale eſſe; proindeque cùm & altitudines ſint ęquales, quod BH ſit parallela ad CE, pyramidem CFKEB, pyramidi CIGEH parem eſſe. Rurſus ſubdiuidatur bifariam arcus CF in L, & per L ponatur axi æquidiſtans LMNO; iungantur quoque CL, LF, EN, NK, CM, MI, EO, OG. Quoniam igitur LM ipſi NO eſt æqualis, & LO parallela CE, erit trapezium CLME trapezio CNOE æquale. vnde, cùm ſit FG ipſis LO, CE æquidiſtans, manifeſtum eſt ſolidum CLNEKF ſolido CNOEIG æquale exiſtere. hac constructione ſemper continuatâ ex omni parte auferentur ſemper æqualia, atque adeò quantacunque pars tandem à corpore DBFCEKB per ſimiles inſcriptiones auferatur, poterit æquale quoque auferri à cylindrica quantitate DHICEGH. Per tales autem ablationes ſine fine continuatas relinquetur tandem ex vtraque quantitate ſolidum dato minus. Quare per ea quæ libro de progreſſionibus Geometricis præmiſimus, [b]neceſſe eſt totū DBFCEKB toti DHICEGH æquale exiſtere. Quod fuit demonſtrandum.



[a] 8. huius.

[b] Coroll 116. progreſſ.

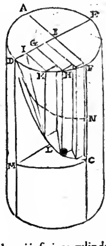
PROPOSITIO X.

Diuiſa ſit ABF diameter baſeos cylindri ADC in B bifariam, & ex B ad ipſam normaliter erigatur DB, diuiſa denique BD bifariam in puncto G, erigatur GH quæ æquidiſtet AF, perficiaturque rectangulum parallelogrammum BGH.

Dico parallelepipedum ſub baſi rectangula BGH & altitudine FC, maius eſſe dimidio quartæ partis cylindri FBDMC.

Demon-

Demonſtratio.



a Colligitur ex · · praec. b 3 huius.

TAlem enim habet rationem quadrans cylindri ad parallelepipedum ſub baſi B H & altitudine F C, qualis inter baſes, quadrantem ſcilicet B D F, & parallelogrammum B H [a] reperitur: ſed oſtenſum eſt [b] parallelogrammum B H maius eſſe dimidio quadrantis D B F, igitur etiam parallelepipedum ſub baſi B H, & altitudine F C maius eſt dimidio quadrantis cylindrici. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

QVod fuit aſſertum de parallelepipedo ſub B G H, & altitudine F C reſpectu quartæ partis cylindri D B F etiam intelligendum de parallelepipedo ſub baſi G K, & altitudine F C reſpectu ſolidi quod fit ſub ſegmento circulari D G H, & altitudine eâdem F C, atque ita de cęteris in infinitum.

PROPOSITIO XI.

EAdem manente figurâ:

Dico ſi parallelepipeda hoc modo quadranti inſcripta cylindrico, ab eodem quadrante ſemper demantur, reſiduam tandem fore quantitatem omni ſolidâ magnitudine datâ minorem.

Demonſtratio.

IN præcedenti, eiuſque Corollario demonſtratum eſt parallelepipeda illa maiora exiſtere dimidijs quantitatum cylindricarum, quibus inſcribuntur. Quare ſi ab his illæ tollantur, ſemper plus auferetur quàm dimidium. Ergo per 1. decimi relinquetur tandem ex quadrante cylindrico quantitas datâ minor. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

QVadrantis cylindrici baſis A D F diuiſa ſit vt priùs; ſectâ nimirum B D in partes æquales G, I, &c. perficiantur parallelogramma B H, G K, &c. cylindro deinde inſcripta ſint parallelepipeda vt priùs ſub iiſdem baſibus. Denique ſecundùm rectam D B, & quoduis punctum N in linea F C, quæ eſt in cylindri ſuperficie, planum agatur exhibens vngulam E N D.

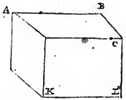
Dico etiam ex ipſa tandem vngula relinquendam quantitatem quauis datâ minorem ſi eadem operatio in baſi cylindri continuetur quæ ſuperiore propoſitione imperata fuit.

Demonſtratio.

OStenſum eſt ex ipſo cylindro reſiduam fore quantitatem quauis data minorem: ſed hęc pars reſidua maior eſt reſiduo quod remanet ex ipſa vngula. igitur cùm vngulæ reſiduum pars ſit eius reſidui quod remanet ex ipſo cylindro, patet veritas propoſitionis.

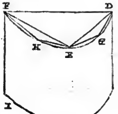
PRO-

PROPOSITIO XIII.



Solidæ magnitudines habẽtes vtramque baſim parallelam ſimilem ſimiliterq́; poſitam, eam inter ſe ſortiuntur rationem quæ ex baſibus & altitudinibus compoſita eſt.

Demonſtratio.

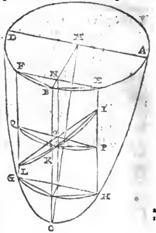


SI magnitudines parallelepipedales fuerint vel priſmata, iam per elementa cõſtat huius propoſitionis veritas. quod ſi altera ſit parallelepipedum vel priſma, vt A L: altera verò curuilinea D H I; vel ſi vtraque ſit curuilinea, per inſcriptiones priſmatum ſemper continuatas concludetur propoſitum eâ diſcurrendi formâ, qua Euclides vtitur in elemento duodecimo. Quem diſcurſum ego ad alia properans formandum relinquo Lectori.

PROPOSITIO XIV.

VNgulam A B, C D, cuius in baſi diameter eſt A D, ſecet aliquod planum axi æquidiſtans E F G H faciens in plano A B D, ſectionem E F parallelam A D; quod deinde ſecetur plano I K L recto ad planum E F G, diuiſâ denique bifariam rectâ E F in N, agatur planum per N & axem cylindri, ad quem vngula pertinet, occurrens plano I K L ſecundũ communem interſectionem O K, per quam fiat ſectio P K Q parallela plano A B D.

Dico fruſtum cylindricum E I K L F æquale eſſe fruſto E P K Q F.

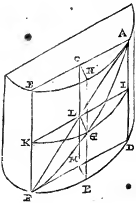


Demonſtratio.

DVcantur P K, K Q rectæ ſubtendentes arcus P K, K Q, qui quoniam ſunt æquales inter ſe, vtpote æquales arcubus E B, B F, erunt quoque lineæ P K, K Q æquales. ſunt quoque triangula æqualia & ſimilia I P O, Q O L, cùm lineæ E N, N F, hoc eſt P O, O Q, adeoq́ue & I O, O L, æquales ſint. Igitur pyramides I O K P, Q O K L æquales ſunt. Rurſus ſegmentis P K, K Q inſcribi poſſunt triangula maxima vt priùs: erunt hęc æqualia inter ſe, & per ea quę paulò ante præmiſimus, inſcripta vni priſmata, alteri inſcriptis erunt æqualia quod cùm ſemper fieri poſsit, conſtat ſegmentũ I P K O [a] ſegmento O K L Q eſſe æquale. adiecto igitur cõmuni ſolido E I K Q F, erit totum E P K Q F, toti E I K L F æquale. Quod fuit demonſtrandum.

[a] Ex Coroll. 116. progreſ.

PROPOSITIO XV.



SEcetur cylindrus ſectione A B F D, quæ æquidiſtet axi: diuisâ deinde bifariam rectâ A B in C, ducatur per C & axem cylindri planum E H C M, ductâ deinde A F quæ occurrat ipſi C M in L, per L agatur planum I G K faciens cum plano E H C M ſectionem communem L G, tum per rectas A L F, L G planum ducatur A G F L.

Dico ſegmentum cylindricum A D F B plano A L F G diuiſum eſſe bifariam.

Demonſtratio.

a 14. huius.

FRuſtum A L G I, a fruſto K L G F æquale eſt. Eodemque diſcurſu quo probata fuit horum fruſtorum æqualitas, concludetur etiam æqualitas fruſtorum G L C H A, E G L M F. Igitur fruſtum A L G I cum fruſto E G L M F, æquatur fruſto K L G F, vnà cum fruſto G L C H A. Quare ſi vtriſque addantur æquales cylindri portiones I G L M E D, B C H G L K, erunt tria fruſta A L G I, E G L M F, I G L M E D, tribus K L G F, G L C H A, B C H G L K æqualia. Atqui hæc tria vltima conſtituunt ſegmentum A G F B; tria verò priora conficiunt ſegmentum A D F G A. ergo illa quoque ſegmenta ſunt æqualia. ſegmentum igitur cylindricum A D F B, plano A G F L bifariam eſt diuiſum. Quod fuit demonſtrandum.

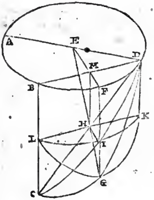
PROPOSITIO XVI.

VNgulam A D C diſpeſcat planum D B C axi æquidiſtans, exhibens fruſtum eius D G C B, acto deinde per axem cylindri plano E F G, quod arcum D F B biſecet in F, aſſignetur communis interſectio ſuperficiei cylindricæ cum E F G recta F G, & recta M H communis interſectio planorum D B C & E F G, poſitaque H I, quæ ſit parallela E F, ducatur planum per H I L, quod ſit æquidiſtans baſi A B D, quod communem interſectionem proferat K L cum plano D B C. tandem ſecundùm rectas E G & K L, planum ponatur terminatum in cylindro ſectione L G K.

Dico D G C B æquale eſſe ſolido D K G L B.

Demon-

Demonſtratio.



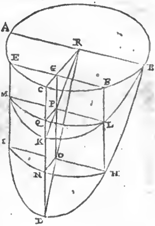
SI fruſtis DHIG & KHIG, inſcribantur pyramides ſuper eadem baſi HIG, erunt hæ pyramides inter ſe æquales, cùm altitudines ſint æquales; ſimiliter æquabantur & pyramides, quæ in fruſtis HIGC & HIGL, ſuper eadem baſi conſtituentur, cùm altitudines earum etiam ſint æquales, & quia omnes ſimiliter figuræ inſcribendæ fruſto HGID, æquales erunt figuris quę eadem conſtructione inſcribentur fruſto HIGK, erunt fruſta illa ęqualia. [a] pari modo quia omnes quoque figuræ fruſtis HIGC, HIGL inſcribendę futuræ ſint æquales perpetuo, etiam hæc fruſta æqualia erunt; ſunt igitur quatuor illæ partes ſolidę æquales inter ſe, ac proinde ſolidum KGL æquatur ſolido DGCIDHC: oſtenſum quoque eſt [b] IHLC æquari DHIK. Igitur communi addito DFBLID, erit DKILB æquale DICB: additis ergo KGL, DGCIDH, quæ ante oſtendi eſſe æqualia, totum DGCB æquale erit toti DKGLB. Quod fuit demonſtrandum.

a Cor. 11 A progreſſ.

b 14. huius.

PROPOSITIO XVII.

DAta ſit vngula BDAC, in cuius baſi ad baſeos diametrum AB, æquidiſtet EF, quâ biſectâ in G, per G & axem cylindri ducatur planum faciens in cylindri ſuperficie ſectionem CD. ſumpto deinde in CD puncto aliquo K, per illud ſecundum AB diametrum fiat vngularis ſectio BLKMA. Denique per rectam FE age planum axi æquidiſtans FLHIME,



Dico partem vngularem FLKME, ad vngularem partem FHDIE, eam habere rationem quam habet recta CK ad rectam CD.

Demonſtratio.

ESt enim oſtenſum [c] ſolidam magnitudinem vngularem BDAC ad vngulam BKAC, eam habere rationem quam habet CD ad CK: eodem autem diſcurſu oſtendi poteſt vngulæ BDA, partem BFHIEA, ad partem BFLMEA vngulæ BKA, eandem habere rationem quam FH ad FL: hoc eſt CD ad CK. igitur reſidua duo FHDIE, FLKME eandem habent rationem quam CD ad CK. Quod fuit demonſtrandum.

c 7. huius.

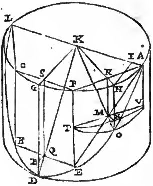
Corollarium.

CVm igitur per 7. huius etiam totæ vngulæ BKA, BDA ratiooem eandem habeant quam rectę CK, CD, ſeqoitur vngulas totas ſegmentis eſſe proportionales.

PROPOSITIO XVIII.

POnantur A B, B C æquales lineę obtendentes arcus A H B, B G C, & ſecetur vngula planis per A B, B C, quæ axi ſint parallela.

Dico ſegmentũ vngulæ A R B E O A ad ſegmentum vngulæ B S C D E, eam obtinere rationem quam habet linea H I ad lineam G K, quæ normaliter ducuntur ad diametrum A L diuidentes arcus A B, B C biſariam.



Demonſtratio.

SIt primò B C parallela diametro A L, & planum ponatur per K centrum baſeos quod biſecet arcum A B in H, & rectam H O producat in cylindri ſuperficie; in plano autem elliptico A D L, rectam K O, denique in plano A B E rectam R M: ex cuius termino M poſita M N, quæ æquidiſtet R H. ſectio fiat per lineam N M parallela A B, & planum tandem ducatur T O V per K O, & rectam V T parallelam ad A B, oſtenſum eſt [a] ſegmentum vngulæ A V O T B æquari ſegmento A O E B; oſtenſum quoque eſt A V N O T B, ſegmentum ad ſegmentum B G D C eam rationem habere quam habet H O linea ad lineam G D: eſt autem H I ad G K. vt H O ad G D, cùm I O, & K D ſint in eodem plano: ſintq; triangula I H O, K G D ſimilia. Igitur manifeſtum eſt ſegmentum A O E B vngulare ad vngulare ſegmentum B G D C eam habere rationem quam linea H I ad G K. Quod fuit demonſtrandum. Quod ſi B C non ſit parallela A L. fiat parallela quędam quæ ſit æqualis A B & continuata conſtructione præcedenti comparetur vtrumque ſegmẽtum A O E B, & B E D F C cum ſegmento illo quod habet rectam æqualem ipſi A B parallelæ diametro, atque ita vtriuſque rationem inueniet ad illud ſegmentum cognitam, ac proinde etiam inter ſe.

[a] 16. huius.

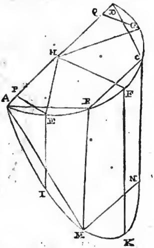
PROPOSITIO XIX.

SEmicirculo, qui baſis eſt vngulæ, inſcribatur dimidium hexagoni regularis per cuius latera A B, B C, C D plana ponantur, quæ æquidiſtent axi cylindri, formantia ſegmẽnta vngularia A I B M, B M K N C, C N G D.

Dico ſegmentũ vngulare abſciſſum plano C B M eſſe ad reliqua duo ſegmenta ſimul ſumpta, vt recta F H, quę ex medio arcus C B punctoG, ducitur A D diametro normalis, eſt ad duas ſimul lineas H I, G Q, quæ ex medijs arcuum B A, C D punctis ſunt normales eidem diametro A D.

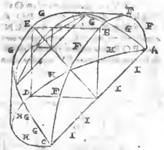
Demon-

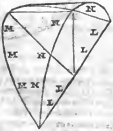
Demonſtratio.



PEr præcedentem ſegmentũ C B K M N eſt ad ſegmentum B A I M, vt F H ad E P. ſimiliter per præcedentem ſegmentum C B M K N eſt ad ſegmentum N C D L, vt F H ad G Q, hoc eſt, (quia G Q, E P æquantur) vt F H ad E P, hoc eſt vt idem ruſus ſegmentum C B M K N ad ſegmentum B A I M; ſegmenta igitur B A I M, N C D G L æqualia ſunt. Quoniam igitur ſegmentum C B M K N eſt ad ſingula ſegmenta æqualia B A I M, N C D L, vt recta F H eſt ad ſingulas æquales lineas E P, G Q, erit ſegmentum C B M K N ad duo æqualia ſegmenta B A I M, N C D G L ſimul ſumpta, vt recta F H, ad duas æquales rectas E P, G Q ſimul ſumptas. Quod oportuit demonſtrare.

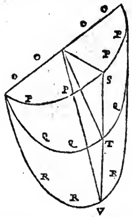
Scholion.



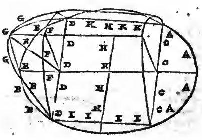


Oſtenſum eſt propoſitione 16. libri de ductu plani in planum, quid intelligamus per ſemicirculum in ſe ductum, & ſimul demonſtrauimus ſolidum inde productum eſſe veram cylindri partem. Verùm poſtulat huius loci ratio & ſequentium propoſitionum clarior explicatio, vt oſtendamus qualis ſit ea cylindri pars, quæ circulo in ſe ducto æqualis ſit, & qua eiuſdem partes quaue ratione ad partes cylindricas reducantur. Sit itaque ſemicirculus A B C *æqualis* A D C *ſemicirculo, qui ita conſtituantur inter ſe, vt ad rectos angulos eorum plana inſiſtant habentes communem diametrum* A C, *& ſecundùm modum in libro de ductibus explicatum in ſe inuicem ducantur, ita vt producant cylindricas ſuperficies, ſcilicet* F G, *&* G H, *ſitq.* I G *planum ellipticum, quod hoc corpus diuidit. quoniam omnes lineæ* I F *æquales ſunt rectis* I H: *producent lineæ,* I F, I G *ductæ in lineas* I H, *quadrata infinita* I F G H, *quorum diametri erunt in plano elliptico* I G, *itaque ſolidum* A B E D C *elliptico plano* I G, *in duas æquales partes erit diuiſum; quarum vna erit* F G, *ſiue* L M N, *in cylindro* O P *habente baſim* O P, *æqualem ſemicirculo* A B C,

 figura

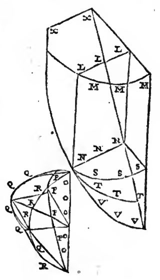


a Per 7. huius. *figura ſolida* OPQ; *& quia*[a] *demonſtratum eſt vnam vngulam ad vngulam alteram eam proportionem ſeruare quæ inter earum altitudines, nempe lineas* ST, SV *exiſtit; ſi lineæ* ST *æqualis ſit recta* TV, *& ſecundùm rectam* OO, *&* VK *punctum, ſectionem contingat fieri, tunc vngula* PR, *dupla erit vngulæ* PQ *ſiue* LNM, *ſiue* IFG, *ſed etiam* FI *ductum in* HI, *duplum eſt ſolidi* IFG, *hoc eſt* LNM, *hoc eſt* OPQ: *igitur* FI *ductum in* IH, *æquale eſt vngulæ* PR, *quoties igitur mentio fiet ſemicirculi in ſe ducti, ſubeat in mentem vngula* POR, *quæ eſt pars cylindri abſciſſa plano quod fit per aliquam diametrum* OO, *habentem altitudinem* SV *æqualem diametro baſeos* OO.



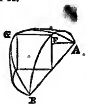
Atque hæc de vngula ſufficere exiſtimo. reliquum eſt, vt eius quoque partes nonnihil explanemus. Sit itaque denuo circulus AB, *cuius diametro* HH, *æquidiſtent duæ lineæ æquales* CC, DD, *&* AC *ſegmentum erectum ſit normaliter ad planum circuli* AB, *& intelligatur duci in reliquam partem circuli* CB *interceptam parallelis* II, KK: *orietur hinc ſolidum quod ſuo loco oſtendimus eſſe cylindricum; habens duas partes, quarum vna eſt cylindrica prorſus, ſcilicet baſim habens ſegmentum* CE, *quæ eſt æqualis* AC, *& altitudinem* CD, *hoc eſt* LN *in cylindro* XMV *habente* MM *circulum æqualem circulo* AB: *altera verò eſt* DFGB, *hoc eſt* OPQR *quæ pars in ſua geneſi exſurgit ex ductu* AC, *ſuperficie in ſe ducta: eſt enim* AC *ſegmentum æquale* DB, *ſiue* DF. *quare* DFGB *quadrata ſunt, quorum diametri* DG, *ſiue* OQ, *in eodem plano exiſtunt. quare ſi planum agatur per rectam* DD *&* GG, *diuidet hoc planum ſolidam hanc figuram* DFG, *vel* OPQ *in duas partes*

tes æquales, quemadmodum de toto ſemicirculo in ſe ducto explicatum eſt. Ponantur iam in cylindro ſegmenta circularia parallela LM, NS *æqualia ſingula ſegmento* AC *ſiue* DF, *ſiue* OP, *quæ intercipiunt rectas* MS *æquales ipſis* EF. *fiantq́ tam* ST, *quàm* TV *æquales ipſis* SN, *hoc eſt* AC, *ſiue* DB; *eruntq́ tota* MV *æquales totis* AB. *agantur deinde plana per* NT *&* NV: *erit* NST *quantitas par quantitati* DFG, *& quantitas* NTV *par quantitati* BGD, *ac proinde totum ſolidum* NSV *æquale ſolido* DFGB, *hoc eſt* OPQR, *& conſequenter erit totum* LMVN *corpus, æquale corpori* CEGB, *quod natum eſt ex ducto* AC *in* CB: *quod autem corpus hoc* LMVN *pertineat ad vngulam* XMV, *patet, quoniam* XM *dimidia ſunt* MV, *&* NS *dimidia ſunt* SV. *igitur anguli* SNV *æquales ſunt angulis* MXV. *quare* XNV *ſunt in eodem plano. Ex his ergo hunc in modum expoſitis habemus ſegmenta circuli inæqualia* AC *&* CB, *in ſe mutuo ducta producere ſegmentum vngulare* LMVN *abſciſſum plano* LN, *à tota vngula* XMV, *cuius baſis eſt par circulo* AB, *& altitudo æqualis diametro* AB. *hoc reuocet in memoriam Lector, vbi de ſegmentis circuli in ſe ductis mentio inciderit.*



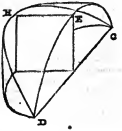
PROPOSITIO XX.

Solidum productum ex ſemicirculo in ſe ducto ad aliud ſimiliter ortum ex alio ſemicirculo in ſe ducto triplicatam rationem habet laterum homologorum.



Demonſtratio.

Sint itaque AB, CD diametri ſemicirculorum AFB, CED qui in ſe ducti producant corpora AFGB, CEHD. Dico illa triplicatam inter ſe rationem continere diametri AB ad diametrum CD. Sunt enim ſimilia corpora, quoniam baſes ſimiles ſunt, & modus quo formantur communis. Vnde neceſſarium eſt ſortiantur proportionem communem ſimilibuſque corporibus debitam quam ex elementis conſtat eſſe triplicatam laterum homologorum.



Quod ſi quis huic demonſtrationi non acquieſcat, vti poterit inſcriptionibus corporum ſimilium, ſicut propoſitione duodecima huius factum eſt, & per progreſſionum regulas illis inter ſe collatis eruere rationem quam ſine dubio reperiet eſſe triplicatam lineæ AB ad CD, cum ſingula corpora inſcripta ſimilia eandem rationem obtineant vel legat propoſitionē huius libri trigeſimam quintam.

Corol-

Corollarium.

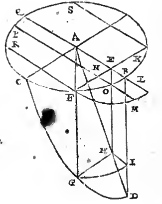
EXtendi poſtulo hanc propoſitionem ad ſolidas quantitates quę gignuntur ex ſegmentis partium circuli ſimilibus in ſe ductis, cùm illæ proportionales imprimis ſint totis vngulis quarum partes exiſtunt; & eædem omnino formari de illis poſſint demonſtrationes quæ vngulis integris aut circulis in ſe ductis inſeruiunt.

PROPOSITIO. XXI.

VNgula ABDC ſecetur plano EFG, parallelo illi quod per AC & axem cylindri ponitur, ſitque BD vngulæ altitudo æqualis BQ diametro circuli.

Dico vngulam totam ABCD ad partem decuſſatam BEFGD triplicatam habere rationem eius quam habet AC recta ad lineam EF.

Demonſtratio.



SVper KF diametro circulus deſcribatur KLF, & ponantur lineæ LBEQ, MONP quotcunque, ſed rectæ ad diametrum KF. erit igitur BEQ rectangulum æquale KEF rectangulo, hoc eſt quadrato EL. ſimiliter erit ONP rectangulum æquale KNF rectangulo, hoc eſt quadrato NM. Vnde quia ſingula rectangula ONP æqualia ſunt quadratis MN, hinc KBF, ductum in reſiduum KSRF æquale a eſt ſolido quod fit ex ſemicirculo KLF in ſe ducto: ſed ſemicirculus KLF in ſe ductus ad ſemicirculum ABC, in ſe ductum eſt b in triplicata ratione diametri KF ad diametrum totam CA ſiue ad BQ. igitur etiam corpus ex ductu plani KBF in planum KSQRF ad ſemicirculum ex ABC, totum in ſe ductum habet triplicatam rationē lineæ KF ad diametrum BQ. atqui ſegmenta KBF, KSQRF producunt ſegmentum vngulare KDGF, & ſemicirculus ACB in ſe ductus producit totam vngulam, vti in Scholio præcedenti demonſtrauimus. ergo ſegmentum vngulare eſt ad vngulam in triplicata ratione EF ad AC. Quod erat demonſtrandum.

a 45. De duct.

b 10. huius.

Corollarium.

EX hac & ex Corollario 17. ſequitur quamlibet vngulā ad ſegmentum plano iuxta determinationem propoſitionis abſciſſum triplicatam habere proportionem eius quam habet AC recta ad EF.

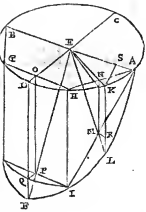
PRO-

PROPOSITIO XXII.

Baſi vngulari dimidium hexagoni inſcriptum ſit per cuius latera plana ponantur axi æquidiſtantia A H I, I H G.

Dico ſegmentum vngulæ plano G H I decuſſatum duplum eſſe ſegmenti quod ablatum eſt plano A H I.

Demonſtratio.



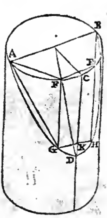
Dvcantur ex centro E rectæ E D, E K quæ bifariam ſecent latera hexagonalia G H, H A in O & N, ponaturque K S parallela ad E D. Quoniam B A, G H æquales arcus intercipiunt, erunt parallelæ. Quare cùm angulus E O H rectus ſit, etiam A E O rectus erit. Atqui K S parallela eſt ex conſtr. ad E D. ergo etiam E S K angulus eſt rectus. Eſt verò & E N A rectus; anguli igitur E S K, E N A æquales ſunt. Eſt autem angulus ad E, vtrique triangulo S E K, N E A communis, & vnum latus E A, vni lateri E K æquale. Igitur S K æquatur A N. ſed H A latus hexagoni, hoc eſt ſemidiameter D E, duplum eſt ipſius A N. Ergo D E dupla quoque eſt ipſius K S. Atqui vt D E ad K S, ita [a] ſegmentum vngulare G O H I F ad ſegmentum vngulare H A L I, ergo ſegmentum G O H I F duplum eſt ſegmenti H A L I. Quod erat demonſtrandum.

[a] 18. huius.

PROPOSITIO XXIII.

Ponatur iterum baſi vngulari ſemihexagonum inſcriptum vt priùs, & plana poſita ſecundùm latera hexagoni parallela axi decuſſantia tria ſegmenta vngulæ.

Dico totam vngulam ad reſiduum quod remanſit ablatis ſegmentis habere rationem octo ad ſex.



Demonſtratio.

Sit A B C D vngula & latera ſemihexagoni A F, F E, E B, per quæ plana A F G, F E H, B E H axi æquidiſtantia auferant ſegmenta A F G, F G D H E, & E H B. Dico igitur proportionem totius vngulæ A C D B ad ſolidum clauſum planis A B H G, A F E B, F E H G, A F G, B E H eſſe vt octo ad ſex. Oſtenſum eſt enim rationem totius vngulæ A C D B ad partẽ F G D H E [b] triplicatam eſſe rationis, quam habet A B ad E F, eſt autem A B diameter dupla rectæ E F, quæ latus eſt hexagoni. Igitur tota vngula A C D B, octupla

[b] 11. & Coroll.

H H eſt

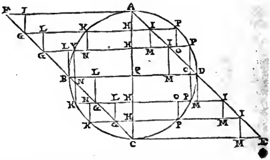
eſt ſegmenti F G D H E. Atqui demonſtratum prætereà eſt ſegmentum F G D H E duplum eſſe tam ſegmenti A F G quàm ſegmenti B E H, hoc eſt, vtrique ſimul ſumpto eſſe æquale. Tota igitur vngula ſegmentorum A F G, B E H eſt etiam octupla. Igitur ſegmentum F G D H E, & duo ſimul ſegmenta A F G, B E H æqualia ſunt duabus octauis totiûs vngulæ. His ergo ablatis erit vngula ad reſiduum ſolidum rectilineum vt 8 ad 6. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV.

DAta ſit vngula B F A (inſpice figuram propoſitionis ſequentis) cuius altitudo E F ſit æqualis A B diametro ſemicirculi B E A qui baſis eſt vngulæ.

Dico eam æqualem eſſe pyramidi, cuius altitudo eſt ſemidiameter H B, baſis verò quadratum diametri B A.

Demonſtratio.



SEmicirculo B E A æqualis fiat ſemicirculus A K C, quo perfecto ad extremitates diametri A C ducantur tangentes F A, E C, diametro æquales, iunganturque F C, E A rectangulum triangulum F A C ductum in ſeipſum producit[a] pyramidem cuius baſis eſt quadratum A F, altitudo autem recta A F, hoc eſt cuius baſis eſt quadratum A C, altitudo diameter A C. ergo triangulum rectangulum F A C ductum in ſe ſubalternè poſitum, hoc eſt in triangulum A C E, ſibi æquale, producit pyramidem, quæ alterius dimidia[b] eſt. Atqui pyramis cuius baſis eſt quadratum A C, altitudo verò ſemidiameter A Q, dimidia eſt pyramidis cuius baſis eſt quadratum idem A C, altitudo verò tota diameter: ergo triangulum F A C ductû in triangulum A C E generat pyramidem, cuius baſis eſt quadratum A C, altitudo verò ſemidiameter A Q. Atqui in libro de ductibus oſtenſum eſt[c] corpus quod fit ex ductu triangulorum F A C, A C E æquari ſolido, quod fit ex ductu ſemicirculi A K C in ſeipſum. Ergo pyramis baſim habens quadratum A C, altitudinem verò A Q, æquatur ſemicirculo A K C ducto in ſeipſum. Atqui ſemicirculus A K C, hoc eſt ex construct. ſemicirculus B E A, ductus in ſeipſum gignit ſolidum æquale vngulæ B F A, cuius altitudo eſt par diametro B A. ergo pyramis cuius baſis eſt quadratum A C, hoc eſt ex conſtr. quadratum diametri B A, altitudo verò ſemidiameter A Q, hoc eſt ſemidiameter H B, æquatur vngulę B F A. Quod erat demonſtrandum.

a 4. Duct.

b 5. Duct.

c Prop. 47.

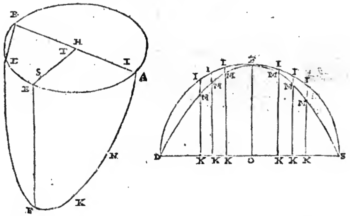
PROPOSITIO XXV.

DAta rurſum ſit vngula B F A altitudinem habens parem diametro B A. Fiat autem ſemicirculus D I E I F æqualis ſemicirculo B E A, erecto-

erectoq; radio O E normaliter ad diametrum D F, deſcribatur parabola D M E M F, cuius axis ſit E O.

Dico vngulam B F A æqualem eſſe cylindro parabolico, cuius baſis eſt parabola B M E M F, altitudo ſemidiameter E O, ſiue B A.

Demonſtratio.



OStenſum enim eſt in libro de ductibus planorum, a ſemicirculum D E F, hoc a 115. De
eſt ſemicirculum B E A, ductum in ſeipſum æquati parabolæ D M E N duct.
ductæ in altitudinem E O. Atqui ſemicirculus B E A ductus in ſeipſum generat ſolidum æquale vngulæ B F A, vt demonſtrauimus in ſcholio propoſitionis 19. vngula igitur B F A æqualis eſt cylindro parabolico, cuius baſis eſt parabola D M E M F, altitudo æqualis ſemidiametro E O ſiue B A. Quod erat demonſtrandum.

Cylindrus autem parabolicus facilè ad ſolidum rectilineum reducitur, cùm eius baſis notam habeat ad figuras planas rectilineas proportionem.

Scholion.

Vides, ni fallor, benigne Lector, quo collimarit prima pars huius libri, nimirum ad cubaturam vngulæ ſiue ad inuentionem corporis quod æquale eſſet vngulæ, & nullo molimine ad parallelepipedum reduci poſſet.

Totâ autem vngula ad parallelepipedum reductâ habetur quoque reductio partium vngulariũ, quæ planis ad cylindri axem parallelis decuſſantur, cùm harum proportio ad totam vngulam, ex hactenus demonſtratis nota ſit. Reſtat igitur vt hoc ipſum præſtemus de vngula inuolucro.

PARS SECVNDA

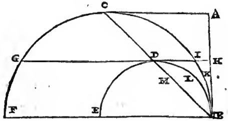
De Inuolucro vngulari eiusq; ad cubum vel parallelepipedum reductione & cuiuſuis eius partis quæ plano ad axem cylindri æquidiſtante decuſſata fuerit, & nonnullis inuolucri proprietatibus.

PROPOSITIO XXVI.

SEmicirculum contingant rectæ AB, AC rectum angulum continentes, & iunctâ B C ad contactus, ponatur alter circulus B D E, quem H D G contingat parallela ad A C.

Dico planum miſtilineum I K B H ductum in H D G F B, ſolidum producere, quod ſit æquale magnitudini quæ oritur ex ductu miſtilinei D L B H in figuram E D B H.

Demonſtratio.



[a] 48. *Duo.* OStenſum eſt [a] pyramidi quæ oritur ex ductu trianguli D H B in ſe, æquari corpus quod fit vel ex I H B, in H D G F B, vel ex D L B H in E D H B. Igitur æqualia ſunt corpora inter ſe quæ tertium habēt cui æquantur. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVII.

IIſdem poſitis:

Dico ſolidam magnitudinem quæ fit ex ductu mixtilinei A C I B in mixtilineum A C F B ad ſolidum quod reſultat ex ductu mixtilinei I H B in H G F B mixtilineum triplicatam habere rationem lineę AB ad HB.

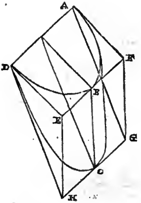
Demonſtratio.

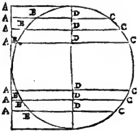
[b] *Ibid.* ÆQuatur [b] enim magnitudo ex plano A C I B in ſuperficiem A C F B ducta corpori pyramidali, quod emergit ex ductu trianguli A B C in ſeipſum; pari ratione etiam ſolidum quod fit ex plano D L B H in planum H D E B, æquatur pyramidi quæ fit ex ductu trianguli D H B in ſe: ſed pyramis nata ex A C B triangulo in ſeipſum ducto ad pyramidem factam ex triangulo H D B in ſeipſum ducto triplicatam rationem habet eius [c] quam habet linea AB ad HB. Igitur etiam

[c] 8. *Duodecimi.*

etiam corpus ex ductu plani ACIB in planũ ACFB, ad corpus ex plano HDLB, in ſuperficiem HDEB triplicatam habet rationem eius quam habet linea AB ad HB. Atqui per præcedentem corpus factum ex plano IKBH in planum HIGFB, æquatur corpori producto ex plano HDLB in planum HDEB: ergo corpus ex plano ACIB ducto in planum ACFB ad corpus ex plano IKBH ducto in planum HIGFB triplicatam habet rationem eius quam habet AB ad HB.

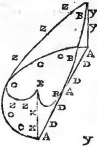
Scholion.

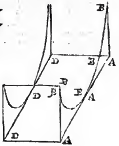




Monet me præſens occaſio vt accuratiùs nonnihil explanem qualia ſint corpora quæ his proximis propoſitionibus expoſita ſunt, & cui vſui eſſe poſſint. Vt autem idipſum commodiùs explicem, recurrendum eſt ad vngulam de qua paulò antè mentio fuit. Sit igitur vngula ABCD*, cuius baſeos diameter* AD *& contingentes erectæ ſint* DE, AF, *& tertia* FBE *parallela* AD, *ex* C *termino vngulæ poſita ſit* GH *quæ æquidiſtet* FE, *& perficiatur parallelogrammum* FGHE; *iunganturq;* AG, DH, *apparebit tunc corpus ex hædris planis conſtitutum, vngulam continens. Corpus igitur hoc duabus conſtat partibus, quarum vna ipſa eſt vngula ; altera verò inuolucrum vngulæ. Atque hæc eſt illa quantitas, de qua egimus duabus proximè propoſitionibus; quia verò difficile eſt imaginationi perſuadere figuram ex ductu* AB *in* AC *genitam, inuolucro vngulari non ſolùm æqualem exiſtere, ſed eandem illam eſſe, quæ inuolucri munere fungitur; ipſumq; inuolucrum gigni ex ductu* AB *plani in planum* AC: *paucis adiungere ſtatui huius rei explanationem. Ponatur itaque* AB *duci in* AD, *emerget ſolidum baſim habens* AB *ſuperficiem & altitudinem* AD. *Deinde ducatur* AB *in* DC, *exſurget figura valde miſta, qualis exhibetur in quarto ſcemate, habens vnam planarum hædrarum* ABDB *ſuperficiei æqualem; alteram verò æqualem ſemicirculo* DC, *tertiam denique concauam cylindricam, quartam tandem cylindricam conuexam: hæc autem videntur longè diuerſa à figurâ inuolucri quæ ex vna parte terminatur rectangula ſuperficie, ex alia verò planâ quæ ſit æqualis* AB, *tertiâ ſuperficie concaua quæ congruit conuexæ vngulari, quartâ, quam terminat ellipſis conuexa, reſiduæ hædræ triangulares ſunt, ſed facilè intelligētur hæc omnia coincidere, ſi rectè ſingula ſuis locis aptentur. Ad huius rei explicationē ponendæ ſunt hæ quinque quantitates (inſpice figurā ſecundā & tertiam) quarum prima ſit ex ductu* AB *in* AD: *ſecunda (inſpice figuram ſecundam & quartam) ex* AB *in* DC, *vnde prima cum ſecunda æquales ſunt vni figuræ quæ fieret ex* AB *in* AC: *tertia & quarta harum figu-*

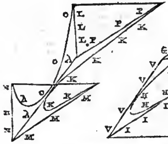
4

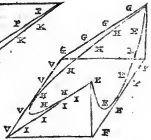




3

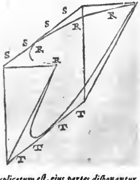
6





5

7



rarum naſcuntur ex prima diuiſione;diuiſo enim ſolido prima quantitatis ſecundũ lineas paralleas emergent duo corpora, quorum vnũ quinto ſcemate exprimitur, alterum corpus exſurget prout figurâ ſextâ exhibetur habens lineas PO *æquales rectis* ZC,*& quia circulus* OO *æqualis eſt circulo* CC *, ſi coniungantur hæc duo corpora ita vt pars caua* PO *congruat conuexæ* ZC,*reſultabit ſolidum ſimile, imò æquale quarto ſcemati. quare tertia figura ſimul cum quarta æqualis erit figuræ quintæ vel ſeptimæ bis ſumptæ, quæ congruit ipſi vngulæ, ac proinde inuolucro æquale erit ſcema primum cum ſecundo coniunctum: eſt autem ſcema primum cum ſecundo id quod naſcitur ex ductu* AB *in* AC: *igitur id, quod prouenit ex ductu* AB *in* AC *inuolucro ipſi non ſolùm eſt æquale, ſed ipſiſſimum inuolucrum eſt, quod vngulæ congruit, ſi ea ratione qua explicatum eſt, eius partes diſponantur.*

PROPOSITIO XXVIII.

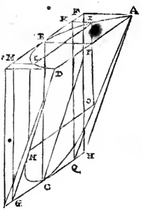
Datum ſit inuolucrum totam vngulam, cuius altitudo eſt diameter AD, includens, nimirum AEBFDGCH: datum item ſit aliud includens partem vngulę abſciſſam plano ad axem cylindri parallelo ſecundùm rectam IL parallelam diametro AD.

Dico inuolucrum totius vngulæ eſſe ad totam vngulam, vt inuolucrum partis vngularis eſt ad ipſam partem vngularem.

Demon-

Demonſtratio.

EX ſcholio 27. patet inuolucrum totius vngulę cuius altitudo eſt diameter A D produci ex ductu plani A E B F D B A in planum quod compoſitum eſt ex plano A E B F D B A, & toto circulo cuius diameter A D: inuolucrum verò partis vngularis naſci ex ductu plani I K B M L B I, in planum quod conſtat plano I K B M L B I, & toto circulo, cuius diameter A D. Ergo [a] inuolucrum totius vngulæ eſt ad inuolucrum partis in triplicata ratione eius, quam habet E B ad K B, hoc eſt eius quam habet E F ad K M, hoc eſt eius quam habet A D ad I L. Atqui etiam vngula tota A B D C eſt ad partem vngularē I O N L B I in triplicata [b] ratione eius, quam habet A D ad I L: ergo inuolucrum totius vngulæ eſt ad inuolucrum partis, vt vngula tota eſt ad partem; permutando igitur, inuolucrum totius vngulæ eſt ad totam vngulam, vt inuolucrum partis vngularis ad ipſam partem vngularem. Quod erat demonſtrandum.



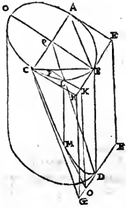
a 27. huius.

b 21. huius.

PROPOSITIO XXIX.

DAtum ſit A E B H C G D F inuolucrum vngulæ A D C, cuius altitudo par ſit diametro A C: ducanturq́; B A, B C.

Dico inuolucrum datum vngulare æquari duabus pyramidibus quæ producantur ex triangulis A E B, C B H, ſingulis in ſe ipſa ductis.



Demonſtratio.

PLanum C L B H ductū in planum B H C O æquatur [c] triangulo B C H ducto in ſeipſum. ſimiliter planum mixtilineum A B E ductum in planum B E A O æquatur B A E, triangulo in ſe ducto. Ergo totum planum mixtilineum C L B A E B H C ductum in totum planum E A O C H, hoc eſt per ea quæ in Scholio 27. huius demonſtrauimus, inuolucrum datum vngulare A E B H C G D F, æquatur duobus triangulis B C H, B A E ductis in ſeipſa, duabus nimirum pyramidibus quæ ex illis ductibus oriuntur. Quod erat demonſtrandum.

c 48. Def.

Corollarium.

HInc alia curſum habetur vngulæ cubatura: cùm enim compoſitum ex inuolucro & vngula, vtpote verum priſma notum ſit, cumque huius compoſiti vna pars, nempe inuolucrum, nota ſit, nota erit & altera quæ eſt ipſa vngula.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Retentâ figurâ propoſitionis 28. ſit inuolucrum ILKMRNOQ ſegmenti vngularis IBLNO, ducanturque rectæ BL, BI.

Dico datum ſegmenti vngularis inuolucrum æquari duabus pyramidibus, quæ generantur ex ductibus triangulorum BIK, & BLM in ſeipſa.

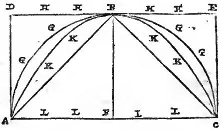
Demonſtrabitur eodem diſcurſu quo præcedens, ex 48. libri de ductu plani in planum & Scholio 25. huius.

PROPOSITIO XXXI.

Sit ſemicirculus ABC parallelogrammo rectangulo ADEC inſcriptus, & BF normalis ad AC diametrum, diuidat eam bifariam in F. Denique huic ſemicirculo inſcribatur parabola AKBC, cuius axis BF.

Dico vngulam cylindricam cuius altitudo eſt diameter CA, baſis verò ſemicirculus ABC, ad ſuum inuolucrum eam habere rationem quam parabola AKBC ad planum mixtilineum HK, HK.

Demonſtratio.



a 128. duct. b Schol. 19. huius. c Schol. 27. huius. d 136. duct.

Demonſtratum eſt in libro de ductu plani in planum [a] ſemicirculum ABC ductum in ſeipſum, hoc eſt [b] vngulam cuius baſis eſt ſemicirculus ABC, altitudo AC, æquari cylindro parabolico, cuius baſis parabola AGBKC, altitudo BF. Demonſtratum quoque eſt in eodem libro planum HG, HG, ductum in planum compoſitum ex HG HG, & toto circulo cuius diameter AC, hoc eſt [c] inuolucrum vngulę, æquari ſolido [d] quod habet baſim HK, HK, altitudinem verò BF. Atqui cylindrus parabolicus cuius baſis eſt parabola AKBKC altitudo BF, eſt ad ſolidum cuius baſis eſt planum HK altitudo eadem BF, vt baſis ad baſim, hoc eſt vt parabola AKBKC ad planum HK. ergo vngula cuius baſis eſt ſemicirculus ABC, altitudo AC, eſt ad ſuum inuolucrum vt parabola AKBKC ad planum mixtilineum HK. Quod erat demonſtrandum.

Corol-

Corollarium.

EOdem ferè diſcurſu exhibebimus rationem quam habent vngulares partes ad ſua inuolucra.

PROPOSITIO XXXII.

CVbo QFG inſcriptus eſto cylindrus, cuius vngula A B C D, altitudinem habens B C æqualem diametro baſeos, ſit terminata in plano A D G per ellipſim D I C: factis deinde proportionalibus Q E, A E, R E, deſcribatur parabola R O B O S, cuius axis B P.

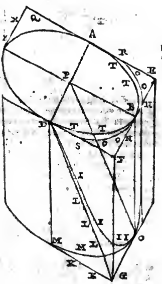
Dico corpus I L, K M æquari magnitudini quæ conſtat baſi O T, & altitudine A D.

Demonſtratio.

a 159. Dest.

b Schol. 27. huius.

DEmonſtratum eſt [a] ſolidum ex ductu N T plani in T X, productum æquale eſſe corpori, quod reſultat ex plano N O ducto in altitudinem N X, hoc eſt A D: eſt verò inuolucrum vngulæ A E B C G F D, æquale [b] N T ducto in T X. Igitur inuolucrum vngulæ æquale eſt ſolido ſuper baſi. N O exſtructo, & altitudine A D. Corpus autem ex N T in N X, eſt æquale N O ducto in N X, ſimul cum T O ducto in N X. Igitur etiam N T docto in N X, æquatur inuolucrum vngulare vnà cum O T in N X: ablatis itaque æqualibus, ſcilicet quantitate N O in N X, à ſolido quod fit ex N T in N X, & quantitate vngulari dempta à corpore habente baſim N T, altitudinem verò B C, remanebit corpus ex O T in N X, hoc eſt A D æqoale ſolidæ quantitati I L K M. Quod demonſtrandum fuit.

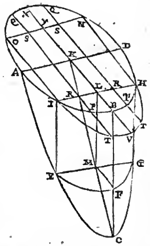


PROPOSITIO XXXIII.

VNgulæ cylindricæ A B C D, cuius altitudo par ſit diametro A D, baſis A B D, ſecetur plano E F G, quod æquidiſtet plano baſeos A B D.

Oporteat autem ſolido E C G M E, corpus exhibere æquale, altitudinem habens B F.

Conſtructio & demonſtratio.



QVoniam E F G ſectio baſi A B D, æquidiſtat; igitur erectis è terminis lineæ E G, quę eſt communis interſectio planorum E F G, & A C D, lineis G H, E I in ſuperficie cylindrica, iunctiſque punctis I, H, erit arcus I B H æqualis arcui E F G: ducto igitur plano I H G, agatur K B linea diuidens bifariam arcum I B H, ſecundùm quam fiat ſectio per axem cylindri producens L M, K C, M F communes interſectiones. poſitis denique H N, I O, parallelis rectæ B K, iunctâque O N, fiat vt L γ ad L X, ita L B ad L V, ſiue rectangulo B L X fac æquale V L γ, & per I V H deſcribatur parabola I T V H habens axem L V. Dico ſolidū habens pro baſi ſuperficiem interceptam peripheria circulari I B H, & parabolica I V H altitudinem verò B F, æquari fruſto vngulari E C G M E. Quoniam parabola eſt I T V H, igitur vt rectangulum I L H ad rectangulum I R H, ita eſt L V linea ad lineam [a] R T. ſed vt eſt rectangulum I L H ad I R H rectangulum, ita quoque eſt rectangulum B L X ad P R Q, hoc eſt rectangulum V L γ ad [b] rectangulum T R S. Igitur vt linea L V ad R T, ita quoque rectangulū V L γ ad T R S, igitur cùm ex conſtructione rectangulū V L γ æquale ſit rectangulo B L X, etiam rectangulū T R S, æquale erit rectangulo P R Q. omnia igitur rectangula T R S, æquantur omnibus rectangulis P R Q. ergo per 46. libri de ductibus, planum parabolicum I V H L I ductum in planum R S, hoc eſt in altitudinem R S, hoc eſt in altitudinem L M ſiue B F (eſt enim L M ad L K, vt B C æqualis diametro ad ſemidiametrum B K) æquatur ſolido quod fit ex ductu plani circularis I B H in planum circulare I O N H: ſed ex ductu planorum circularium I B H & I O N H fit ſegmentum [c] vngulare I E B C H. Igitur ſolidum habens baſim I V H L I parabolam & altitudinem B F, æquale eſt parti vngulari I E B C H. ablato igitur communi cylindrico ſegmento I B F H remanebit fruſtum cylindricum E C G M E, æquale corpori quod baſim habet clauſam perimetris I B H, & I T V H. quod etiam aliud genus inuolucri cenſeri poteſt partis cylindricæ cui congruit. exhibuimus igitur quod fuerat requiſitum.

[a] 47. parab.

[b] 310 parab.

[c] Schol. 19. huius.

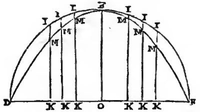
PROPOSITIO XXXIV.

VNgulæ, quarum altitudines ſunt ęquales diametris baſium cylindrorum à quibus decuſſantur, triplicatam habent rationem earundem diametrorum.

Demon-

Demonſtratio.





PRopoſitionem paulò antè demonſtrauimus quidem: verùm præſens demonſtratio commodior mihi futura eſt ad vlteriores proportiones indagandas. Ponantur itaque duo circuli A B C, D E F, quorum ſinguli in ſeipſos ducti producant ſingulas vngulas, inſcribantur circulis parabolæ L L, M M. Demonſtratum fuit [a] vngulam productam ex ductu plani circularis G H in ſeipſum, æqualem eſſe ſolido quod baſim habet L H, altitudinem ſemidiametro æqualem. eodem modo oſtenſum eſt ſemicirculum I K in ſe ductum exhibere corpus ſub baſi M K, & altitudine quæ æqualis eſt ſemidiametro. Igitur eandem habebunt rationem inter ſe illæ duæ vngulæ, quam continent corpora ex baſibus parabolicis conſtantia. Atqui horum proportio compoſita eſt ex [b] proportione altitudinis B M ad E O, hoc eſt A C ad D F, & ex ratione baſeos parabolicæ L H ad baſim parabolicam M K, quæ eadem eſt cum ratione circuli A B C ad D E F, (ſimiles enim ſunt illæ parabolæ, vt patet ex figuris inſcriptis euidenter,) ac proinde duplicata rationis A C ad D F. ergo ratio corporis ſub L H baſi, & B M altitudine ad corpus ſub baſi M K, & altitudine E O, eſt triplicata rationis A C ad D F; ergo vngulæ illis corporibus parabolicis æquales in triplicata ſunt ratione earundem linearum, ſcilicet diametri A C ad diametrum D F. Quod fuit demonſtrandum.

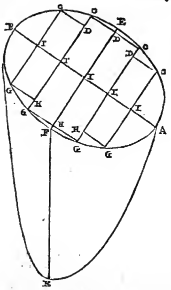
a 11.8. Duct.

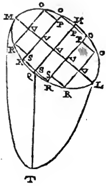
b 13. huius.

PROPOSITIO XXXV.

QVod ſi placuerit eam diſcurrendi formam adhibere, quâ vſi ſumus in propoſitionibus 45. & 47. libri de ductu plani in planum, licebit etiam veritatem præcedentis theorematis hunc in modum demonſtrare.

Demonſtratio.





DAtæ ſint vngulæ A KB, L TM, quarum altitudines FK, Q T, æquales ſint A B, LM diametris ſemicirculorum A G B, L R M, qui in ſeipſos ducti ipſas, vt in ſcholio 19. oſtenſum eſt, vngulas producunt.

Diametris A B, LM in æquè multas, ſed plures ac ſemper plures, æquales partes A I, I I, L V, V V, diuiſis per diuiſionum puncta I, I, V, V ducantur normales ad diametros GC, GC: R O, R O, & compleantur rectangula G I, GI, R V, R V, item C I, C I, O V, O V, ſemicirculis inſcripta. Rectangula G I, GI, R V, R V vnà cum ſemicirculis ſuis ducta in ſeipſa, hoc eſt in rectangula illis æqualia & ſimilia CI, CI, & O V, O V producent infinita parallelepipeda, vngulis quę ex ſemicirculorum ductibus generantur, inſcripta, quorum baſes erunt rectangula G I C, R V O, hoc eſt quadrata I C, V O; altitudines verò erunt æquales diametrorum partes I I, V V. Quia ex conſtr. A I ſunt ad I B, vt L V ſunt ad V M: ſuntque C I, O V mediæ inter A I, I B, & LV, V M, erunt quoque A I, ad C I, vt LV ad O V. & inuertendo C I ad A I, vt O V ad L V. ſed ex conſtr. A I ſunt ad A B, vt L V ad L M. ergo ex æquo C I ſunt ad AB, vt O V ad LM: & permutando C I ſunt ad O V, vt A B ad LM. ergo ratio quadratorum ſingulorum C I ad quadrata ſingula O V duplicata eſt rationis diametrorum AB, LM. ſed ratio altitudinum I I, ad altitudines V V, eadem eſt ex conſtructione, quæ diametrorum AB, LM. Ratio igitur compoſita ex ratione quadratorum C I ad quadrata O V, & ex ratione altitudinum II ad altitudines V V, hoc eſt ratio parallelepipedorum ſingulorum vngulę A K B inſcriptorum ad parallelepipeda ſingula vngulæ L T M inſcripta, triplicata eſt rationis diametrorum A B, L M. ergo ſingula parallelepipeda vngulæ A KB ſingulis vngulę L T M proportionalia ſunt. ergo per 12.5. element. vt vnũ vngulæ A K B ad vnum vngulę L T M, ſic omnia ſimul ad ſimul omnia. Atqui vnum eſt ad vnum in triplicata ratione diametrorum, vt iam oſtenſum eſt. Ergo omnia ſimul ſumpta vngulæ A K B, ſunt ad omnia ſimul ſumpta vngulæ L T M in triplicata ratione diametrorum. Quare ſi proſequamur reliquam partem diſcurſus in propoſ. 45. & 47. expreſſi, legitimè concludetur, vngulam quoque ad vngulam in triplicata exiſtere diametrorum ratione. Quod erat demonſtrandum.

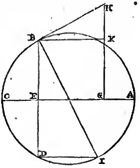
PARS TERTIA.

Expeditis theorematibus quæ vngularem quantitatem, & inuolucri eiuſdem concernunt, aggredimur hac parte contemplationem ſuperficiei cylindricæ quæ vngulam cingit, quam conabimur ad quadratum aut rectangulum ipſi æquale reducere, & varias eius affectiones notas reddere, quas non iniucundas exiſtimo futuras Lectori Geometræ.

PROPOSITIO XXXVI.

CIrculum ABC diuidat diameter AC bifariam, quam orthogonaliter ſecet BD in E, ducta per centrum BI ponatur contingens BH, ex quouis in contingente BH puncto demittatur HG parallela BD.

Dico rectangulum BD, BH æquari AC, GE rectangulo. Eſt Pappi collec. Math. lib. 5. propoſ. 20.



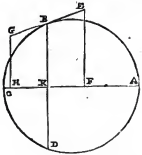
Demonſtratio.

IVnge ID, ducaturque BK ad HG normalis. Quoniam BH contingit circulum in B puncto, ex quo recta BI per centrum acta eſt ex conſtructione; igitur angulus IBH rectus eſt. ſed etiam rectus eſt KBE; anguli igitur IBH, KBD æquales ſunt: quare dempto communi KBI, æquantur HBK, IBD. ſunt verò & anguli HKB, IDB recti, nam IDB in ſemicirculo eſt; de altero pater ex conſtructione; triangula igitur HKB, BDI ſimilia ſunt. ergo HB ad BI, vt KB ad BD. ergo rectangulum HBD a æquatur rectangulo IBK, hoc eſt rectangulo ACGE. Quod erat demonſtrandum. a 16. ſexti.

PROPOSITIO XXXVII.

CIrculum ABC contingat EBG; demittanturque ex punctis, E, B, G, perpendiculares ad diametrum AC, quæ ſint EF, BK, GH: & BK producatur in D.

Dico rectangulum BDEG rectangulo ACFH æquale eſſe. Eſt Pappi, ibidem propoſ. 21.



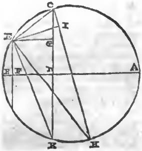
Demonſtratio.

ESt enim per præcedentem rectangulum EBD, æquale AC,FK rectangulo. ſed rectangulum GBD per eandem æquatur AC,KH rectangulo. Igitur rectangulo AC,FH æquale eſt BD,EG rectangulum. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

POnatur in ſemicirculo ACB recta ſubtendens arcum CE, ex cuius terminis perpendiculares fiant EF, CD ad diametrum AB.

Dico rectangulum quod continetur vtraque ſimul CD EF, & CE æquale eſſe rectangulo contento rectâ lineâ DF, & rectâ EH ſubtendente circumferentiam EBH, quæ vnà cum circumferentia CE, ſemicirculum CBH perficit. Eſt Pappi ibidem propoſ. 23.



Demonſtratio.

COmpleto circulo, ſit ipſius diameter CH, & productâ CD in K, ad ipſam perpendicularis ducatur EG, & EH, EK iungantur. Quoniam igitur diameter AB ſecat CK ad rectos angulos, æqualis eſt CD ipſi DK. ſed & GD eſt æqualis EF. ergo GK æquatur duabus CD, & EF: eſt autem GE æqualis etiam DF; quę verò reliquam ſemicirculi CEH circumferentiam ſubtendit eſt EH. Itaque quoniam angulus K eſt æqualis angulo H, & HEC angulus in ſemicirculo rectus, æqualis recto KGE; erunt triangula HEC, KEG æquiangula. ergo vt HE ad EC, ita KG ad GE, & ob id rectangulum contentum HE, EG, hoc eſt HE, DF, æquale eſt ei quod GK, CE, hoc eſt ei quod vtrâque ſimul CD, EF, & CE continetur.

PROPOSITIO XXXIX.

IIſdem poſitis demittatur perpendicularis EI ad diametrum HC. Dico rectangulo CE, EI æquale eſſe HE, CI rectangulum.

Demonſtratio.

a 8.ſexti SVnt enim a triangula CEI, CEH ſimilia, ac proinde latera CI, IE ſunt lateribus CE, EH proportionalia: vnde rectangulum CI, EH rectangulo IE, CE eſt æquale.

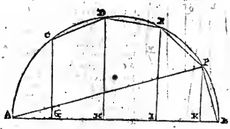
PRO-

PROPOSITIO XL.

SIt A B circuli A B C diameter, & lineæ B P, P E, E D, D C æquales arcus ſubtendant, ex quibus demittantur perpendiculares P K, E I, D H, C G, ad diametrum A B.

Dico rectangulum ſub B G, & ſub A P, ſubtendente arcum P D A, qui vnà cum arcu B P, conſtituit ſemicirculum, æquari rectangulis ſub B P K, ſub P B, & duabus P K, E I, ſub P B, & E I, D H, & ſub P B & D H, C G.

Demonſtratio.



OStendimus præcedenti propoſitione rectangulo P A. B K æquari B P K rectangulum: & propoſitione trigeſima octaua rectangulo ſub P A & K I, æquale eſſe rectangulum ſub P K, E I tamquam vnâ, & P E, hoc eſt B P; & in eadem propoſitione eſt demonſtratum rectangulo P A, I H, æquari rectangulum ſub E I, D H ſimul ſumptis, & E D, hoc eſt P B: item rectangulo ſub A P, H G æquari rectangulum ſub D H, C G, ſimul ſumptis, & ſub D C, hoc eſt B P. Manifeſtum igitur, rectangulum ſub A P & B G ęquale eſſe omnibus rectangulis; quorum primum eſt B P K, ſecundum ſub P K, E I & P E ſeu P B, tertium ſub E I, D H & E D, hoc eſt B P, quartum ſub D H, C G & D C, hoc eſt B P.

Corollarium.

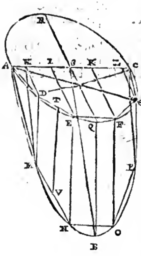
EOdem diſcurſu demonſtrabimus ſi æquales lineæ totum ſemicirculum ſubtendãt, rectangulum ſub tota diametro B A, & ſub A P ſubtendente omnia figurę inſcriptæ latera, dempto vltimo, æquari omnibus rectangulis ſupradictis & rectangulo inſuper A C G.

PROPOSITIO XLI.

SI inſcribatur ſemicirculo vngulæ à cylindro recto decuſſatæ, quę habeat æqualem altitudinem diametro baſeos, quodlibet polygonum regulare, & ſecundùm latera polygoni fiant ſectiones quæ ſint axi cylindri, ex quo decuſſata eſt vngula, æquidiſtantes.

Erunt omnia plana ſimul ſumpta vngulæ inſcripta ęqualia rectangulo quod fit ſub tota diametro, & latere quod omnia latera polygoni ſubtendit, dempto vltimo.

Demon-



Demonſtratio.

SIt itaque vngula A B C, à cylindro recto abſciſſa habens altitudinem Q B diametro baſeos A C parem: eius baſi inſcripta ſit figura regularis A D E F G C, & ducta ſit A G ad terminum vltimi lateris C G. Denique plana ponantur per latera polygoni quæ æquidiſtent axi cylindri exhibentia communes interſectiones cum ellipſi A B C rectas A M, M N, N O, O P, P C.

Dico plana hæc omnia ſimul ſumpta, nimirum A D M, D E N M, E F O N, F G P O & C G P, æquari rectangulo C A G.

Quod ſic oſtendo: Ex centro ducatur S Q normalis diametro, & à puncto Q ducatur in ſuperficie cylindricâ recta Q B, quę erit vngulæ altitudo, & ex hypotheſi æqualis diametro A C, iungatur deinde S B, ductis inſuper D H, E I, F K, G L normalibus ad A C, iunge H M, I N, K O, L P. Quoniam Q S, D H ſunt parallelę, itemque B Q, M D, anguli B Q S,

a 10. Vndec. M D H æquales [a] erunt. Rurſum quia Q S, Q B æquidiſtant D H, D M, plana S Q B, H D M

b 15. Vndec. ſunt [b] parallela, ergo earum ſectiones communes cum plano elliptico C B A, rectę nimirum

c 16. Vndec. B S, M H, ſunt [c] parallelæ. Cùm igitur Q S, B S æquidiſtent D H, M H, erunt anguli Q S B, D H M æquales. triangula igitur B S Q, M H D ſimilia ſunt. ergo vt B Q ad Q S, ita M D ad D H. ſed B Q ex hypotheſi par eſt diametro A C, adeoque dupla ſemidiametri Q S. Ergo & M D dupla eſt D H. Pari modo oſtendam rectas N E, O F, P G duplas eſſe rectarum E I, F K, G L. Pręterea quoniam cylindrus ex hypotheſi rectus eſt, à quo decuſſatur vngula, erunt M D, N E, O F, P G rectæ plano baſeos A Q C, adeoque per definitionem 3. vndecimi angulos rectos faciunt cum lineis A D, D E, E F, F G, G C. triangula ergo A D M, C G P rectangula ſunt, & plana D M N E, E N O F, F O P G, trapezia rectangula. Quoniam igitur M D, trianguli A D M eſt altitudo, eaque dupla eſt oſtenſa ipſius D H, erit triangulum A D M rectangulo ſub A D & D H æquale. Iam verò rectis E D, N M biſectis in T & V, iunctâque T V, rectam T V dimidiam eſſe ſummæ rectarum M D, N E; & rectangulum E D T V, æquari trapezio rectangulo M N E D in ſequenti, figuræ opportunitate vſi, demonſtrabimus. Quare cùm rectangulum ſub E D & M D, N E tanquam

d 1. Sexti. vnâ, quæ duplæ ſunt rectę T V, rectanguli E D T V duplum [d] ſit, erit quoque rectangulum ſub E D, & M D, N E tanquam vnâ, duplum plani M N E D. Quia autem rectæ M D, N E, oſtenſæ ſunt duplę rectarum D H, E I, rectangulum ſub E D, & M D, N E ſimul ſumptis duplum etiam eſt rectanguli ſub E D, & D H E I ſimul ſumptis. planum igitur M N E D æquatur rectangulo ſub D E, ſiue A D & D H, E I ſimul ſumptis. pari argumento oſtendam planum E N O F, æquari rectangulo ſub E F id eſt A D, & E I, F K; planum verò F O, P G rectangulo ſub F G, hoc eſt A D & F K, G L, triangulum denique G P C oſtendam rectangulo ſub G C, id eſt A D, & G L æquari, vt oſtendi ſuprà triangulum A D M æquari rectangulo A D H. omnia igitur plana vngulæ inſcripta ſimul ſumpta æquantur omnibus rectangulis illis ſimul ſumptis, hoc eſt per Corollarium præcedentis rectangulo quod rectis C A, A G continetur. Quod erat demonſtrandum.

Corol-

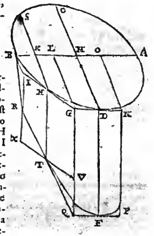
Corollarium.

QVod ſi plano ad axem cylindri parallelo, & tranſeunte per lineam G L diametro rectam abſciſſa ſit pars ſuperficiei cylindricæ, quæ vngulã cingit G P N A Q A, & arcui G E A ſubtendantur æquales rectæ quotcunque, ſecundùm quas plana inſcribantur vngularis ſuperficiei cylindricę ſegmento: eodem diſcurſu, quo iam vſi ſumus, demonſtrabimus per pręcedentem omnia plana inſcripta ſimul ſumpta æquari rectangulo quod continetur rectis A L & C D, ſubtendente arcum D F C qui vnà cum arcu A D complet ſemicirculum.

PROPOSITIO XLII.

DAta ſit vngula A P B, à cylindro recto decuſſata, cuius D F altitudo ſit æqualis diametro A B, & cõſtituantur latera cuiuſcunque polygoni, circulum ambientia, ſcilicet B I, I H G, G D N; ſic vt primum B I tangat extremitatem diametri A B & reliqua in contactu biſecentur, & per hæc latera, plana conſtituantur axi parallela vngulam tangentia ſecundùm rectas H T, D F, quæ producant communes ſectiones cum baſi vngulari elliptica rectas B R, R Q, P Q: ſecent verò ſeſe mutuo ſecundùm rectas I R, G Q; factâ autem N D æquali ipſi F P iungatur N P, ducatur demum N O normalis ad A B.

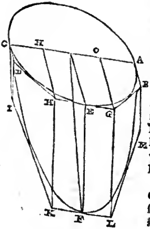
Dico omnia plana vngulam ambientia, dempto triangulo B I R, æquari rectangulo, quod fit ſub lineis A B, B O.



Demonſtratio.

EX punctis H & G, ducantur G L, H K S orthogonaliter ad A B: & ponatur per T parallela occurrens rectis G Q, I R in V & X. Quoniam ex hypotheſi, cylindrus, à quo abſciſſa eſt vngula, rectus eſt, patet T H rectam eſſe plano baſeos A D B. ergo per definit. 3. vndecimi T H normalis eſt ad G I. adeoque & V G, X I, ad G I ſunt rectæ; rectangulum igitur eſt G V X I, æquale ei, quod ſub T H, G I continetur. Atqui rectangulum G V X I æquale eſt plano G Q R I. cùm enim I G biſecetur in H, ex conſtruct. etiam X V, B Q biſectæ erunt, adeoque triangula B T X, V T Q æqualia; ſi igitur communi trapezio I B T V G addantur triangula V T Q, B T X, erunt planum I R Q G, & rectangulum I X V G æqualia; ergo & rectangulum T H, G I plano G Q R I æquale eſt. Deinde in præcedenti demonſtratum eſt rectam T H duplam eſſe rectæ H K. Cùm igitur eiuſdem dupla ſit H S, pares erunt T H, H S. Rectangulum igitur S H G I æquatur rectangulo T H G I, hoc eſt, vt iam oſtendi, plano G Q R I. Atqui rectangulum S H G I æquatur[a] rectangulo ſub A B, B L. planum igitur G Q R I & rectangulum ſub A B, B L, æqualia ſunt. Simili planè diſcurſu oſtendam planum G Q P N æquari rectangulo ſub A B, L O; plana igitur vngulam ambientia ſimul ſumpta, dempto triangulo B R I, æquantur rectangulo A B O. Quod erat demonſtrandum. a 17. huius.

PROPOSITIO XLIII.



SInt AB, C D contingentes circulum A E C in terminis diametri A C, qui circulus baſis eſt vngulæ A E F C cylindro recto decuſſatæ, habentis altitudinem E F diametro A C parem: poſito deinde quocunque polygono B G, G H, H D circumdante circulum A E C, ſic vt eius latera in contactu biſecentur, planiſq; poſitis per lineas polygoni axi parallelis, quæ concurrentia cum plano elliptico vngulari A F C forment I K, K L, L M, communes interſectiones, ſecent verò ſeſe mutuo ſecundùm rectas D I, H K, G L, B M.

Dico hædras omnes D I K H, H K L G, G L M B, vngulam ambientes ſimul ſumptas excluſis triangulis A B M, C D I æquari quadrato A C.

Demonſtratio.

ESt enim in præcedenti demonſtratum rectãgulo A C N æquari rectilineum D H K L. Ibidem oſtenſum eſt rectangulo A C, N O æquari rectilineum G H K L, & rectilineo B G L M æquari rectangulum ſuper A C & A O; igitur cùm rectangulis A C N C, A C N O, A C A O æquetur quadratum A C; etiam omnibus figuris rectilineis D H K I, G H K L, G B L M ſimul ſumptis æquatur quadratum A C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

DAtæ ſint binæ vngulæ à cylindris rectis decuſſatæ, quarum altitudines, ſint baſium circularium diametris pares, & ipſæ etiam baſes circulares æquales ſint. Circa vtrumque autem circulum polygona deſcribantur, ſed inæqualium numero laterum, circa vnum circulum exempli gratia polygonum decem laterum, circa alterum verò laterum mille: ponantur inſuper plana per latera polygonorum quę axibus æquidiſtent, concurrentia cum planis ellipticis vngulas terminantibus.

Dico omnia plana vnam vngulam ambientia ſimul ſumpta, æqualia eſſe planis ſimul ſumptis alteram circumdantibus, ſi triangularia vtrimque omittantur.

Demonſtratio.

a 43. huius. EX demonſtratis enim a conſtat congeriem planorum ſingulas vngulas ambientium, demptis triangulis æqualem eſſe quadrato circularis diametri quæ in baſi eſt vngulę, ex hypotheſi autem vngularum baſes, adeoque & diametri baſium æquales ſunt.

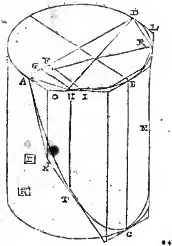
ſunt Igitur manifeſtum eſt plana ſimul omnia demptis triangulis, vnam vngulam ambientia, æqualia eſſe planis ſimul ſumptis quæ alteram ambiunt, demptis item triangulis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLV.

SVperficies cylindrica cuiuſuis vngulę à cylindro recto decuſſatæ, cuius altitudo par eſt diametro circuli qui baſis eſt vngulę, æqualis eſt quadrato diametri.

Demonſtratio.

SIt vngula A B C D, cuius altitudo B C, ſit æqualis A D diametro baſeos cylindri recti à quo decuſſata eſt.



Dico cylindricam ſuperficiem vngulæ, quadrato diametri A D æqualem eſſe. Si negas; ſit primò, ſi fieri poteſt, quadratum A D maius cylindrica ſuperficie quę vngulam ambit: exceſſus autem ſit planum E. Fiat ergo rectangulum D A F æquale plano E: & erigatur F I normaliter ad diametrum A D. Deinde polygonum aliquod regulare inſeribatur circulo A B D, cuius vltimum latus A H minus ſit ſubtenſiâ arcus A I, & demittatur H G normalis ad A D diametrũ. Quia quadratum A D, 2. ſecundi, ſuperat rectangulum A D F rectangulo D A F, id eſt ex conſtr. E plano, quo eodem exceſſu quadratum A D ponitur ſuperare ſuperficiem cylindricam vngulæ, erit rectangulũ A D F, cylindricę ſuperficiei vngulę æquale. ergo rectangulum A D G maius eſt cylindrica ſuperficie quę vngulam terminat. ergo rectangulum A D H eâdem multò eſt maius. ſed rectangulo A D H æqualia ſunt [a] plana omnia ſimul ſumpta quæ per latera polygoni inſcripti ducentur axi parallela terminata in elliptica baſi vngularis corporis. Igitur etiam illa plana maiora ſunt cylindrica ſuperficie quæ vngulam ambit, quod fieri nequit, cùm ſingula plana ſint minoris & latitudinis & longitudinis quàm ſingulę partes ſuperficiei cylindricæ quas decuſſarunt ab ipſa vngulari ſuperficie. Non igitur maius eſt quadratum A D cylindri ſuperficie quæ vngulam ambit. [a] 41. huius.

Sit deinde, ſi fieri poteſt, quadratum A D minus eadem ſuperficie cylindricâ ambiente vngulam, & defectus ſit planum E. Erit ergo quadratum A D cum quantitate N quæcunque, quæ minor ſit quàm E, adhuc minus vngulari ſuperficie quæ vngulam ambit. Circumſcribatur igitur aliquod polygonum circa circulum A B D tot laterum vt ductis per latera planis vngulam tangentibus, triangula remaneant A O K, D L M, quæ ſimul ſumpta æqualia ſint aut minora quantitate N: (quod aliquando futurum eſt, cùm multiplicatis in infinitum polygoni conſcripti lateribus triangulorum A O K, D L M, tum baſes A O, D L, tum altitudines O K, L M, fiant tandem dato minora) & plana ponantur ſecundùm latera huius polygoni quæ axi cylindrico æquidiſtent. Igitur quadratum A D ſimul cum triangulis A O K, D L M minus eſt cylindrica ſuperficie quę vngulam ambit. Atqui plana vngulam ambientia demptis triangulis, æquantur quadrato A D per præcedentem. ergo etiam illa vnà cum triangulis minora ſunt quàm ſuperficies cylindri, quæ vngulam cingit, quod ab-

 ſurdum

ſurdum eſt; nam omnia illa plaoa ſimul cum triangulis lateralibus cylindricam vngulæ ſuperficiem includunt. Quadratum igitur A D non eſt minus cylindrica vngulæ ſuperficie; quare cùm neque maius eſſe poſſe, ſuprà oſtenderimus, neceſſe eſt vt ſit æquale. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVI.

DAta ſit vngula, qualis in præcedenti, ad cuius diametrum A D ductâ normali G H quâcunque, ex puncto H ponatur in ſuperficie cylindrica vngulæ recta H T.

Dico cylindricæ ſuperficiei vngulam cingentis partem H T C R D æqualem eſſe rectangulo A D G.

Demonſtratio.

SI negas, erit rectangulum A D G, vel maius vel minus ſuperficie H T C R D. ſit primò maius, & exceſſus ſit planum E. Arcui H B D inſcribe figuram æquilateram tot, adeoque tam paruis conſtantem lateribus, vt recta A R ſubtendens arcum R B A, qui cum arcu D R complet ſemicirculum, deficiat à diametro A D, quantitate minori datâ, adeoque vt rectangulum ſub A R & D G, ſuperetur à rectangulo ſub A D & D G, plano minori quàm E, quæ omnia ex elementis factu facillima. Quooiam ergo rectangulum A D G ſuperat rectangulum A R, D G plano minori quàm E, quo ſuperare ponitur ſuperficiem H T C R D, erit quoque rectangulum A R D G maius ſuperficie H T C R D. Atqui rectangulo A R D G æquantur [a] plana, quæ ſecundùm latera figuræ æquilateræ inſcribuntur ſuperficiei H T C R D. ergo & plaoa illa ioſcripta maiora ſunt ſuperficie H T C R D, cui inſcripta ſunt. quod eſt abſurdum. Non igitur rectangulū A D G, eſt maius ſuperficie H T C M D.

a Coroll. 42. huius.

Ponatur deinde rectangulum A D G minus eſſe ſuperficie H T C R D, defectus autem ſit planum E. circumſcribe arcui H B D figuram æquilateram tot laterum, vt ductis per illa planis ad cylindri axem parallelis vngulam tangentibus, poſtrema planum verſus D, quod eſt triangulare, minus ſit plano E. Quod neceſſariò futurum aliquando, eſt manifeſtum. igitur rectangulum A D G vnà cum plano illo triangulari, adhuc minus erit ſuperficie H T C R D. ſed plura ſuperficiem H T C R D ambientia, dempto triangulo,[b] æquantur rectangulo A D G. ergo etiam plana ambientia vnà cum triangulo mioora ſunt ſuperficie H T C R D, quam cingunt. quod eſt abſurdum. Non igitur rectangulum A D G minus eſt ſuperficie H T C R D, ſed neque maius eſſe oſtenſum eſt ſuprà. neceſſe igitur eſt vt eidem ſit æqualis. Quod erat demonſtrandum.

b 42. huius.

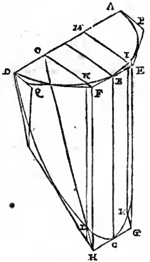
PROPOSITIO XLVII.

DAta ſit vngula, qualis ſuprà, ductis deinde lineis M I, O N ad diametrum A D rectis, per has ponantur plana ad axem cylindri parallela, quæ in vngulæ ſuperficie efficiant rectas I K, N L.

Dico ſegmentum ſuperficiei cylindricę vngulā ambientis I B N L C K I, æquale eſſe rectangulo quod rectis A D, M O continetur.

Demon-

Demonſtratio.

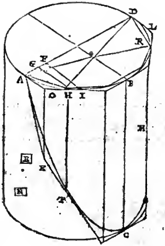


DEmonſtratum eſt ſegmentum ſuperficiei vngularis INDLKI æquari rectangulo ADM. Demonſtratũ eſt item ſegmentum vngularis ſuperficiei NLD æquari rectangulo ADO. quare ſi ab æqualibus, ſuperficie nimirum INDLKI, & rectangulo ADM, tollantur æqualia, nimirum ſuperficies NLD, & rectangulum ADO, quæ remanent ſunt æqualia, ſuperficies nempe IBNLCKI, & rectangulum ADMO. Quod erat demonſtrandum. 146. huius.

PROPOSITIO XLVIII.

OMnia plana vngulam ambientia, & ad ellipticam vngulæ baſim terminata demptis triangulis lateralibus, ſuperficiei cylindricæ, quæ vngulam cingit, æqualia ſunt ſimul ſumpta.

Demonſtratio.



OMnia enim illa plana ſimul ſumpta, demptis triangulis, æquantur per 43. huius quadrato diametri AD. Atqui eidem quadrato æquatur ſuperficies cylindrica quæ vngulam cingit. Ergo omnia plana vngulam ambientia ſimul ſumpta, demptis triangulis, æquantur ſuperficiei cylindricæ quæ cingit vngulam. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

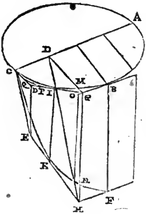
SImiliter demonſtrabimus omnia plano dempto, triangulo laterali vngulæ ſegmentum HTCRD ambientia, æqualia eſſe ſuperficiei HTCRD: tam enim plana ambientia dempto triangulo, quàm ſuperficies, æquantur rectangulo ADG.

PROPOSITIO XLIX.

DAta ſit vngula, qualis ſuprà, quam ad extremitatem diametri contingat planum, triangulare DCE, ſecans planum ellipticum AFNC ſecundùm rectam CE, contingat autem eandem vngulam & alterum planum DENO ſecúdùm rectam IK, ſecans planum DCE rectâ DE, planum verò ellipticum AFNC rectâ HKE. Ponatur denique per rectam aliquam LG normalem diametro, planum axi æquidiſtans, producens in ſuperficie vngulari rectam MN, ſecans verò planum ODEN ſecundùm rectam GH.

Dico planum contingens ODEN, æquale eſſe ſuperficiei vngulari cylindricæ MCEN.

Demonſtratio.



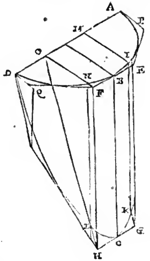
DEmonſtratum eſt in 42. huius, contingens planum ODEN eſſe æquale rectangulo quod lineis AC, LC continetur. Rurſum per 46. huius ſuperficies cylindrica MCEN, quę ſegmentum vngulare cingit, æquatur rectangulo ſub iiſdem lineis AC, LC comprehenſo. Ergo planum contingens ODEN ſuperficiei cylindricæ MCEN vngulare ſegmentum ambienti æquale eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO L.

DAta ſit vngula, qualis ſuprà, quam contingat planum aliquod ſecundùm rectam BC: ponantur autem bina plana axi parallela per rectas MI, ON diametro normales, ſecantia planum contingens ſecundùm rectas FH, EG; ſuperficiem verò vngularem ſecundùm rectas IK, NL.

Dico

Dico planum contingens EFHG æquale eſſe ſuperficiei vngulari cylindricæ IBNLCK.



Demonſtratio.

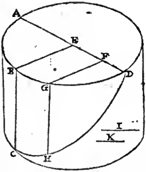
DEmonſtratum eſt in 42. huius planum contingens EFHG æquale eſſe rectangulo quod lineis AD, MO continetur. Atqui demonſtratum etiam eſt propoſitione 47. ſuperficiem IBNLCK æqualem eſſe eidem rectangulo ſub lineis AD, MO comprehenſo. ergo planum contingens EFHG ſuperficiei IBNLCK æquale eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LI.

VNgularem ſuperficiem cylindricam ſecundùm datam rationem partiri.

Conſtructio & demonſtratio.

SIt vngularis ſuperficies ABCD diuidenda ſecundùm rationem datam I ad K. fiat vt I ad K, ita AD ad DF, vel ita AD ad FE, & ſecundùm FG, EB perpendiculares ad diametrum, ducantur plana axi cylindri parallela exhibentia communes ſectiones in ſuperficie cylindri vngulari rectas BCGH. Dico ſuperficiem vngulę ABCD ad partem GHD, vel ad partem BGHC eandem habere proportionem quam habet I ad K. Demonſtratum eſt enim [a] rectangulo ADF æqualem eſſe vngulę ſuperficiem GHD. Demonſtratum quoque eſt [b] rectangulo AD, EF æqualem eſſe ſuperficiem BGHC. Demonſtratum quoque eſt [c] toti vngulari ſuperficiei æquale eſſe quadratum AD. Cùm igitur 1. ſexti ſit vt AD ad DF, vel EF, ita quadratum AD ad rectangulum ADF, vel AD, FE, erit quoque vt AD ad DF, vel FE (hoc eſt vt I ad K,) ita ſuperficies vngularis tota ad partem GHD vel GHCB. pręſtitimus igitur quod petebatur.



a 46. huius.
b 47. huius.
c 45. huius.

PROPOSITIO LII.

SEcetur vngula ABC, cuius altitudo par ſit diametro baſis planis quotcunque axi æquidiſtantibus & rectis ad diametrum DC.

Dico ſuperficies vngulares planis illis interceptas eandem inter ſe ſortiri rationem quam partes diametri DC.

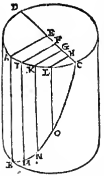
Demon-

Demonſtratio.

a 46. huius.

b 47. huius.

c 1. Sexti.



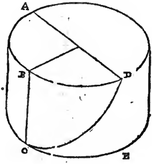
DEmonſtratum enim eſt a rectangulum ſub DC & DE, æquale eſſe ſuperficiei vngulari ABD. Demonſtratum item eſt rectangulum ſub DC & EF, æquari ſuperficiei AIMB. oſtenſum b quoque eſt rectangulum DC, FG æquari ſuperficiei IMNK, & rectangulũ DC, GH æquale exiſtere ſuperficiei KNOL. rectangulum denique ſuper DC & HC, æquale eſſe ſuperficiei CLO. patet igitur totam vngulæ ſuperficiem diuiſam eſſe ſecundùm partes diametri DC, cùm quadratum DC, ſit diuiſum in rectangula quæ c ſortiuntur eandem rationem quam partes lineæ DC.

PROPOSITIO LIII.

CYlindrus rectus ABDE, cuius altitudo par ſit diametro baſis AD, ſecetur per AD plano exhibente ſectionem vngularem ABCD.

Dico ſuperficiem vngularem ad cylindricam, eam obtinere rationem, quam diameter circuli ad perimetrum.

Demonſtratio.



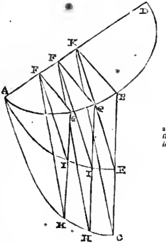
SVperficies cylindri recti AE æqualis eſt rectangulo contento ſub BC, hoc eſt DA, & ſub toto perimetro circuli ABD: quod eodem fere diſcurſu probabitur, quo demonſtrauit Archimedes triangulum cuius altitudo eſt ſemidiameter, baſis verò, circumferentia, æquari circulo. ſed quadratum DA eſt ad rectangulum contentum ſub DA, & perimetro circuli, vt DA eſt ad perimetrum circuli. Ergo & quadratum DA, hoc eſt per 45. curua ſuperficies vngulæ ACD, eſt ad cylindri ſuperficiem vt diameter DA eſt ad perimetrum circuli ABD. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LIV.

VNgula ABCD cuius altitudo BC, ſecetur plano per AD & quodlibet punctum E in recta BC.

Dico

Dico vngularē ſuperficiem A B C D ad ſuperficiem A B E D eandem habere rationem cum recta B C ad B E.



Demonſtratio.

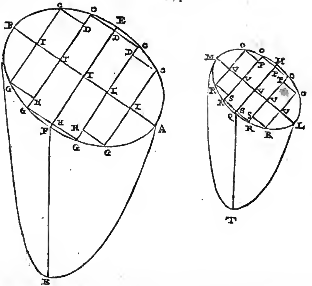
POnantur quotuis K B, F G normales ad A D, per quas fiant ſectiones axi parallelæ K B C, F G H occurrentes plano D E A ſecundùm rectas K E, F I, & plano D C A ſecundùm rectas F H, F H, K C. erunt ergo omnia triangula C B K, H G F, æquiangula [a] inter ſe. Similiter omnia triangula, E B K, I G F æquiangula erunt. ergo C B, H G, H G, ſunt rectis B K, G F, G F proportionales: & E B, I G, I G, ſunt ijſdem B K, G F, G F proportionales. ergo C B, H G, H G ſunt proportionales ipſis E B, I G, I G; ergo ſingula plana quæ ſubtendunt ſuperficies B C H G, G H H G proportionalia ſunt planis ſingulis, quæ ſubtendunt ſuperficies B E I G, G I I G. Ergo 12. quinti, vt planum ſubtendens ſuperficiem B C H G ad planum ſubtendens ſuperficiem B E I G, hoc eſt vt B C ad B E, ſic omnia plana ſimul ſumpta quæ ſubtenduntur ſiue inſeribuntur ſuperficiei vngulati B C H A ad omnia plana ſimul ſumpta quæ ſubtenduntur ſeu inſeribuntur ſuperficiei vngulari B E I A. Cùm igitur pari argumento poſſimus oſtendere aggregata planorum vtrique ſuperficiei vngulari iuxta quamcunque multiplicationem inſcriptorum ſemper inter ſe eandem ſeruare rationem quam B C habet ad B E, planaque illa deficiant tandem à ſuperficiebus vngularibus quantitate quacunque datâ minori: Manifeſtum eſt ipſas quoque vngulares ſuperficies, eandem inter ſe rationem habere, quam B C habet ad B E. Quam conſequentiam ſecundùm rigorem Geometricum facilè probabit Lector Geometra, ſi adhibeat eam demonſtrandi formam quâ varijs locis huius operis vſi ſumus, vel diſcurſus ab Archimede & Euclide paſſim vſurpatos.

a Demonſtratum eſt in 41 huius.

PROPOSITIO LV.

CViuſcunque vngulæ ſuperficies, ſiue altitudinem parem habeat diametro baſeos ſiue non, æqualis eſt rectangulo, quod diametro baſeos (A E) & ipſius vngulæ altitudine (B D) continetur.

Demonſtratio.



DAtæ ſint vngulæ A K B, L T M, quarum altitudines F K, Q T, æquales ſint A B, L M diametris ſemicirculorum A G B, L R M, qui in ſeipſos ducti ipſas, vt in ſcholio 19. oſtenſum eſt, vngulas producunt.

Diametris A B, L M in æquè multas, ſed plures ac ſemper plures, æquales partes A I, I I, L V, V V, diuiſis per diuiſionum puncta I, I, V, V ducantur normales ad diametros G C, G C: R O, R O, & compleantur rectangula G I, G I, R V, R V, item C I, C I, O V, O V, ſemicirculis inſcripta. Rectangula G I, G I, R V, R V vnà cum ſemicirculis ſuis ducta in ſeipſa, hoc eſt in rectangula illis æqualia & ſimilia C I, C I, & O V, O V producent infinita parallelepipeda, vngulis quę ex ſemicirculorum ductibus generantur, inſcripta, quorum baſes erunt rectangula G I C, R V O, hoc eſt quadrata I C, V O; altitudines verò erunt æquales diametrorum partes I I, V V. Quia ex conſtr. A I ſunt ad I B, vt L V ſunt ad V M: ſuntque C I, O V mediæ inter A I, I B, & L V, V M, erunt quoque A I, ad C I, vt L V ad O V, & inuertendo C I ad A I, vt O V ad L V. ſed ex conſtr. A I ſunt ad A B, vt L V ad L M. ergo ex æquo C I ſunt ad A B, vt O V ad L M: & permutando C I ſunt ad O V, vt A B ad L M. ergo ratio quadratorum ſingulorum C I ad quadrata ſingula O V duplicata eſt rationis diametrorum A B, L M. ſed ratio altitudinum I I, ad altitudines V V, eadem eſt ex conſtructione, quæ diametrorum A B, L M. Ratio igitur compoſita ex ratione quadratorum C I ad quadrata O V, & ex ratione altitudinum I I ad altitudines V V, hoc eſt ratio parallelepipedorum ſingulorum vngulę A K B inſcriptorum ad parallelepipeda ſingula vngulæ L T M inſcripta, triplicata eſt rationis diametrorum A B, L M. ergo ſingula parallelepipeda vngulæ A K B ſingulis vngulę L T M proportionalia ſunt. ergo per 12. 5. element. vt vnū vngulæ A K B ad vnum vngulę L T M, ſic omnia ſimul ad ſimul omnia. Atqui vnum eſt ad vnum in triplicata ratione diametrorum, vt iam oſtenſum eſt. Ergo omnia ſimul ſumpta vngulæ A K B, ſunt ad omnia ſimul ſumpta vngulæ L T M in triplicata ratione diametrorum. Quare ſi proſequamur reliquam partem diſcurſus in propoſ. 45. & 47. expreſſi, legitimè concludetur, vngulam quoque ad vngulam in triplicata exiſtere diametrorum ratione. Quod erat demonſtrandum.

PARS

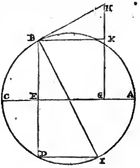
PARS TERTIA.

Expeditis theorematibus quæ vngularem quantitatem, & inuolucri eiuſdem concernunt, aggredimur hac parte contemplationem ſuperficiei cylindricæ quæ vngulam cingit, quam conabimur ad quadratum aut rectangulum ipſi æquale reducere, & varias eius affectiones notas reddere, quas non iniucundas exiſtimo futuras Lectori Geometræ.

PROPOSITIO XXXVI.

CIrculum ABC diuidat diameter AC bifariam, quam otthogonaliter ſecet BD in E, ducta pet centtum BI ponatur contingens BH, ex quouis in contingente BH puncto demittatut HG parallela BD.

Dico tectangulum BD, BH æquari AC, GE rectangulo. Eſt Pappi collec. Math. lib. 5. ptopoſ. 20.



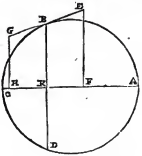
Demonſtratio.

IVnge ID, ducaturq́ue BK ad HG normalis. Quoniam BH contingit circulum in B puncto, ex quo recta BI per centrum acta eſt ex conſtructione; igitur angulus IBH rectus eſt, ſed etiam rectus eſt KBE; anguli igitur IBH, KBD æquales ſunt: quare dempto communi KBI, æquantur HBK, IBD. ſunt verò & anguli HKB, IDB recti, nam IDB in ſemicirculo eſt; de altero patet ex conſtructione; triangula igitur HKB, BDI ſimilia ſunt. ergo HB ad BI, vt KB ad BD. ergo rectangulum HBD a æquatur tectangulo IBK, hoc eſt rectangulo ACGE. Quod erat demonſtrandum. a 16. ſexti.

PROPOSITIO XXXVII.

CIrculum ABC contingat EBG; demittanturq́ue ex punctis, E, B, G, perpendiculates ad diametrum AC; quæ ſint EF, BK, GH: & BK producatur in D.

Dico rectangulum BDEG rectangulo ACFH æquale eſſe. Eſt Pappi, ibidem propoſ. 22.

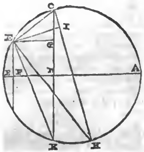


Demonſtratio.

EST enim per præcedentem rectangulum EBD, æquale A C,F K rectangulo. ſed rectangulum G B D per eandem æquatur A C,K H rectangulo. Igitur rectangulo A C,F H æquale eſt BD. E G rectangulum. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

POnatur in ſemicirculo A C B recta ſubtendens arcum C E, ex cuius terminis perpendiculares fiant E F, C D ad diametrum A B.



Dico rectangulum quod continetur vtraque ſimul C D E F, & C E æquale eſſe rectangulo contento rectâ lineâ D F, & rectâ E H ſubtendente circumferentiam E B H, quæ vnà cum circumferentia C E, ſemicirculum C B H perficit. Eſt Pappi ibidem propoſ. 23.

Demonſtratio.

COmpleto circulo, ſit ipſius diameter C H, & productâ C D in K, ad ipſam perpendicularis ducatur E G, & E H, E K iungantur. Quoniam igitur diameter A B ſecat C K ad rectos angulos, æqualis eſt C D ipſi D K. ſed & G D eſt æqualis E F. ergo G K æquatur duabus C D, & E F: eſt autem G E æqualis etiam D F; quę verò reliquam ſemicirculi C E H circumferentiam ſubtendit eſt E H. Itaque quoniam angulus K eſt æqualis angulo H, & H E C angulus in ſemicirculo rectus, æqualis recto K G E; erunt triangula H E C, K E G æquiangula. ergo vt H E ad E C, ita K G ad G E, & ob id rectangulum contentum H E, E G, hoc eſt H E, D F, æquale eſt ei quod G K, C E, hoc eſt ei quod vtrâque ſimul C D, E F, & C E continetur.

PROPOSITIO XXXIX.

IISdem poſitis demittatur perpendicularis E I ad diametrum H C. Dico rectangulo C E, E I æquale eſſe H E, C I rectangulum.

Demonſtratio.

a 8. ſext. SVnt enim a triangula C E I, C E H ſimilia, ac proinde latera C I, I E ſunt lateribus C E, E H proportionalia; vnde rectangulum C I, E H rectangulo I E, C E eſt æquale.

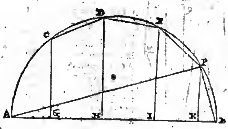
PRO-

PROPOSITIO XL.

SIt A B circuli A B C diameter, & lineæ B P, P E, E D, D C æquales arcus ſubtendant, ex quibus demittantur perpendiculares P K, E I, D H, C G, ad diametrum A B.

Dico rectangulum ſub B G, & ſub A P, ſubtendente arcum P D A, qui vnà cum arcu B P, conſtituit ſemicirculum, æquari rectangulis ſub B P K, ſub P B, & duabus P K, E I, ſub P B, & E I, D H, & ſub P B & D H, C G.

Demonſtratio.



OStendimus præcedenti propoſitione rectangulo P A. B K æquari B P K rectangulum: & propoſitione trigeſima octaua rectangulo ſub P A & K I, æquale eſſe rectangulum ſub P K, E I tamquam vnâ, & P E, hoc eſt B P; & in eadem propoſitione eſt demonſtrarum rectangulo P A, I H, æquari rectangulum ſub E I, D H ſimul ſumptis, & E D, hoc eſt P B: item rectangulo ſub A P, H G æquari rectangulum ſub D H, C G, ſimul ſumptis, & ſub D C, hoc eſt B P. Manifeſtum igitur, rectangulum ſub A P & B G equale eſſe omnibus rectangulis; quorum primum eſt B P K, ſecundum ſub P K, E I & P E ſeu P B, tertium ſub E I, D H & E D, hoc eſt B P, quartum ſub D H, C G & D C, hoc eſt B P.

Corollarium.

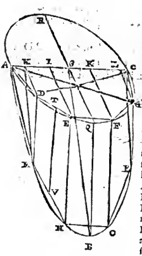
EOdem diſcurſu demonſtrabimus ſi æquales lineæ totum ſemicirculum ſubtendãt, rectangulum ſub tota diametro B A, & ſub A P ſubtendente omnia figuræ inſcriptæ latera, dempto vltimo, æquari omnibus rectangulis ſupradictis & rectangulo inſuper A C G.

PROPOSITIO XLI.

SI inſcribatur ſemicirculo vngulæ à cylindro recto decuſſatæ, quę habeat æqualem altitudinem diametro baſeos, quodlibet polygonum regulare, & ſecundùm latera polygoni fiant ſectiones quæ ſint axi cylindri, ex quo decuſſata eſt vngula, æquidiſtantes.

Erunt omnia plana ſimul ſumpta vngulæ inſcripta ęqualia rectangulo quod fit ſub tota diametro, & latere quod omnia latera polygoni ſubtendit, dempto vltimo.

Demon-



Demonſtratio.

SIt itaque vngula A B C, à cylindro recto ab-ſciſſa habens altitudinem Q B diametro baſeos A C parem: eius baſi inſcripta ſit figura regularis A D E F G C, & ducta ſit A G ad terminum vltimi lateris C G. Denique plana ponantur per latera polygoni quæ æquidiſtent axi cylindri exhibentia communes interſectiones cum ellipſi A B C rectas A M, M N, N O, O P, P C.

Dico plana hæc omnia ſimul ſumpta, nimirum A D M, D E N M, E F O N, F G P O & C G P, æquari rectangulo C A G.

Quod ſic oſtendo: Ex centro ducatur S Q normalis diametro, & à puncto Q ducatur in ſuperficie cylindricâ recta Q B, quę erit vngulæ altitudo, & ex hypotheſi æqualis diametro A C, iungatur deinde S B, ductis inſuper D H, E I, F K, G L normalibus ad A C, iunge H M, I N, K O, L P. Quoniam Q S, D H ſunt parallelę, itemque B Q, M D, anguli B Q S, M D H æquales [a] erunt. Rurſum quia Q S, Q B æquidiſtant D H, D M, plana S Q B, H D M ſunt [b] parallela, ergo earum ſectiones communes cum plano elliptico C B A, rectę nimirum B S, M H, ſunt [c] parallelæ. Cùm igitur Q S, B S æquidiſtent D H, M H, erunt anguli Q S B, D H M æquales, triangula igitur B S Q, M H D ſimilia ſunt. ergo vt B Q ad Q S, ita M D ad D H. ſed B Q ex hypotheſi par eſt diametro A C, adeoque dupla ſemidiametri Q S. Ergo & M D dupla eſt D H. Pari modo oſtendam rectas N E, O F, P G duplas eſſe rectarum E I, F K, G L. Prætereà quoniam cylindrus ex hypotheſi rectus eſt, à quo decuſſatur vngula, erunt M D, N E, O F, P G rectæ plano baſeos A Q C, adeoque per definitionem 3. vndecimi angulos rectos faciunt cum lineis A D, D E, E F, F G, G C. triangula ergo A D M, C G P rectangula ſunt, & plana D M N E, E N O F, F O P G, trapezia rectangula. Quoniam igitur M D, trianguli A D M eſt altitudo, eaque dupla eſt oſtenſa ipſius D H, erit triangulum A D M rectangulo ſub A D & D H æquale. Iam verò rectis E D, N M biſectis in T & V, iunctâque T V, rectam T V dimidiam eſſe ſummæ rectarum M D, N E; & rectangulum E D T V, æquari trapezio rectangulo M N E D in ſequenti, figuræ opportunitate vſi, demonſtrabimus. Quare cùm rectangulum ſub E D & M D, N E tanquam vnâ, quæ duplæ ſunt rectę T V, rectanguli E D T V duplum [d] ſit, erit quoque rectangulum ſub E D, & M D, N E tanquam vnâ, duplum plani M N E D. Quia autem rectæ M D, N E, oſtenſæ ſunt duplę rectarum D H, E I, rectangulum ſub E D, & M D, N E ſimul ſumptis duplum etiam eſt rectanguli ſub E D, & D H E I ſimul ſumptis. planum igitur M N E D æquatur rectangulo ſub D E, ſiue A D & D H, E I ſimul ſumptis. pari argumento oſtendam planum E N O F, æquari rectangulo ſub E F id eſt A D, & E I, F K; planum verò F O, P G rectangulo ſub F G, hoc eſt A D & F K, G L, triangulum denique G P C oſtendam rectangulo ſub G C, id eſt A D, & G L æquari, vt oſtendi ſupra triangulum A D M æquari rectangulo A D H. omnia igitur plana vngulæ inſcripta ſimul ſumpta æquantur omnibus rectangulis illis ſimul ſumptis, hoc eſt per Corollarium præcedentis rectangulo quod rectis C A, A G continetur. Quod erat demonſtrandum.

a 10. Vndec.

b 15. Vndec.

c 16. Vndec.

d 1. Sexti.

Corol-

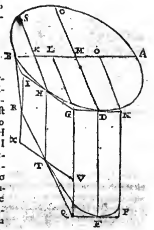
Corollarium.

QVod ſi plano ad axem cylindri parallelo, & tranſeunte per lineam G L diametro rectam abſciſſa ſit pars ſuperficiei cylindricæ, quæ vngulã cingit G P N A Q A, & arcui G E A ſubtendantur æquales rectæ quotcunque, ſecundùm quas plana inſcribantur vngularis ſuperficiei cylindricę ſegmento: eodem diſcurſu, quo iam vſi ſumus, demonſtrabimus per præcedentem omnia plana inſcripta ſimul ſumpta æquari rectangulo quod continetur rectis A L & C D, ſubtendente arcum D F C qui vnà cum arcu A D complet ſemicirculum.

PROPOSITIO XLII.

DAta ſit vngula A P B, à cylindro recto decuſſata, cuius D F altitudo ſit æqualis diametro A B, & cõſtituantur latera cuiuſcunque polygoni, circulum ambientia, ſcilicet B I, I H G, G D N, ſic vt primum B I tangat extremitatem diametri A B & reliqua in contactu biſecentur, & per hæc latera, plana conſtituantur axi parallela vngulam tangentia ſecundùm rectas H T, D F, quæ producant communes ſectiones cum baſi vngulari elliptica rectas B R, R Q, P Q: ſecent verò ſeſe mutuo ſecundùm rectas I R, G Q; factâ autem N D æquali ipſi F P iungatur N P, ducatur demum N O normalis ad A B.

Dico omnia plana vngulam ambientia, dempto triangulo B I R, æquari rectangulo, quod ſit ſub lineis A B, B O.

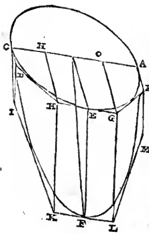


Demonſtratio.

EX punctis H & G, ducantur G L, H K S orthogonaliter ad A B: & ponatur per T parallela occurrens rectis G Q, I R in V & X. Quoniam ex hypotheſi, cylindrus, à quo abſciſſa eſt vngula, rectus eſt, patet T H rectam eſſe plano baſeos A D B. ergo per definit. 3. vndecimi T H normalis eſt ad G I. adeoque & V G, X I, ad G I ſunt rectæ: rectangulum igitur eſt G V X I, æquale ei, quod ſub T H, G I continetur. Atqui rectangulum G V X I æquale eſt plano G Q R I. cùm enim I G biſecetur in H, ex conſtruct. etiam X V, B Q biſectæ erunt, adeoque triangula B T X, V T Q æqualia; ſi igitur communi trapezio I B T V G addantur triangula V T Q, B T X, erunt planum I R Q G, & rectangulum I X V G æqualia; ergo & rectangulũ T H, G I plano G Q R I æquale eſt. Deinde in præcedenti demonſtratum eſt rectam T H duplam eſſe rectæ H K. Cùm igitur eiuſdem dupla ſit H S, pares erunt T H, H S. Rectangulum igitur S H G I æquatur rectangulo T H G I, hoc eſt, vt iam oſtendi, plano G Q R I. Atqui rectangulum S H G I æquatur[a] rectangulo ſub A B, B L. planum igitur G Q R I & rectangulum ſub A B, B L, æqualia ſunt. Simili planè diſcurſu oſtendam planum G Q P N æquari rectangulo ſub A B, L O; plana igitur vngulam ambientia ſimul ſumpta, dempto triangulo B R I, æquantur rectangulo A B O. Quod erat demonſtrandum.

a 37. huius

PROPOSITIO XLIII.



SInt AB, CD contingentes circulum AEC in terminis diametri AC, qui circulus baſis eſt vngulæ AEFC cylindro recto decuſſatæ, habentis altitudinem EF diametro AC parem: poſito deinde quocunque polygono BG, GH, HD circumdante circulum AEC, ſic vt eius latera in contactu biſecentur, planiſq; poſitis per lineas polygoni axi parallelis, quæ concurrentia cum plano elliptico vngulari AFC forment IK, KL, LM, communes interſectiones, ſecent verò ſeſe mutuo ſecundùm rectas DI, HK, GL, BM.

Dico hædras omnes DIKH, HKLG, GLMB, vngulam ambientes ſimul ſumptas excluſis triangulis ABM, CDI æquari quadrato AC.

Demonſtratio.

ESt enim in præcedenti demonſtratum rectangulo ACN æquari rectilineum DHKL. Ibidem oſtenſum eſt rectangulo AC, NO æquari rectilineum GHKL, & rectilineo BGLM æquari rectangulum ſuper AC & AO; igitur cùm rectangulis AC NC, ACNO, ACAO æquetur quadratum AC; etiam omnibus figuris rectilineis DHKI, GHKL, GBLM ſimul ſumptis æquatur quadratum AC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

DAtæ ſint binæ vngulæ à cylindris rectis decuſſatæ, quarum altitudines, ſint baſium circularium diametris pares, & ipſæ etiam baſes circulares æquales ſint. Circa vtrumque autem circulum polygona deſcribantur, ſed inæqualium numero laterum, circa vnum circulum exempli gratia polygonum decem laterum, circa alterum verò laterum mille: ponantur inſuper plana per latera polygonorum quę axibus æquidiſtent, concurrentia cum planis ellipticis vngulas terminantibus.

Dico omnia plana vnam vngulam ambientia ſimul ſumpta, æqualia eſſe planis ſimul ſumptis alteram circumdantibus, ſi triangularia vtrimque omittantur.

Demonſtratio.

a 43. huius. EX demonſtratis enim a conſtat congeriem planorum ſingulas vngulas ambientium, demptis triangulis æqualem eſſe quadrato circularis diametri quæ in baſi eſt vngulę, ex hypotheſi autem vngularum baſes, adeoque & diametri baſium æquales ſunt.

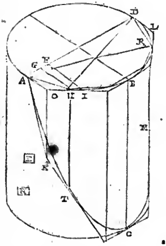
ſunt Igitur manifeſtum eſt plana ſimul omnia demptis triangulis, vnam vngulam ambientia, æqualia eſſe planis ſimul ſumptis quæ alteram ambiunt, demptis item triangulis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLV.

SVperficies cylindrica cuiuſuis vngulę à cylindro recto decuſſatæ, cuius altitudo par eſt diametro circuli qui baſis eſt vngulę, æqualis eſt quadrato diametri.

Demonſtratio.

SIt vngula A B C D, cuius altitudo B C, ſit æqualis A D diametro baſeos cylindri recti à quo decuſſata eſt.



Dico cylindricam ſuperficiem vngulæ, quadrato diametri A D æqualem eſſe. Si negas; ſit primò, ſi fieri poteſt, quadratum A D maius cylindrica ſuperficie quę vngulam ambit: exceſſus autem ſit planum E. Fiat ergo rectangulum D A F æquale plano E: & erigatur F I normaliter ad diametrum A D. Deinde polygonum aliquod regulare inſcribatur circulo A B D, cuius vltimum latus A H minus ſit ſubtenſâ arcus A I, & demittatur H G normalis ad A D diametrũ. Quia quadratum A D, 2. ſecundi, ſuperat rectangulum A D F rectangulo D A F, id eſt ex conſtr. E plano, quo eodem exceſſu quadratum A D ponitur ſuperare ſuperficiem cylindricam vngulæ, erit rectangulũ A D F, cylindricæ ſuperficiei vngulę æquale. ergo rectangulum A D G maius eſt cylindrica ſuperficie quę vngulam terminat. ergo rectangulum A D H eâdem multò eſt maius. ſed rectangulo A D H æqualia ſunt [a] plana omnia ſimul ſumpta quæ per latera polygoni inſcripti ducentur axi parallela terminata in elliptica baſi vngularis corporis. Igitur etiam illa plana maiora ſunt cylindrica ſuperficie quæ vngulam ambit, quod fieri nequit, cùm ſingula plana ſint minoris & latitudinis & longitudinis quàm ſingulę partes ſuperficiei cylindricæ quas decuſſarunt ab ipſa vngulari ſuperficie. Non igitur maius eſt quadratum A D cylindri ſuperficie quæ vngulam ambit.

a 41. huius.

Sit deinde, ſi fieri poteſt, quadratum A D minus eadem ſuperficie cylindricâ ambiente vngulam, & defectus ſit planum E. Erit ergo quadratum A D cum quantitate N quacunque, quæ minor ſit quàm E, adhuc minus vngulari ſuperficie quæ vngulam ambit. Circumſcribatur igitur aliquod polygonum circa circulum A B D tot laterum vt ductis per latera planis vngulam tangentibus, triangula remaneant A O K, D L M, quæ ſimul ſumpta æqualia ſint aut minora quantitate N; (quod aliquando futurum eſt, cùm multiplicatis in infinitum polygoni conſcripti lateribus triangulorum A O K, D L M, tum baſes A O, D L, tum altitudines O K, L M, fiant tandem dato minora) & plana ponantur ſecundùm latera huius polygoni quæ axi cylindrico æquidiſtent. Igitur quadratum A D ſimul cum triangulis A O K, D L M minus eſt cylindrica ſuperficie quę vngulam ambit. Atqui plana vngulam ambientia demptis triangulis, æquantur quadrato A D per præcedentem. ergo etiam illa vnà cum triangulis minora ſunt quàm ſuperficies cylindri, quæ vngulam cingit, quod ab-

 ſurdum

ſurdum eſt; nam omnia illa plana ſimul cum triangulis lateralibus cylindricam vngulæ ſuperficiem includunt. Quadratum igitur A D non eſt minus cylindrica vngulæ ſuperficie; quare cùm neque maius eſſe poſſe, ſuprà oſtenderimus, neceſſe eſt vt ſit æquale. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVI.

Data ſit vngula, qualis in præcedenti, ad cuius diametrum A D ductâ normali G H quâcunque, ex puncto H ponatur in ſuperficie cylindrica vngulæ recta H T.

Dico cylindricæ ſuperficiei vngulam cingentis partem H T C R D æqualem eſſe rectangulo A D G.

Demonſtratio.

Si negas, erit rectangulum A D G, vel maius vel minus ſuperficie H T C R D. ſit primò maius, & exceſſus ſit planum E. Arcui H B D inſcribe figuram æquilateram tot, adeoque tam paruis conſtantem lateribus, vt recta A R ſubtendens arcum R B A, qui cum arcu D R complet ſemicirculum, deficiat à diametro A D, quantitate minori datâ, adeoque vt rectangulum ſub A R & D G, ſuperetur à rectangulo ſub A D & D G, plano minori quàm E, quæ omnia ex elementis factu facillima. Quoniam ergo rectangulum A D G ſuperat rectangulum A R, D G plano minori quàm E, quo ſuperare ponitur ſuperficiem H T C R D, erit quoque rectangulum A R D G maius ſuperficie H T C R D. Atqui rectangulo A R D G æquantur
a Coroll. 41. huius. [a] plana, quæ ſecundùm latera figuræ æquilateræ inſcribuntur ſuperficiei H T C R D, ergo & plana illa inſcripta maiora ſunt ſuperficie H T C R D, cui inſcripta ſunt. quod eſt abſurdum. Non igitur rectangulũ A D G, eſt maius ſuperficie H T C M D.

Ponatur deinde rectangulum A D G minus eſſe ſuperficie H T C R D, defectus autem ſit planum E. circumſcribe arcui H B D figuram æquilateram tot laterum, vt ductis per illa planis ad cylindri axem parallelis vngulam tangentibus, poſtrema planum verſus D, quod eſt triangulare, minus ſit plano E. Quod neceſſariò futurum aliquando, eſt manifeſtum. igitur rectangulum A D G vna cum plano illo triangulari, adhuc minus erit ſuperficie H T C R D. ſed plura ſuperficiem H T C R D
b 42. huius. ambientia, dempto triangulo,[b] æquantur rectangulo A D G. ergo etiam plana ambientia vnà cum triangulo minora ſunt ſuperficie H T C R D, quam cingunt. quod eſt abſurdum. Non igitur rectangulum A D G minus eſt ſuperficie H T C R D, ſed neque maius eſſe oſtenſum eſt ſuprà. neceſſe igitur eſt vt eidem ſit æqualis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVII.

Data ſit vngula, qualis ſuprà, ductis deinde lineis M I, O N ad diametrum A D rectis, per has ponantur plana ad axem cylindri parallela, quæ in vngulæ ſuperficie efficiant rectas I K, N L.

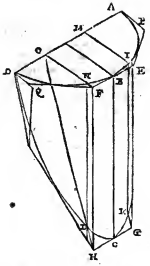
Dico ſegmentum ſuperficiei cylindricæ vngulã ambientis I B N L C K I, æquale eſſe rectangulo quod rectis A D, M O continetur.

Demon-

Digitized by Google

Demonſtratio.

Demonſtratum eſt ſegmentum ſuperficiei vngularis INDLKI æquari rectangulo ADM. Demonſtratū eſt item ſegmentum vngularis ſuperficiei NLD æquari rectangulo ADO. quare ſi ab æqualibus, ſuperficie nimirum INDLKI, & rectangulo ADM, tollantur æqualia, nimirum ſuperficies NLD, & rectangulum ADO, quæ remanent ſunt æqualia, ſuperficies nempe IBNLCKI, & rectangulum ADMO. Quod erat demonſtrandum.



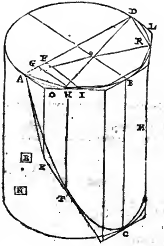
846. huius.

PROPOSITIO XLVIII.

Omnia plana vngulam ambientia, & ad ellipticam vngulæ baſim terminata demptis triangulis lateralibus, ſuperficiei cylindricæ, quæ vngulam cingit, æqualia ſunt ſimul ſumpta.

Demonſtratio.

Omnia enim illa plana ſimul ſumpta, demptis triangulis, æquantur per 43. huius quadrato diametri AD. Atqui eidem quadrato æquatur ſuperficies cylindrica quæ vngulam cingit. Ergo omnia plana vngulam ambientia ſimul ſumpta, demptis triangulis, æquantur ſuperficiei cylindricę quæ cingit vngulam. Quod erat demonſtrandum.



Corollarium.

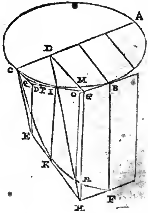
Similiter demonſtrabimus omnia plano dempto, triangulo laterali vngulæ ſegmentum HTCRD ambientia, æqualia eſſe ſuperficiei HTCRD: tam enim plana ambientia dempto triangulo, quàm ſuperficies, æquantur rectangulo ADG.

PROPOSITIO XLIX.

DAta ſit vngula, qualis ſuprà, quam ad extremitatem diametri contingat planum, triangulare DCE, ſecans planum ellipticum AFNC ſecundùm rectam CE, contingat autem eandem vngulam & alterum planum DENO ſecūdùm rectam IK, ſecans planum DCE rectâ DE, planum verò ellipticum AFNC rectâ HKE. Ponatur denique per rectam aliquam LG normalem diametro, planum axi æquidiſtans, producens in ſuperficie vngulari rectam MN, ſecans verò planum ODEN ſecundùm rectam GH.

Dico planum contingens ODEN, æquale eſſe ſuperficiei vngulari cylindricæ MCEN.

Demonſtratio.



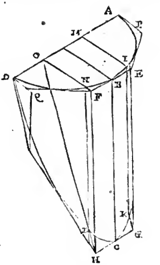
DEmonſtratum eſt in 42.huius,contingens planum ODEN eſſe æquale rectangulo quod lineis AC,LC continetur.Rurſum per 46.huius ſuperficies cylindrica MCEN, quę ſegmentum vngulare cingit, æquatur rectangulo ſub iiſdem lineis AC,LC comprehenſo. Ergo planum contingens ODEN ſuperficiei cylindricæ MCEN vngulare ſegmentum ambienti æquale eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO L.

DAta ſit vngula, qualis ſuprà, quam contingat planum aliquod ſecundùm rectam BC: ponantur autem bina plana axi parallela per rectas MI, ON diametro normales, ſecantia planum contingens ſecundùm rectas FH, EG; ſuperficiem verò vngularem ſecundùm rectas IK, NL.

Dico

Dico planum contingens EFHG æquale eſſe ſuperficiei vngulari cylindricæ IBNLCK.



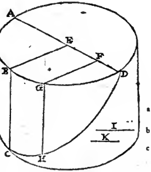
Demonſtratio.

Demonſtratum eſt in 42. huius planum contingens EFHG æquale eſſe rectangulo quod lineis AD, MO continetur. Atqui demonſtratum etiam eſt propoſitione 47. ſuperficiem IBNLCK æqualem eſſe eidem rectangulo ſub lineis AD, MO comprehenſo. ergo planum contingens EFHG ſuperficiei IBNLCK æquale eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LI.

Vngularem ſuperficiem cylindricam ſecundùm datam rationem partiri.

Conſtructio & demonſtratio.



Sit vngularis ſuperficies ABCD diuidenda ſecundùm rationem datam I ad K. fiat vt I ad K, ita AD ad DF, vel ita AD ad FE, & ſecundùm FG, EB perpendiculares ad diametrum, ducantur plana axi cylindri parallela exhibentia communes ſectiones in ſuperficie cylindri vngulari rectas BCGH. Dico ſuperficiem vngulę ABCD ad partem GHD, vel ad partem BGHC eandem habere proportionem quam habet I ad K. Demonſtratum eſt enim [a] rectangulo ADF æqualem eſſe vngulę ſuperficiem GHD. Demonſtratum quoque eſt [b] rectangulo AD, EF æqualem eſſe ſuperficiem BGHC. Demonſtratum quoque eſt [c] toti vngulari ſuperficiei æquale eſſe quadratum AD. Cùm igitur 1. ſexti ſit vt AD ad DF, vel EF, ita quadratum AD ad rectangulum ADF, vel AD, FE, erit quoque vt AD ad DF, vel FE (hoc eſt vt I ad K,) ita ſuperficies vngularis tota ad partem GHD vel GHCB. præſtitimus igitur quod petebatur.

a 46. huius.
b 47. huius.
c 45. huius.

PROPOSITIO LII.

Secetur vngula ABC, cuius altitudo par ſit diametro baſis planis quotcunque axi æquidiſtantibus & rectis ad diametrum DC.

Dico ſuperficies vngulares planis illis interceptas eandem inter ſe ſortiri rationem quam partes diametri DC.

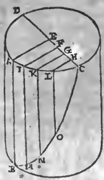
Demon-

Demonſtratio.

a 46. huius.

b 47. huius.

c 1. Sexti.



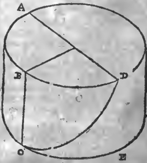
DEmonſtratum enim eſt a rectangulum ſub D C & D E, æquale eſſe ſuperficiei vngulari A B D. Demonſtratum item eſt rectangulum ſub D C & EF, æquari ſuperficiei A I M B. oſtenſum b quoque eſt rectangulum D C, F G æquari ſuperficiei I M N K, & rectangulū D C, G H æquale exiſtere ſuperficiei K N O L. rectangulum denique ſuper D C & H C, æquale eſſe ſuperficiei C L O. patet igitur totam vngulæ ſuperficiem diuiſam eſſe ſecundùm partes diametri D C, cùm quadratum D C, ſit diuiſum in rectangula quæ c ſortiuntur eandem rationem quam partes lineæ D C.

PROPOSITIO LIII.

CYlindrus rectus A B D E, cuius altitudo par ſit diametro baſis A D, ſecetur per A D plano exhibente ſectionem vngularem A B C D.

Dico ſuperficiem vngularem ad cylindricam, eam obtinere rationem, quam diameter circuli ad perimetrum.

Demonſtratio.



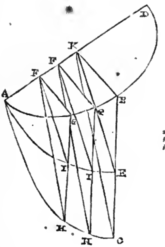
SVperficies cylindri recti A E æqualis eſt rectangulo contento ſub B C, hoc eſt D A, & ſub toto perimetro circuli A B D: quod eodem fere diſcurſu probabitur. quo demonſtrauit Archimedes triangulum cuius altitudo eſt ſemidiameter, baſis verò, circumferentia, æquari circulo. ſed quadratum D A eſt ad rectangulum contentum ſub D A, & perimetro circuli, vt D A eſt ad perimetrum circuli. Ergo & quadratum D A, hoc eſt per 45. curua ſuperficies vngulæ A C D, eſt ad cylindri ſuperficiem vt diameter D A eſt ad perimetrum circuli A B D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LIV.

VNgula A B C D cuius altitudo B C, ſecetur plano per A D & quodlibet punctum E in recta B C.

Dico

Dico vngularē ſuperficiem A B C D ad ſuperficiem A B E D eandem habere rationem cum recta B C ad B E.



Demonſtratio.

POnantur quotuis K B, F G normales ad A D, per quas fiant ſectiones axi parallelæ K B C, F G H occurrentes plano D E A ſecundùm rectas K E, F I, & plano D C A ſecundùm rectas F H, F H, K C. erunt ergo omnia triangula C B K, H G F, æquiangula [a] inter ſe. Similiter omnia triangula, E B K, I G F æquiangula erunt. ergo C B, H G, H G, ſunt rectis B K, G F, G F proportionales: & E B, I G, I G, ſunt ijſdem B K, G F, G F proportionales. ergo C B, H G, H G ſunt proportionales ipſis E B, I G, I G; ergo ſingula plana quæ ſubtendunt ſuperficies B C H G, G H H G proportionalia ſunt planis ſingulis, quæ ſubtendunt ſuperficies B E I G, G I I G. Ergo 12. quiuti, vt planum ſubtendens ſuperficiem B C H G ad planum ſubtendens ſuperficiem B E I G, hoc ēſt vt B C ad B E, ſic omnia plana ſimul ſumpta quæ ſubtenduntur ſiue inſcribuntur ſuperficiei vngulari B C H A ad omnia plana ſimul ſumpta quæ ſubtenduntur ſeu inſcribuntur ſuperficiei vngulari B E I A. Cùm igitur pari argumento poſſimus oſtendere aggregata planorum vtrique ſuperficiei vngulari iuxta quamcunque multiplicationem inſcriptorum ſemper inter ſe eandem ſeruare rationem quam B C habet ad B E, planaque illa deficiant tandem à ſuperficiebus vngularibus quantitate quacunque datâ minori: Manifeſtum eſt ipſas quoque vngulares ſuperficies, eandem inter ſe rationem habere, quam B C habet ad B E. Quam conſequentiam ſecundùm rigorem Geometricum facilè probabit Lector Geometra, ſi adhibeat eam demonſtrandi formam quâ varijs locis huius operis vſi ſumus, vel diſcurſus ab Archimede & Euclide paſſim vſurpatos.

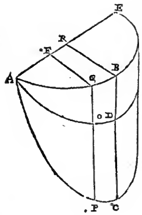
[a] Demonſtratum eſt in 41 huius.

PROPOSITIO LV.

CViuſcunque vngulæ ſuperficies, ſiue altitudinem parem habeat diametro baſeos ſiue non, æqualis eſt rectangulo, quod diametro baſeos (A E) & ipſius vngulæ altitudine (B D) continetur.

Demonſtratio.

a 54. huius.



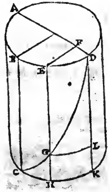
SVmatur BC æqualis diametro AE, & plano per puncta E, A, C ducto ab eodem cylindro decuſſetur vngula EBCA. Cùm oſtenſum [a] ſit ſuperficiem ABCE ad ſuperficiem ABDE, eam rationem continere quę eſt inter lineas BC & BD; etiam inter quadratum AE quod per 45. huius par eſt ſuperficiei ABCE, & ſuperficiem ABDE, intercedet ratio BC ad BD, hoc eſt ex hypotheſi AE ad BD. ſed vt AE ad BD, ſic eſt quadratum AE ad rectangulum rectis AE & BD, comprehenſum; ergo quadratum AE, ad ſuperficiem EBDA & rectangulum AEBD eandem habet rationem. igitur rectangulum AEBD, æquale eſt ſuperficiei vngulari EBDA. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

PAri argumento probabimus, ſi vngula quæuis planis ſecetur ſecundùm rectas BR, GF, diametro normales, ſuperficiem vngularem GOA æqualem eſſe rectangulo quod diametri baſeos parte FA, & vngulæ altitudine BD continetur; item ſuperficiem BDOG æquari rectangulo facto ex RF & BD.

Poſitâ enim rurſus vngulâ ACE, cuius altitudo BC par ſit diametro AE. Erit
b 46. huius. ſuperficies GPA æqualis rectangulo [b] FAE. ergo rectangulum FAE eſt ad ſuperficiem GOA, vt ſuperficies GPA ad ſuperficiem GOA, hoc eſt vt CB ad DB, per 54. hoc eſt, ex conſtr. vt EA ad BD, hoc eſt vt ipſum rurſus rectangulum FA, AE ad rectangulum FA, BD. cùm igitur rectangulum FA, AE ad ſuperficiem GOA, eandem habeat rationem quam ad rectangulum FA, BD, erit hoc ſuperficiei GOA æquale. Eadem eſt ſecundi demonſtratio.

PROPOSITIO LVI.



DAtus ſit cylindrus ABCKD, cuius altitudo DK par diametro baſeos AD, ab hoc abſciſſa ſit vngula ABCD eiuſdem altitudinis; ductâ deinde rectâ FE quæ ſit perpendicularis ad AD, ſecundùm FE fiat ſectio axi parallela quæ communem interſectionem cum ſuperficie cylindri exhibeat lineam EGH.

Dico ſuperficiem vngulæ EGD ad ſuperficiem EHKD, eam habere proportionem quæ eſt inter rectam FD & ED curuam.

Demonſtratio.

c 46. huius.

OStendimus [c] ſuperficiei vngulari EGD æquari rectangulum ADF, ſiue FDK: eſt autem rectangulum

Digitized by Google

gulum FDK ad ſuperficiem EDKH, vt recta FD eſt ad curuam [a] DE. igitur etiam pars ſuperficiei vngularis EGD ad cylindricam EDKH eſt vt FD recta ad curuam ED. Quod fuit demonſtrandum,

a Demonſtratur hoc ſimili fere diſcurſu quo Archimedes vſus eſt prop. 1. de dimenſ. circuli.

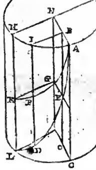
PROPOSITIO LVII.

Datus ſit cylindrus NL altitudinem habens AC patem diametro. Ponantur in plano per axem ducto rectangula BAC, BEG æqualia inter ſe, ſitq́; vngula ALH ſecta plano BID, quod ſit ad AN diametrum normaliter conſtitutum & axi æquidiſtans. Factâ deinde HK, æquali BE per AN & K punctum, fiat ſectio vngularis AFK.

Dico AID ſuperficiem vngularem æqualem eſſe vngulari ſuperficiei IFKH.

Demonſtratio.

Eſt enim ſuperficies vngularis HIFK ad ſuperficiem HIDL, vt HK ad [b] HL. ſed demonſtratum eſt [c] DIHL ſuperficiem æqualem eſſe rectangulo ſuper BN, & diametro baſeos, hoc eſt rectangulo NBO, igitur vt eſt HK ad HL, ita eſt HIFK vngularis ſuperficies ad rectangulum NBO. ſed vt HK ad HL, hoc eſt, quia BE eſt ex hypotheſi æqualis HK, vt BE ad HL, ſiue BO, ita quoque rectangulum NBE ad NBO rectangulum. igitur rectangulum NBE ad NBO, rectangulum eſt vt ſuperficies vngularis HIFK ad rectangulum NBO. Rectangulo igitur NBE æqualis eſt ſuperficies vngularis HIFK: eſt autem ex ſuppoſitione rectangulum NE æquale BAC, rectaugulo. Igitur HIFK vngularis ſuperficies rectangulo BAC, æqualis eſt. atqui oſtenſum eſt [d] rectangulo ſub BA & diametro, hoc eſt ex hypotheſi rectangulo BAC, æqualem eſſe ſuperficiem vngulatem AID. eſt itaque ſuperficies AID vngulatis æqualis HIFK ſuperficiei. Quod fuit demonſtrandum.



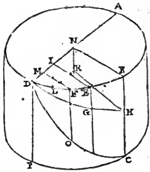
b 54. huius.
c 47. huius.
d 46 huius.

PROPOSITIO LVIII.

Data ſit vngula ABCD cuius altitudo BC par ſit diametro AD, & arcus BE in ſemicirculo ABD.

Oporteat ſuper arcu BE ſuperficiem exhibere vngularem quæ ſit æqualis vngulari ſuperficiei datæ FOD.

Conſtructio & demonſtratio.



a 47.huius.

b 54.huius.

Flant E I, F M normales ad diametrum A D, & ex cylindri axe abſcinde rectam N K, vt rectangulum K N I æquale ſit rectãgulo A D M: ductâ deinde K H quæ æquidiſtet N B, fiat ſectio per A D lineam & H punctum, & demittatur E G quæ æquidiſtet B H. Dico ſuperficiem H G E B æqualem eſſe ſuperficiei F O D. Eſt enim ſuperficies C B E æqualis rectangulo [a] A D N I, hoc eſt N I B C, ſed vt ſuperficies E B C ad E B H, ita eſt B C linea [b] ad lineam B H, hoc eſt rectangulum B C, N I ad B H, N I rectangulum. Igitur etiam rectangulum B H, N I, hoc eſt rectangulum K N, N I æquale eſt ſuperficiei vngulari E B H. ſed rectangulum A D M rectangulo K N I æquale eſt ex conſtructione. Igitur rectangulum A D M æquale eſt ſuperficiei E B H. Atqui etiam ſuperficies vngularis D F O æqualis eſt rectangulo [c] A D M. Igitur etiam ſuperficies D E O vngulari ſuperficiei E B H ſuper arcu B E conſtituta eſt æqualis. Præſtitimus ergo quod optabatur.

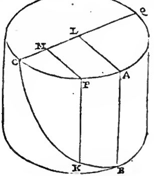
c 46.huius.

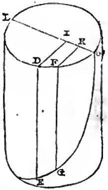
PROPOSITIO LIX.

Sint duæ vngulæ C B Q, L E O, quarum altitudines diametris baſium ſint pares. ſecentur autem planis axi parallelis perpendiculariter ad diametros, ſcilicet planis L A B, M P K, I D E, K F G.

Dico ſuperficies his planis contentas, habere rationem compoſitam ex ratione diametri C Q ad L O diametrum, & ex ratione M L ad K I.

Demonſtratio.



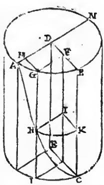


d 47.huius.

Demonſtratum eſt [d] ſuperficiem vngularem A B K P eſſe rectangulo C Q L M æqualem. oſtenſum quoque eſt rectangulo L O I K æquari ſuperficiem D E G F, ſed

ſed rectangulum C Q M L ad rectangulum L O I K; habet rationem compoſitam ex C Q ad L O, & ex ratione M L ad I K. Igitur etiam ſuperficies vngulares illis rectangulis æquales ex iiſdem rationibus ſunt compoſitæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LX.



VNgula, cuius altitudo par diametro baſeos, ſecetur plano F G H L quod axi æquidiſtet & rectæ A N, exhibens communem interſectionem cum baſi elliptica A H C rectam H I, & per H I planum ponatur H I K quod baſi A B N æquidiſtet.

Dico eodem exceſſu ſuperare ſuperficiem cylindricam B G H K ſuperficiem rectãguli F G H, quo ſuperficies rectanguli I H L excedit vngularem H K C.

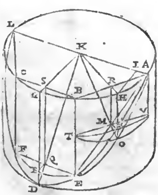
Demonſtratio.

OStenſum eſt a ſuperficiem vngularem B G H C æqualem eſſe rectangulo A N M D, hoc eſt quoniam altitudo vngulæ ponitur par diametro A N, rectangulo F G L. Igitur Arithmeticè proportionales ſunt ſuperficies B G H K, rectangulum F G H, rectangulum I H L, & ſuperficies H K C. Quod erat demonſtrandum.

a 47 *huius.*

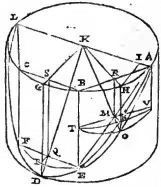
PROPOSITIO LXI.

SVbtendant A B, B C æquales arcus in baſi vngulari A B L, & ſecundùm rectas A B, B C ducantur plana A B E, B E F C, quarum communes interſectiones cum baſi elliptica A E D L ſint rectę A E, E F; & ſecundùm has lineas plana ponantur quæ recta ſint ad plana A B E, B E F C exhibentia communes ſectiones cum ſuperficie vngulari cylindrica arcus A N E, E P F.



Dico ſuperficies vngulares A O E B, B E D F C proportionales diuiſas eſſe, hoc eſt eandem rationem eſſe ſuperficiei A N E B ad B E F C ſuperficiem, qualis eſt ſuperficiei A N E O A ad ſuperficiem E P F D E.

Demonſtratio.



Flant plana KGD, KHO diuidentia rectas BC, AB bifariam, & exhibentia lineas GD, HO in ſuperficie cylindriea, rectas verò SQ, RM in planis, CBEF, ABE. Deindeex Q & M, lineæ ducantur QP, MN, quæ æquidiſtent rectis KG, KH, & ſecundùm lineam NM, planum ponatur baſi AGL vngulari æquidiſtans exhibens in ſuperficie cylindriea arcũ TNV. Denique ponatnr in plano ABE per punctum M recta VMT patallela AB, & fiae ſectio per VT, & baſeos centrum K producens vngulam, ex qua abſcindetur plano ABTNV ſegmentũ vngulare AVOTB: quia KG eſt ad KS, vt KH ad KR, & vt KG ad KS, ita GD eſt ad SQ, vtq; KH eſt ad KR, ſic HO eſt ad RM, erit quoque vt GD ad SQ, hoc eſt GP, ſic HO ad RM, hoc eſt HN. ſed quia arcus AB, BC ęquales sũt, vt GP ad HN, ita eſt ſuperficies cylindtica BEPFC ad ſuperficiẽ AVNTB, & vt GD ad HO, ita eſt ſuperficies vngularis BEDFC ad vngularẽ AVOTB. Igitut vt ſuperficies BEPFC ad BEDFC, ita ſuperficies AVNTB ad ſuperficiem AVOTB, & conſequenter vt eſt ſuperficies BEPFC ad reſiduam EPFDE, ita ſuperficies AVNTB ad reſiduam VNTOV; eſt autem tota ſuperficies AVOTB æqualis ſuperficiei AOEB, & ſuperficies AVNT æqualis ſuperficiei ANEB. Igitur vt BEPFC ad reſiduam EPFDE, ita ſuperficies ANEB ad reſiduam ANEOA. Quod fuit demonſtrandum.

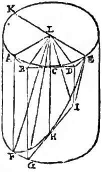
254. huius.

PROPOSITIO LXII.

Data ſit vngula EFK à cylindro recto decuſſata altitudinem AF æqualem habens diametro baſis KE, circumdent autem vngulam plana tangentia EDI, IDCH, &c. terminata in plano elliptico EIFK producto, erunt plana illa omnia quadrilatera, præter duo plana contingentia terminos diametri E & K, quæ ſunt triangula.

Dico corpus includens vngulam contentum planis ambientibus, & polygonis duobus, ſemicirculo EAK & ſemiellipſi EIFK conſcriptis, mulctatum duabus pyramidibus, quarum baſes ſunt triangula lateralia, altitudo ſemidiameter LK, æquale eſſe pyramidi quę baſim habet quadratum diametri KE, & altitudinem LK ſemidiametrum.

Demonſtratio.



AD punctum A in quo B A contingit peripheriam baſis K A E, ducatur ex centro recta L A. Quoniam ex hypotheſi rectus eſt cylindrus, F A cylindri latus ad baſim K A E rectum erit. ergo L A ad F A, normalis eſt. Eſt verò L A [a] etiam normalis ad B A. Ergo L A ad planum tangens B G F A recta [b] eſt. ergo L A ſemidiameter baſeos eſt altitudo pyramidis B G F A L. Eodem modo demonſtrabitur ſemidiametrum baſeos cōmunem eſſe altitudinem omnium pyramidum, quarum baſes ſunt plana vngulam tangentia, apex verò centrum L. cùm ergo pyramides æquè altæ, ſint vt baſes, erunt omnes illæ pyramides quæ ſolidum vngulam includens componũt ad pyramidem cuius baſis eſt quadratum K E, altitudo ſemidiameter L K ſiue L A, vt omnia plana ambientia vngulam, ad quadratum K E. ſed omnia plana ambientia, demptis duobus triangulis lateralibus, æquantur [c] quadrato K E. Ergo omnes illæ pyramides, demptis duabus lateralibus, hoc eſt totum corpus vngulam includens, mulctatum duabus lateralibus pyramidibus, æquatur pyramidi cuius baſis eſt quadratum K E, altitudo ſemidiameter L K. Quod erat demonſtrandum.

a 18. Tertij.
b 4. Vndec.
c 43. huius.

PROPOSITIO LXIII.

DAtæ ſint binæ vngulæ æquales ac ſimiles à cylindris rectis abſciſſæ, quarum altitudines ſint baſium diametris pares. Circumſcribantur autem vtriſq; corpora iuxta ſenſum propoſitionis præcedentis, ſic vt eorum ſuperficies diuerſum planorum tangentium numerum complectantur; vnius, exempli gratia, ſuperficies contineat decem plana tangentia, alterius mille:

Dico vtraque illa corpora vngulas includentia, mulctata pyramidibus lateralibus ſemper eſſe æqualia.

Demonſtratio

EX præcedenti eſt manifeſta, ſingula enim æquantur pyramidi cuius baſis eſt quadratum diametri baſeos vngulæ, altitudo autem ſemidiameter eiuſdem baſeos.

PROPOSITIO LXIV.

DAtæ ſint binæ vngulę à cylindris rectis reſectæ, quarum altitudines ſint diametris baſium æquales, baſes autem ſint qualeſcunque, ſiue æquales nimirum ſiue inæquales.

Dico corpora vngulas continentia mulctata lateralibus pyramidibus triplicatam inter ſe habere rationem diametrorum baſium vngularium.

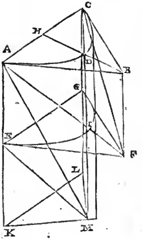
Demonſtratio.

DEmonſtratum enim eſt, [d] corpora illa æquari pyramidibus quę baſes habent æquales quadratis diametrorum vngularium baſium, & altitudines ſemidiametris pares. Igitur quam rationem habebunt pyramides illæ, eandem quoque habebunt corpora

d 61. huius.

corpora vngulas continentia. ſed ratio pyramidum eſt compoſita ex ratione quadrati baſeos ad quadratum baſeos, hoc eſt ex duplicata ratione diametri ad diametrum, & ex ratione ſemidiametri ad ſemidiametrum, quæ eadem eſt cum ratione diametri ad diametrum, ac proinde triplicata eſt rationis diametri ad diametrum. ergo etiam corpora quæ vngulas continent ſunt in triplicata ratione diametrorum baſium vngularium. quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO LXV.



CYlindro parabolico recto CDAEI G conſcriptum ſit priſma, cuius latera BA, BC, FG, FE tangant parabolas quæ ſunt baſes cylindri.

Dico pyramidem cuius baſis rectangulum ſub CA, ordinatim poſitâ & duplâ altitudinis cylindri parabolici, altitudo verò axis ipſe HD, cylindro parabolico eſſe æqualem.

Demonſtratio.

SVmatur AK dupla ipſius AE, quæ eſt altitudo cylindri dati. Eſt demonſtratum libro de parabola a triangulum ABC eſſe ſeſquialterum parabolę ADC. vnde etiam priſma ACBFE eſt ſeſquialterũ cylindri parabolici ADCIGE. poſito deinde plano per CA & F: erit priſma ACBFEG triplum b pyramidis cuius baſis ACB, vertex F, ac proinde ſeſquialterum quoque eſt partis reliquæ, quæ eſt pyramis baſim habens CAEG, verticem F. ergo pyramis CAEG, F, æquatur cylindro parabolico. ſed pyramidis CAEG, F, altitudo eſt HDB, quæ c dupla eſt axeos parabolæ HD. ergo pyramis CAEG, F, d æqualis eſt pyramidi, cuius altitudo ſit HD dimidia prioris altitudinis HB, baſis verò rectangulum CAK quod ex conſtructione duplum eſt baſeos prioris CAEG. Atqui pyramis, cuius altitudo eſt HD, baſis verò rectangulum CAK, eſt illa ipſa pyramis de qua agit aſſertio, cuius nimirum altitudo ſit axis HD, baſis verò rectangulum, quod ſub CA ordinatim poſita & dupla altitudinis cylindri parabolici continetur. Manifeſta igitur eſt veritas Theorematis.

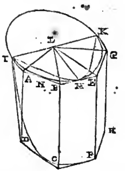
a Ex propoſ. 237.
b 7. duodec.
c 17. Parab.
d 9. duodec.

PROPOSITIO LXVI.

SIt vngula KHI à cylindro recto abſciſſa, altitudinem habens parem diametro baſis KI, quàm cingant plana tangentia IAD, BACD, &c.

Dico corpus vngulam includens, quod planis tangentibus & duobus polygonis, ſemicirculum KMI, & ſemiellipſim IHK ambientibus continetur, mulctatum duabus lateralibus pyramidibus hoc eſt ſolidum GLADFH, æquale eſſe vngulæ.

Demonſtratio.



ERecta ex centro LM normali ad KI diametrum, inſcribatur ſemicirculo qui eſt baſis vngulæ parabola KMI axem habens LM. Demonſtratum eſt a cylindro parabolico habenti baſim parabolam KMI & altitudinem ſemidiametri LM æquari vngulam ſuper baſi ſemicirculari INMK, & altitudine diametri KI. ſed etiam præcedenti propoſitione oſtenſum eſt eidem cylindro parabolico æquari pyramidē cuius altitudo ſit LM, baſis verò rectangulum quod ſub KI & dupla altitudinis cylindri parabolici, ſub dupla nempe ipſius LM, hoc eſt rurſum ſub KI, continetur. ergo pyramis, cuius altitudo eſt ſemidiameter LM, baſis verò quadratum diametri KI, æquatur cylindro parabolico, hoc eſt vt iam oſtendi, æquatur vngulæ. ſed etiam corpus LGHFCDAL b æquatur pyramidi cuius baſis ſit æqualis quadrato KI & altitudo ſit LM. ergo corpus LGHFCDAL æquale eſt vngulari magnitudini. Quod fuit demonſtrandum.

a Vide 3. huius.

b 62. huius.

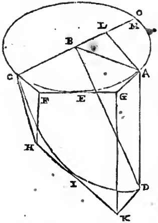
PARS QVARTA.

Comparatio vngulæ cylindricæ cum ſphæra & alijs corporibus.

HAc parte maximè intendimus ſymbolizationes vngulæ cylindricæ cum ſphæra notas reddere, tanta enim eſt ſimilitudo inter vngulam & ſphærā, vt omnes ſphæræ proprietates, vngulæ communes ſint, quemadmodum ex ijs quę deinceps demonſtraturi ſumus cognoſci poterit.

PROPOSITIO LXVII.

DAta ſit vngula CDM à cylindro recto abſciſſa, altitudinem parem habens diametro baſeos CM, ex hac reſectum ſit BADC ſegmentum plano per axem cylindri tranſeunte, cuius communis ſectio cum baſi elliptica ſit recta BD. Circumſcribatur autem polygonum CFEGA arcui AEC, & ſecundùm latera polygoni fiant plana axi parallela quæ exhibeant in plano elliptico cōmunes ſectiones CH, HK, KD, & ponatur AL contingenti CF, æquidiſtans ſiue normalis diametro CM.



Dico corpus C F H K D A B, maius eſſe pyramide quæ fit ſub baſi rectangula M C L in altitudine B C.

Demonſtratio.

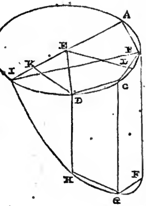
Corpus CFHKDAB eſt æquale pyramidi ſub baſi quæ ſit æqualis ſuperficiebus CFH, KGFH, KGAD & ſub altitudine BC, vt paret ex diſcurſu 62. huius, ſed ſuperficies CFH, KGFH, KGAD maiores ſunt rectangulo MCL, vt patet ex 42. huius. ergo pyramis, cuius baſis rectangulum MCL, altitudo verò BC, minor eſt pyramide, cuius baſis ſunt plana prædicta & altitudo BC, adeoque etiam minor eſt corpore CFHKDAB. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

Data ſit vngula qualis in præcedenti A G I, & ſegmentum eodem modo decuſſatum E D H F A, ſi inſcribatur polygonum A B C D regulare qualecunque circulari ſegmento baſeos A E D, & ſecundùm latera polygoni plana ponantur axi parallela quarum communes interſectiones cum plano elliptico ſint A F, F G, G H; ponaturque D K normalis ad A I.

Dico corpus inſcriptum vngulæ minus eſſe pyramide quæ baſim habeat æqualem rectangulo I A K, altitudinem verò A E, ſemidiametrum.

Demonſtratio.



Ducatur enim E L quæ ſit normalis ad aliquod latus polygoni, verbi gratia, B C, cũ rectus ex hypotheſi cylindrus ſit, facilè demõſtrabitur E L cõmunẽ eſſe altitudinẽ pyramidũ, in quas corpus inſcriptum A B F G H D E, reſolui poteſt. erit ergo pyramis cuius baſis ſit æqualis ſuperficiebus A B F, B C G F, C D H G, altitudo autem E L, æquale inſcripto corpori A B F G H D E vngulari. ſunt autem plana A B F, B C G F, C D H G æqualia a rectangulo ex I B, A K. ergo pyramis cuius baſis eſt rectangulum I B, A K, altitudo E L, æquatur etiam corpori inſcripto A B F G H D E. pyramis verò ſub baſi rectangula I A K, & altitudine A E habet baſim maiorem quàm ſit rectangulum I B, A K, & habet altitudinem A E maiorem altitudine E L; igitur pyramis ſub baſi rectangula I B, A K, & altitudine E L, minor eſt pyramide cuius baſis eſt rectangulum I A K, altitudo autem A E. ergo & corpus A B F G H D E inſcriptum vngulæ minus eſt pyramide habente baſim rectangulum I A K, & altitudinem A E ſemidiametrum. Quod erat demonſtrandum.

a Coroll. 41. huius.

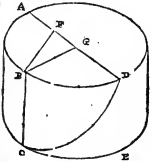
PRO-

PROPOSITIO LXIX.

Data ſit vngula A C D, à cylindro recto decuſſata, habens altitudinem diametro baſeos æqualem, à qua abſciſſum ſit ſegmentum G B C D, plano per axem cylindri tranſeunte. Ex puncto autem B ducta ſit B F normalis ad diametrum A D.

Dico ſegmentum vngulare G B C D æquale eſſe pyramidi cuius baſis eſt rectangulum A D F, & altitudo ſemidiameter G D.

Demonſtratio.



Pyramis enim illa nec maior eſt nec minor ſegmento vngulari. ſit enim, ſi fieri poteſt, primò minor, per 6. huius inſcribi poteſt ſegmento vngulari G B C D ſolidum, quod deficiat à ſegmento quantitate minori datâ, adeoque etiam minori quàm pyramis ponatur deficere à ſegmento G B C D. ſolidum igitur inſcriptum ſegmento G B C D, maius erit pyramide cuius baſis eſt rectangulum A D F, & altitudo G D. Quod repugnat præcedenti. Non igitur pyramis minor eſt ſegmento G B C D.

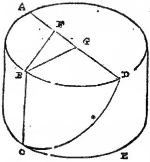
Ponatur deinde, ſi fieri poteſt, pyramis eſſe maior ſegmento G B C D. Cylindro cuius pars eſt vngula, conſcribatur ſolidum ſuperans cylindrum quantitate datâ minori, quod præſtat Euclid. prop. 10. 12. erit pars ſolidi cylindro conſcripti, etiam conſcripta vngulæ, cuius exceſſus ſupra vngulam erit pars exceſſus quo ſolidum cylindro conſcriptum ſuperat cylindrum. Quare cùm exceſſus ſolidi conſcripti cylindro ſuprà cylindrum ſit dato minor, erit à fortiori exceſſus ſolidi vngulæ conſcripti ſuprà vngulam dato minor, ac proinde etiam minor exceſſu quo pyramis ponitur ſuperare vngulam. Ergo ſolidum vngulæ conſcriptum minus eſt pyramide. Quod repugnat 67. huius. Non igitur pyramis maior eſt vngula. Quare cùm neque minorem eſſe probatum ſit ſuprà, æqualis erit. Quod fuit demonſtrandum.

Analogia cum ſphæra.

Prima hic elucet inter ſphæram & vngulam ſimilitudo. Demonſtrauit Archimedes propoſ. 38. libri primi de ſphæra & cylind. ſegmento ſphæræ æqualem eſſe conum cuius baſis eſt æqualis ſuperficiei ſegmenti, altitudo ſemidiameter ſphæræ. ſimiliter & nos iam demonſtrauimus ſegmentum decuſſatum ab vngula plano per cylindri axem tranſeunte æquale eſſe pyramidi cuius baſis eſt rectangulum A D F, (quod per 46. huius æquatur ſuperficiei vngularis ſegmenti D C B) altitudo autem æqualis ſemidiametro G D.

PROPOSITIO LXX.

Ex præcedenti Theoremate aliter demonſtrabimus propoſition. 24. cuius hæc eſt aſſertio. Omnis vngula à cylindro recto abſciſſa, altitudinem habens parem diametro baſeos (A D) æquatur pyramidi cuius baſis eſt quadratum diametri (A D) altitudo autem ſemidiameter (G D.)



Demonſtratio.

VNgula ACD plano per axem cylindri tranſeunte, diuidatur in duo ſegmenta GBCD, GBCA; ducaturq; BF ad AD, perpẽdicularis; per præced. erunt ſegmẽta illa æqualia duabus pyramidibus, quarũ baſes ſunt duo rectangula ADF, DAF, altitudo autem communis GD ſemidiameter. ſed duę illæ pyramides æquantur pyramidi cuius baſis eſt quadratum AD, & altitudo eadem GD, cùm rectangula ADF, DAF quadrato AD ſint æqualia. Ergo duo ſegmenta GBCD, GBCA, hoc eſt tota vngula ACD, æquatur pyramidi cuius baſis eſt quadratum diametri AD, altitudo autem ſemidiameter GD. Quod erat demonſtrandum.

Analogia cum ſphæra.

ECce altera vngulam inter & ſphæram analogia. Ex Archimede & Pappo habemus ſphæram æquari cono cuius baſis eſt æqualis ſuperficiei ſphæræ, altitudo autem radio ſphæræ. Nos verò demonſtrauimus vngulam æqualem eſſe pyramidi, cuius baſis eſt quadratum diametri (quod propoſ. 45. huius libri oſtendimus ſuperficiei vngulari eſſe æquale) altitudo autem ſemidiameter GD.

Corollarium.

EX propoſitione colligo ſequens theorema. Data ſit vngula, quæ ſupra plano per cylindri axem tranſeunte diuiſa ſit in ſegmenta duo GBCD, GBCA, ducaturq; BF normalis ad AD.

Dico ſegmentum GBCD eſſe ad totam vngulam vt pars diametri FD ad totam diametrum AD; ad ſegmentum verò alterum eandem habere rationem quam DF habet ad FA.

Demonſtratio.

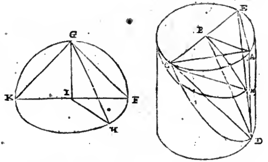
REctangulum ADF eſt ad quadratum AD, vt FD ad AD. ſed vt rectangulum ADF ad quadratum AD, ita pyramis, cuius baſis eſt ADF rectangulum & altitudo GD, eſt ad pyramidem cuius baſis quadratum AD, altitudo autem GD.
a 69. huius. Ergo pyramis cuius baſis eſt rectangulum ADF, & altitudo GD, hoc eſt [a] ſegmentum vngulare GBCD, eſt ad pyramidem cuius baſis eſt quadratum AD, & altitu-
b 70. vel 24. huius. do GD, hoc eſt [b] ad totam vngulam, vt FD eſt ad AD, pari argumento ex 69, probabimus ſegmenta GBCD, GBCA eſſe inter ſe vt DF eſt ad FA.

PROPOSITIO LXXI.

OMnis vngula à cylindro recto abſciſſa, dupla eſt inſcriptæ ſibi pyramidis maximæ; cuius nimirum baſis eſt (EAC) triangulum maximum, quod ſemicirculo, qui baſis eſt vngulæ, inſcribi poteſt; altitudo verò AM eadem quæ vngulæ.

Demon-

Demonſtratio.



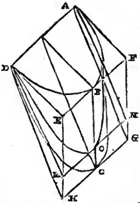
AB eodem cylindro reſecetur vngula EDC, cuius altitudo AD par ſit diametro baſis EC. Maximum triangulum EAC eſt dimidium quadrati circulo baſeos vngularis inſcripti, adeoque quarta pars quadrati, quod fit ſuper diametro EC: pyramis igitur ſuper baſi triangula EAC in altitudine AD, hoc eſt ex hypotheſi EC, quarta pars eſt pyramidis ſuper baſi quadrata EC, in eadem altitudine EC. Ergo pyramis, cuius baſis eſt triangulum EAC, altitudo EC, hoc eſt AD, eſt pars dimidia pyramidis habentis pro baſi quadratum EC, altitudinem verò BC dimidiam prioris EC, hoc eſt ſemidiametrum. Atqui hæc pyramis [a] æqualis eſt vngulæ. ergo [a] 70. vel 24. huius.
pyramis cuius baſis eſt triangulum EAC, altitudo AD, maxima nimirum quæ inſcribi vngulæ EDC poteſt, dimidia eſt vngulæ ac proinde vngula eius dupla eſt. Sed vt vngula EDC eſt ad pyramidem ſibi inſcriptam, ita vngula EMC ad ſibi inſcriptam pyramidem. Nam & vngulæ per 7. huius, & pyramides vngulis inſcriptæ per elementa, ſunt inter ſe vt altitudines AD, AM. ergo etiam vngula EMC maximę pyramidis ſibi inſcriptæ dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

Analogia cum ſphæra.

ETiam hic mirabiliter ſymboliſant ſphæra & vngula. Quemadmodum enim à nobis demonſtratum eſt vngulam pyramidis maximæ ſibi inſcriptæ duplam eſſe, ita quoque ab Archimede demonſtratum hæmiſphærium FHKG duplum eſſe coni maximi ſibi inſcripti.

PROPOSITIO LXXII.

PRiſma (AFNOMDE) cuiuis vngulæ (ABOD) à cylindro recto abſciſſæ circumſcriptum, ipſius vngulæ ſeſquialterum eſt.



Demonſtratio.

AB eodem cylindro reſeca vngulam, quæ altitudinem æqualem habeat diametro baſeos AD, eique circumſcriptum ſit priſma AFGHDE. Recta DE baſis trianguli DEH dimidia eſt diametri DA, altitudo autem trianguli EH, par eſt diametro. triangulum igitur DEH quarta pars eſt quadrati DA. Ergo pyramis, cuius baſis eſt triangulum DEH altitudo DA ſeu EF quarta pars eſt pyramidis, cuius baſis quadratum DA & altitudo DA ſeu EF, ac proinde dimidia eſt pyramidis cuius baſis eſt quadratum DA, altitudo ſemidiameter EB prioris dimidia. ſed pyramis, cuius baſis quadratum DA, altitudo autem EB ſemidiameter, æqualis eſt [a] vngulæ. ergo pyramis cuius baſis triangulum DEH, altitudo DA dimidia eſt vngulæ. ſed illius pyramidis priſma AEDHGF triplum [b] eſt. Ergo priſma vngulæ ſeſquialterum eſt.

a 70. vel 24. huius.

b 7. duodec.

Iam verò priſma DG eſt ad priſma DN, vt baſis HED ad baſim MED, hoc eſt 1, 6. vt HE ad ME, hoc eſt vt CB ad OB. per 7. autem huius etiam vngula ACD, eſt ad vngulam AOD vt CB ad OB. Ergo priſma DG eſt ad priſma DN, vt vngula ACD ad vngulam AOD, & permutando vt priſma DG eſt ad vngulam ACD, ſic priſma DN ad vngulam AOD. Atqui oſtenſum eſt priſma DG ſeſquialterum eſſe vngulæ ACD. ergo & priſma DN vngulę AOD ſeſquialterum eſt. Quod erat demonſtrandum.

Analogia cum ſphæra.

HAbes Lector aliam rurſum vtriuſque corporis ſimilitudinem. Oſtendit Archimedes cylindrum ſphæræ circumſcriptum ſeſquialterum eſſe ſphærę; & nos modò demonſtrauimus priſma vngulæ circumſcriptum ſeſquialterum eſſe vngulę.

PROPOSITIO LXXIII.

DAta ſit quæuis cylindri recti vngula cum inuolucro ſuo, ſiue cum priſmate ipſi circumſcripto.

Dico tres planas ſuperficies DEH, EHGF, FAG, cylindricæ vngularis ſuperficiei, quam includunt, eſſe ſeſquialteras.

Demonſtratio.

REctangulum quod continetur ſub DA diametro baſeos, & altitudine vngulæ BC hoc eſt rectangulum FEHG) æquatur [c] ſuperficiei vngulari. ſed triangula DEH, AFG, ſimul ſumpta, ſunt dimidium rectanguli FEHG. ergo triangula DEH, AFG dimidium ſunt vngularis ſuperficiei. Cùm igitur rectangulum FEHG oſtenderim ſuperficiei vngulari eſſe æquale, erunt tres ſimul planæ ſuperficies DEH, FEHG, FAG ſuperficiei vngularis, quam cingunt, ſeſquialterę. Quod erat demonſtrandum.

c 55. huius.

Analogia cum ſphæra.

AB Archimede demonſtratum eſt ſuperficiem cylindri ſphæram ambientis ſuperficiei ſphæricæ ſeſquialteram eſſe. Hæc etiam ſphæræ proprietas mirificè exprimi-

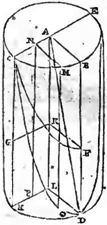
exprimitur ab vngula, duo triangula parallela quæ priſmatis ſunt baſes, referunt duos parallelos circulos, qui baſes ſunt cylindri. planum verò F E H G inter duas triangulares priſmatis baſes medium, repræſentat curuam cylindri ſuperficiem mediam inter duas cylindri baſes circulares. Quemadmodum enim ex demonſtratis ab Archimede deducimus duas cylindri ſphæram ambientis baſes eſſe dimidias ſuperficiei ſphæricæ, ita & nos oſtendimus duo triangula priſmatis nempe vngulam continentis baſes, dimidias eſſe ſuperficiei vngularis: & ſicut ex eodem habemus Archimede ſuperficiem curuam cylindri æqualem eſſe ſuperficiei ſphæræ, ita planè oſtenſum à nobis eſt planum F E H G ſuperficiei vngulari eſſe æquale.

PROPOSITIO LXXIV.

Data ſit cylindri recti vngula E D C, cuius altitudo B D par ſit circumferentiæ circuli E B C.

Dico ſuperficiem vngulæ quadruplam eſſe circuli E B C.

Demonſtratio.



Ex centro A ducatur A D; Rectangulum ſub diametro baſis E C, & altitudine vngulæ B D æquatur [a] ſuperficiei vngulari cylindricæ. ſed rectangulum E C B D, duplum eſt rectanguli A B, B D, ac proinde quadruplum trianguli A D B. ergo ſuperficies vngularis E D C quadrupla eſt trianguli A D B. ſed triangulum A D B æquatur [b] circulo E B C, quod eius baſis ſit radius A B, altitudo autem B D par circumferentiæ. Ergo ſuperficies vngularis E D C quadrupla eſt circuli E B C. Quod erat demonſtrandum.

a 55. huius.

b Archimed. propoſ. 1. dimenſ. circ.

Analogia cum ſphæra.

Qvis rurſum hic non agnoſcat ſphæram in vngula? Eiuſdem enim circuli E B C, & ſuperficies vngularis E D C, & ſuperficies ſphæræ cuius diameter E C, quadruplæ ſunt.

PROPOSITIO LXXV.

Vngula E D C cuius altitudo B D quæcunque, (inſpice figuram propoſitionis 74.) ſecetur per rectas A B, N M ad diametrum normales planis A B D, N M O, quæ axi cylindrico æquidiſtent.

Dico ſuperficies vngulares E D B, B D O M, M O C eandem & inter ſe & ad totam vngulæ ſuperficiem habere rationem, quam partes diametri, vel inter ſe vel ad totam diametrum.

Demonſtratio.

Svperficies E D B [c] æquatur rectangulo E A B D: & ſuperficies B D O M, rectangulo A N B D; ſuperficies verò M O C rectangulo N C B D æqualis eſt. ſuperficies denique tota E D C rectangulo E C B D eſt [d] æqualis. ſed 1. 6. ita rectangula, ſunt

c Coroll. 55.

d 55. huius.

ſunt inter ſe, & ad totum rectangulum E C B D, vt partes diametri ad ſe mutuo vel ad totam diametrum. ergo & ſegmenta ſuperficiei vngularis, ſunt inter ſe, vel ad totam ſuperficiem vngulæ, vt partes diametri inter ſe vel ad totam diametrum. Quod erat demonſtrandum.

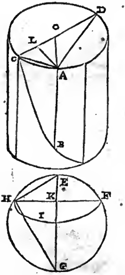
Analogia cum ſphæra.

HAbemus ex demonſtratis ab Archimede & Pappo ſegmenta ſuperficiei ſphæricæ planis ad diametrum rectis diuiſæ, eſſe inter ſe vt partes diametri. In hac ergo etiam pulcherrima proprietate, vngula & ſphæra conueniunt.

PROPOSITIO LXXVI.

IN omnibus denique ſuperficiem vngularem conuenire cum ſphærica ſic oſtendo.

Demonſtratio.



a 46. huius.

b 8. Sexti.

c 45. huius.

POnantur vngula D B C altitudinem habens diametro parem, & ſphæra F G H E, ſintque circuli maximi ſphæræ æquales vngulæ baſi D A C, ſecetur quoque ſphæra quacunque demum ratione per circulum F I H plano recto ad circulum maximum F G H. iungantur deinde E H G H. Diuiſâ deinde D C in L, ſecundùm rationem quâ diuiſa eſt E G in K, erectâque L A normaliter ad D C ſecetur vngula plano L A B. ponanturque A D, A C. Oſtendit Archimedes libro de ſphæra, & cylindro propoſitione trigeſima prima ſphæricam ſuperficiem F I H E æqualem eſſe circulo qui radio E H deſcribitur. nos autem a demonſtrauimus vngularem ſuperficiem A B C æqualem eſſe rectangulo L C D, hoc eſt b quadrato A C. Præterea Archimedes demonſtrat propoſitione trigeſima ſecunda eiuſdem libri ſuperficiem ſphæricam F I H G abſciſſam æqualem eſſe circulo cuius radius eſt H G. nos quoque oſtendimus ſuperficiem vngularem A B D æqualem eſſe rectangulo L D C, hoc eſt quadrato D A. Denique oſtendit Archimedes totam ſphæræ ſuperficiem æquari circulo cuius radius E G: & nos demõſtrauimus c totam vngularem ſuperficiem æquari quadrato D C. Igitur tota vngularis ſuperficies D A B C ad ſuas partes in quas eſt diuiſa eandem habet proportionem quam tota ſphæræ ſuperficies ad ſuas partes.

Manifeſtum igitur eſt vngularem ſuperficiem à ſphæræ rotunditate nullo alio differre niſi ſecundùm lineas expanſas & circulares: vnde ſi quis hac ratione aſſerat Archimedem deueniſſe in notitiam demonſtrationum quibus in materia ſphæræ & cylindri vſus eſt, non videtur à vero aberratutus.

PRO-

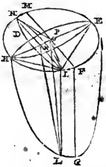
PROPOSITIO LXXVII.

FInem impono recenſendis ac demonſttandis ſphæræ atque vngulæ analogijs, ſi oſtendero non minùs ſolida ſegmenta vngularia & ſphęrica quam ſupetficietum portiones ſymbolizare.

Dara ſit cylindri recti vngula E F G H cuius baſis E F H ſemicirculus, altitudo F G par diametro baſeos E H, ſit autem & ſphęta F E P H M, ex eiuſdem ſemicitculi E F H circumuolutione circa diametrum ſiue axem E H, producta. Ducatur deinde I K N perpendicularis ad E H, per quam ductis planis I D N, K I L, rectis ad E H, tam ſphæra quàm vngula in duo ſegmenta dirimatur.

Dico ſegmenta vngularia E G L I K, H K I L, eandem inter ſe habere proportionem quam ſegmenta ſphærica I F E N, I H N.

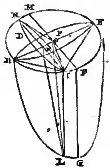
Demonſtratio.



IVngantur E I, H I, I O, N O, O L. Quoniam ex hypotheſi cylindrus à quo abſcinditur vngula, rectus eſt, erit L I recta plano E I H, adeoque per defin. 3. vndec. angulus K I L rectus. ergo K I eſt altitudo trianguli L I K. Rutſus quia G F eſt par diametto E H, ſiue F M, erit & L I par I N, vt patet ex demonſtratis in 41. huius. triangulum igitur L I K dimidium eſt rectanguli N I K, ac proinde æquatur quadrato, I K, hoc eſt tectangulo H K E: pyramides ergo quarum baſes ſunt triangulum L I K, & rectangulum H K E, altitudo autem communis K O, æquales ſunt. prætereà ſegmentum vngulare E G L I O, æquatur [a] pyramidi cuius baſis rectangu- a 69 huius.
lum H E K, altitudo radius O F, ſiue O H. quare cùm pyramis, cuius baſis rectangulum H E K, altitudo O H, ad pyramidem cuius baſis rectangul. H K E altitudo K O, rationem habeat compoſitam ex ratione altitudinis H O, ad altitudinem K O, & ex ratione baſis rectangulæ H E K ad baſim rectangulam H K E, hoc eſt [b] ex ra- b 1. Sexti.
tione H E ad H K, habebit quoque ſegmentum vngulare E G L I O ad pyramidem K L I O cuius baſis eſt triang. L I K, altitudo K O, rationem compoſitam ex rationibus H O ad K O, & H E ad H K.

Iam verò ſegmentum ſphæticum I E N contentum ſphærica ſupetficie I E N, & c Archim.
conica I O N, æquatur [c] cono cuius baſis eſt circulus radio I E deſcriptus, altitudo prop. 38. l. 1.
autem radius ſphæræ H O, ſed ille conus ad conum I O N, rationem habet compo- de ſph. &
ſitam ex ratione altitudinis H O ad altitudinem K O, & ex ratione baſis ad baſim, cyl.
hoc eſt [d] ex ratione quadrati E I ad quadrat. K I, hoc eſt [e] ex ratione rectanguli d 2. duodec.
H E K ad rectangulum H K E, hoc eſt ex ratione H E ad H K. Ergo & ſegmen- e 8 Sexti.

NN tum



rum ſphęticum IENO ad conum ION, rationem habet compoſitam ex rationibus HO ad KO, & HE ad HK. ſed etiam oſtendi ſuprà ſegmentum vngulare EGLIO ad pyramidem KLIO rationem habere compoſitã ex rationibus HO, ad KO, & HE ad HK. ergo ſegmentum EGLIO eſt ad pyramidem KLIO, vt ſegmentum IENO ad conum ION. Ergo componendo ſegmentum EGLIK eſt ad pyramidem KLIO, vt ſegmentum EINK eſt ad conum IOK. Eodem planè diſcurſu, ſi ſub finem loco compoſitionis adhibeatur diuiſio, oſtendam pyramidem KLIO eſſe ad ſegmentum vngulare KILH, vt conus ION eſt ad ſegmẽtum ſphęricum IHN. Igitur ex æqualitate ſegmentum vngulare EGLIK eſt ad ſegmentum vngulare KILH, vt ſegmentum ſphæricum IEN eſt ad ſphæricum ſegmentum IHN. Quod erat demonſtrandum.

Dico inſuper ſegmentũ vngulare EGLIO eſſe ad ſegmentum vngulare OILH, vt ſphæricum ſegmentum IEMO, eſt ad ſegmentum ſphæricum IONH.

Demonſtratio.

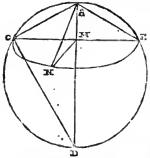
PYramides, quarum baſes ſunt rectangula HEK, EHK; communis autem altitudo radius OF, hoc eſt [a] ſegmenta vngularia EGLIO, OILH, ſunt inter ſe vt rectangula HEK, EHK, hoc eſt, vt EK ad KH. Atqui etiam coni quorum baſes ſunt circuli radijs EI, HI deſcripti, communis verò altitudo ſemidiameter OF, hoc eſt [b] ſegmenta ſphærica IEMO, IONH, ſunt inter ſe, vt quadrata EI, HI, hoc eſt vt rectangula HEK, EHK, hoc eſt vt EK ad KH. Ergo ſegmenta vngularia EGLIO, OILK eandem inter ſe rationem habent, quam ſegmenta ſphęrica IEMO, IONH. Quod erat demonſtrandum.

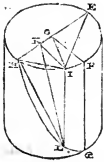
a 69. huius
b Arch. 38. 1. ſpharic.

PROPOSITIO LXXVIII.

CVm inter pyramides vngulæ inſcriptas, & conos inſcriptos ſphæræ non leuis itidem analogia intercedat, hanc quoque tribus ſequentibus propoſitionibus explicabimus.

Data





DAta ſit cylindri recti vngula E G H, habens altitudinem F G parem diametro baſis & ſphæræ A B C D. Cui ſectæ plano B N C inſcribatur Iſoſcelius conus A B N C. diuiſâ verò diametro baſis vngulæ E H, (quæ axi A D ſit æqualis) in K, vt diuiſus eſt axis A D in M, erigatur K I normalis ad E H, quam patet ipſi M C eſſe æqualem. fiatque ſectio K I L ad cylindri axem parallela. Iunctâ demum H I (quam etiam patet ipſis C A eſſe æqualem) per H I & L, planum agatur H I L. Archimedes propoſitione decimaquarta libri de ſphæra & cylindro demonſtrat circulum deſcriptum radio qui ſit medius inter M N & N A, proportionalis, ſiue inter M C & C A, æqualem eſſe toti conicæ ſuperficiei A B N C præter baſim. Idem applicandum eſt vngulæ, oſtendendum ſcilicet I H L ſuperficiem triangularem æqualem eſſe quadrato facto ſub latere, quod medium ſit proportionale inter rectas K I, I H, hoc eſt M C, C A. Iunge O F. quoniam G F eſt ex hypotheſi par E H, erit O F dimidia F G. ergo etiam I K dimidia a lineæ I L. Igitur rectangulum a Ex demonſtratis in 41. huius.
b H I, I K eſt triangulo H I L æquale. ſed quadratum ſuper media inter H I, I K æquatur rectangulo K I, I H. illud igitur ipſum quadratum eſt æquale H I L triangulo. Idem intellige de quauis ſuperficie pyramidali modo explicato. b Ex demonſtratis ibid.

Porrò manifeſtum eſt pyramidem K I L H vngulæ E F G H incluſam, repræſentare conum inſcriptum parti ſphæricæ A B N C eâ ratione quam conſtructio poſtulauit. Quod liquidò lector intelliget, ſi coni ſuperficiem ſecundùm longitudinem perimetri baſeos ſuę expandi concipiat, quod K I ipſi M C, & H I ipſi C A ſit æqualis. Quod ſi igitur I L foret circulari perimetro expanſo B N C æqualis, tum ſuperficies I H L non ſolùm repræſentaret conicam ſuperficiem, ſed illi omnino æqualis exiſteret.

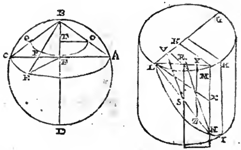
PROPOSITIO LXXIX.

SEcetur ſphæra plano A E C recto ad axem B D ſicuti ſecta eſt L I G cylindri recti vngula ſectione K M N, quæ recta eſt ad diametrum G L & axi cylindrico parallela: vngularique ſegmento K M L N pyramis inſcripta ſit, ſphærico verò conus A B C E.

Dico triangulum M K N ad M L N, triangulum eandem habere proportionem quam A E C baſis coni A B C E, ad ſuperficiem eiuſdem præter baſim.

 Demon-

Demonſtratio.



DEmonſtrat Archimedes libro primo de ſphæra & cylindro propoſitione decimaquinta, cuiuſque coni iſoſcelij ſuperficiem ad baſim ſuam eam habere rationem quam latus coni ad radium circuli baſeos, hoc eſt in caſu noſtro, vt eſt A B linea ad lineam A F. cùm autem ponatur G K ad K L, eandem habere rationem quam habet D F ad F B: igitur etiam eſt G K ad K M, vt D F ad F A, & vt K M ad M L, ſic F A, ad A B, quemadmodum ex elementis patet. ſed vt K M ad M L, ita triangulum K M N ad triangulum L M N, cùm eorum communis altitudo ſit M N. ergo triangulum K M N, eſt ad triangulum L M N, vt F A ad A B, hoc eſt vt baſis coni A E C ad reliquam coni ſuperficiem. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXX.

POnatur rurſum cylindri vngula L I G, ſed cuius altitudo H I par ſit diametro G L: ſecetur verò conus A B C, ſectione O P Q, baſi A E C parallela, & diuidatur M L in R, vt diuiſa eſt in B E in P. tum per punctum R ſectio fiat R S V quæ æquidiſtet plano N M K.

Dico ſpatium M R S N æquale eſſe quadrato ſub linea quæ media eſt proportionalis inter M R & M K, R V ſimul ſumptas, eo prorſus modo quo ſpatium ſuperficiei conicæ duobus perimetris parallelis A E C, O P Q interceptum æquale eſt circulo cuius radius eſt medius inter P E vel A O, & lineas A F, O T ſimul ſumptas.

Demon-

Demonſtratio.

QVod ſpatium parallelis circulis AEC, OPQ comprehenſum æquale ſit circulo cuius radius mediam proportionem habeat inter lineas AO & OΓ, AΓ ſimul ſumptas; non intendo demonſtrare, cùm id ab Archimede libro primo de ſphæra & cylindro propoſitione decimaſexta ſit demonſtratum. Supereſt igitur hoc ipſum demonſtremus de figura MRSN, quod illa ſcilicet æqualis ſit quadrato mediæ proportionalis inter lineas MR, & aggregatum ex duabus MK, RV. hoc autem ſic oſtendo.

Quoniam ex hypotheſi cylindrus ex quo deſumitur vngula, rectus eſt, erit latus cylindri rectum ad baſim GHL, adeoque per definit. 3. vndec. angulus NML rectus eſt. Quia autem parallela plana ex hypotheſi NMK, SRV ſecat planum NML, erunt communes ſectiones NM, SR [a] parallelæ. cùm igitur angulus NMK rectus ſit, etiam SRV rectus erit; trapezium igitur MNSR rectangulum eſt ad baſim ſuam MR. hac igitur in Y ſectâ bifariam, ductâque YZ parallela ad MN, RS, erit rectangulum MR, YZ æquale trapezio MNSR, quod ſtatim patet, ſi per Z ducatur parallela ad MR occurrens rectis MN, RS. recta quoque YZ erit dimidia ſummæ rectarum MN, RS, quod eâdem conſtructione facta nullo etiam negotio liquet. Iam verò quia IH altitudo vngulæ ponitur æqualis diametro GL, erit hæc dupla ſemidiametri, adeoque & NM dupla [b] ipſius MK. Cùm igitur NM, SR ſunt parallelæ, etiam SR dupla eſt RV. Ergo YZ dimidia ſummæ rectarum NM, SR, æquatur rectis MK, RV. Ergo rectangulum ſub MR & MKRV, hoc eſt quadratum mediæ proportionalis inter MR & MK, RV, æquatur rectangulo MR, YZ, hoc eſt vt ante oſtendi, plano MNSR. Quod erat demonſtrandum.

[a] 16. Vndec.

[b] Ex demonſtr. 41. huius.

Priuſquam hic manum tollo de tabula, vt ſphæræ atque vngulæ admirabilis ſimilitudo clariùs intelligatur, communes vtriuſque proprietates præcipuas vnum ſub aſpectum Lectori dabo.

Symboliʒationes vngulæ cylindricæ cum ſphæra, primò circa ſolidorum rationem.

PRIMA.

QVemadmodum vngula ad vngulam in triplicata eſt ratione laterum homologorum, ita quoque ſphæra ad ſphæram.

II.

Segmenta vngularia & ſphærica tam ea quæ planis ad diametrum rectis abſcinduntur, quàm ea quæ ad centra conſiſtunt eandem inter ſe habent rationem.

III.

Quòd ſi baſi vngulari ſemihexagonum inſcribatur, & ſecundùm huius ſemihexagoni lineas plana fiant axi æquidiſtantia, idem quoque præſtetur in ſemicirculo maximo ſphæræ, & hæc figura circulo inſcripta in orbem agatur producens conicas ſuperficies; in eadem ratione ſectæ erunt & vngula & ſphæra.

IV.

Quemadmodum prædicto modo ſecta vngula ad ſuam partem inſcriptam habet rationem octo ad ſex: ita quoque ſphæra ad figuram inſcriptā habet proportionem octo ad ſex.

V.

Sicut vngula altitudinem habens diametro baſeos parem cum inuolucro, ſiue priſma vngulam includens, eſt ſeſquialterum vngulæ; ita ſimiliter ſphæra cum ſuo inuolucro,hoc eſt cylindrus ſphæram ambiens eſt ſeſquialter ſphæræ.

VI.

Quemadmodum inuolucri pars ad totum inuolucrum eſt in triplicata ratione laterum diametro æquidiſtantium : ita etiam contingit in partibus inuolucri ſphærici,ſi ad totum inuolucrum conferas partes inuolucri, quæ inſiſtant lineis axi parallelis.

VII.

Quemadmodum vngula altitudinem habens baſis diametro parem æquatur pyramidi, cuius baſis par eſt curuæ ſuperficiei vngulç,altitudo autem ſemidiameter, ita & ſphæra çqualis eſt cono,cuius baſis eſt par ſuperficiei ſphæricæ, altitudo autem ſemidiameter ſphæræ.

VIII.

Sicuti ſegmento vngulari quod plano per cylindri axem ducto decuſſatur çqualis eſt pyramis baſim habens æqualem curuç ſuperficiei ſegmenti vngularis, altitudinem verò parem ſemidiametro: ita etiam ſphæricç portioni æqualis eſt conus baſim habens æqualem ſuperficiei ſphçricæ portionis,altitudinem verò ſemidiametrum ſphærç.

IX.

Quemadmodum vngula maximæ pyramidis ſibi inſcriptç dupla eſt,ita & hemiſphçrium coni maximi ſibi inſcripti, duplum eſt.

Secundò circa rationem ſuperficierum.

PRIMA.

HÆdrç cuiuſuis polygoni cingentes vngulam ſi ſimul ſumãtur ſecluſis lateralibus triangulis,çquales ſunt rectangulo quod fit ſuper diametro circuli qui baſis eſt vngulç, & altera linea quç çquatur altitudini vngulç. Ita quoque ſuperficies conicç ex cuiuſcunque polygoni circumſcripti ſphçrç circumuolutione productç demptis lateralibus çquales ſunt rectangulo quod fieret ſuper diametro & linea quç toti perimetro circuli maximi eſt æqualis.

II.

Quemadmodum hçdrç vnius polygoni,alterius polygoni hçdris circa eandem vngulam conſtructis, excluſis lateralibus triangulis, inter ſe æquales exiſtunt:ita quoque ſi circa ſphæras duas æquales diuerſa polygona ex gyratione formata conicas ſuperficies produxerint,erunt ſuperficies vnius, alterius ſuperficiebus æquales demptis lateralibus.

III.

Sicut ex diuiſione diametri vngularis ſub quauis ratione, ſuperficies vngulares planis interceptæ quæ normaliter ad diametrum per puncta diuiſionum ducuntur ſeſe habent ſecundùm rationes in diametro factas: ita

ita etiam partes ſuperficierum ſphæræ diuiſæ per circulos rectos ad axem eandem rationem obtinent quæ inter ſegmenta axis facta eſt.

I V.

Vt eſt diameter circuli ad ſemiperimetrum eiuſdem, ita quoque eſt ſphæræ ſuperficies ad cylindrum altitudinis quę æquatur perimetro circuli maximi: pari pacto vt diameter vngulæ eſt ad perimetrum ſemicircularem, ita eſt vngularis ſuperficies ad ſemicylindricam eiuſdem altitudinis.

V.

Quam rationem obtinet ſuperficies vnius ſphæræ ad alterius ſuperficiem, eandem ſeruant inter ſe proportionem vngulares ſuperficies, modò proportionales ſint baſes vngulares cum maximis circulis ſphærarum.

V I.

Quemadmodum ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt maximi circuli, ita & ſuperficies curua vngulæ cuius altitudo par eſt perimetro circuli qui baſis eſt vngulæ, quadrupla eſt eiuſdem circuli.

V I I.

Sicut ſuperficies cylindri ſphæram ambientis ſeſquialtera eſt ſuperficiei ſphæræ, ita & priſmatis vngulam continentis, ea ſuperficies quæ curuam vngulæ ſuperficiem cingit, eiuſdem eſt ſeſquialtera.

V I I I.

Quemadmodum ſphæræ ſuperficies æqualis eſt circulo cuius radius par eſt ſphæræ diametro: ita etiam vngula cuius altitudo par eſt diametro baſis, æquatur quadrato cuius latus eſt diameter.

Alias ſymbolizationes non proſequor, ſufficit enim hæc inſinuaſſe Lectori, ne longior ſim quàm oporret. demonſtrationes verò harum proprietatum pleræq; à nobis in propoſitionibus præcedentibus traditæ ſunt: cæteræ vel ex noſtris, vel ex Archimede & Pappo non difficulter eruentur.

PARS

PARS QVINTA

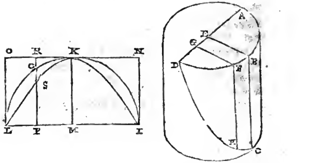
Vngulam parabolicam conſiderat; inſuper cylindricam vngulam & ſphæram confert cum parabola & cylindro parabolico.

PROPOSITIO LXXXI.

DAta ſit vngula ABCD, altitudinem habens parem baſis diametro, quam ſecent plana EBC, GFH ad diametrum recta. ſit autem & parabola IKL, axem habens parem ſemidiametro ED, ordinatim verò ſubtenſam IL, diametro AD æqualem, diuiſa deinde IL, ſimiliter in M & P, vt AD eſt in E & G, ducantur MK, PS ad IL orthogonę.

Dico totam vngulam ABCD eſſe ad ſegmentum EBCHFG, vt parabola IKL eſt ad ſegmentum MKSP: item totam vngulam eſſe ad ſegmentum GFHD, ſicut parabola eſt ad ſegmentum PSL.

Demonſtratio.



a 118. *Duct.* b *Schol.* 19. *huius.*

CVm parabola IKL habeat baſim diametro AD, & axem ſemidiametro ED æqualia, hæc ducta in ſuum axem, hoc eſt in ED, vel EB, æquabitur [a] ſemicirculo ducto in ſeipſum, hoc eſt vngulæ [b] ABCD: item ſegmentum MK, SP ductum in eandem altitudinem, æquabitur ſegmento ſemicirculari EBFG ducto in ſeipſum, hoc eſt ſegmento vngulari EBCHFG. Atqui ſolida parabolica orta ex ductu parabolæ IKL, & ſegmenti MKSP, in communem altitudinem axeos, ſunt vt baſes, hoc eſt vt parabola IKL ad ſegmentum MKSP. ergo etiam vngula ABCD, eſt ad ſegmentum ſuum EBCHFG, vt parabola IKL ad ſegmentum MKSP. Quod erat demonſtrandum.

Alterius partis eadem eſt demonſtratio.

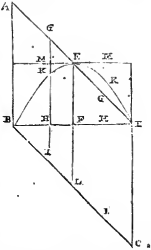
PROPOSITIO LXXXII.

SIt triangulum iſoſceles rectāgulum ABD cum altero ſimili & æquali BDC ſubalternè poſitum. Diuiſâq; bifariam BD in F, poſitâque

EF

F E quæ æquidiſtet A B , deſcribatur parabola B E D cuius axis ſit E F.

Dico magnitudinem ortam ex ductu G H, in H I æquari cylindro parabolico altitudinis E F & baſeos B E D.



Demonſtratio.

DVcantur parallelę M E M quidem ad B D, & G M K H I ad A B, ſiue E F L. Vt B D ad D C, ſic B H ad H I. ſed ex hypotheſi B D, D C æquantur. ergo & B H, H I æquales ſunt: pari argumēto pares ſunt H D, H G, rectangulum igitur B H D eſt rectangulum G H I. ſimiliter E F, ipſi F D, & F L ipſi B F æqualis eſt; rectangulum igitur B F D, eſt rectangulum E F L. quia autem B F, F D ex hypotheſi æquantur, erunt etiam E F, F L æquales. rectangulum igitur E F L, (hoc eſt B F D) idem eſt cum quadrato E F. Iam verò cùm rectangulū B H D ſit ad rectangulum a B F D vt K H ad E F, etiam rectangulum G H I erit ad quadratum E F, vt K H ad E F. ſed quam rationem habet H K ad F E, eandem b habet rectangulum M H K ad rectangulum E F L, ſiue quadratum E F. Igitur quam rationem habet rectangulum G H I ad quadratum E F, eandem quoque obtinet rectangulum M H K ad E F quadratum. ergo rectangula G H I, M H K æqualia ſunt. ſimiliter oſtendam ductis quotcunque lineis alijs parallelis ſingula ſemper rectangula G H I æquari ſingulis rectangulis M H K. Quare magnitudo nata ex ductu trianguli A B D in B D C, c æquatur cylindro parabolico qui conſtat baſi B E D, & altitudine E F. Quod demonſtrare oportuit.

a 47 parab.

b 1. Sexti.

c 46. ductu.

Corollarium.

EX hac propoſitione conſequens eſt vt quæuis pars parabolæ parallelis intercepta ſub altitudine E F formet quantitatem æqualem magnitudini quæ fit ex ſegmentis triangularibus in ſe inuicem ductis, quæ illis ijſdem parallelis intercipiuntur quibus parabolæ pars fuit clauſa.

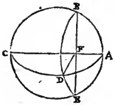
PROPOSITIO LXXXIII.

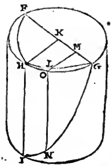
DAta ſit ſphæra A B C E, ſecta plano B D E ad axem A C recto. Deſcribatur deinde quæuis parabola F H G, cuius axis H K ſit par lateri recto, & ordinatim poſita ſit F K G: quæ ſimiliter ſecetur in M, vt axis ſphæræ ſectus eſt in F: & per M, ducatur M L parallela axi.

Dicò ſphæram A B D C ſecundùm eandem proportionem diuiſam eſſe circulo B D E, ſecundùm quam diuiſa eſt parabola F H L G rectâ L M.

Demon-

Demonſtratio.





Centro K, ſpacio H, deſcribatur ſemicirculus, quia axis HK æquatur lateri recto, erit HK æqualis KF. vnde ſemicirculus tranſibit per F, & G. ſuper hoc ſemicirculo vt baſi intelligatur fieri vngula FHIG, à cylindro recto abſciſſa quæ
a 81. huius. altitudinem parem habeat diametro baſeos FG: productâque ML in O, ſecetur vngula plano per MO ducto. Oſtenſum enim a eſt partem vngularem FHOMN ad reſiduam, eam rationem obtinere quam parabolæ FHLM ſegmentum, ad par-
b 77. huius. tem LMG: ſed vt vngulæ pars ad vngulæ partem, ita quoque ſegmentum b ſphæræ ad ſphæræ ſegmentum; igitur eam ſortiuntur partes ſphæræ inter ſe rationem quam partes parabolæ habent inter ſe. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXIV.

Ex his aliter quàm Archimedes prop. 4. lib. 2. de ſphæra & cylindro ſphæram ſecundùm datam rationem diuidemus, hunc in modum.

Parabolam FHG, cuius axis HK, par ordinatim poſitæ FK, per diametrum ML ſeca in data ratione: vtque ſecta FG in M, ita axem ſphæræ ſeca in F. planum ductum per F rectum ad axem, ſphæram ſecundùm datam rationem partietur; vt patet ex propoſitione iam demonſtratâ.

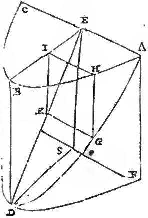
PROPOSITIO LXXXV.

Cylindrus parabolicus, (cuius axis EP, baſis parabola ABC, axis baſeos BE, ordinatim ad axem poſita AEC,) ſecetur plano per AC, exhibente in cylindri ſuperficie lineam AGD.

Dico lineam AGD eſſe parabolam.

Demon-

Demonſtratio.



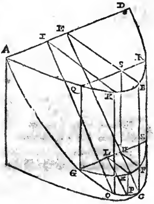
DVcatur recta ED, & ſume in axe EB, quoduis punctum I, à quo ductâ ordinatim I H, quę proinde parallela erit ad AE, ex H in cylindri ſuperficie ponatur recta HG, quam quia axi ES æquidiſtat, patet etiam rectę AF æquidiſtare. Quoniam igitur I H, HG æquidiſtant EA, AF, erunt plana a IHG, FAE parallela: quæ quoniam ſecat planum EAD, erunt b communes ſectiones AE, KG parallelæ. ſunt autem & HI, AE parallelæ. ergo etiam GK, HI parallelę. Deinde quoniam parallela plana FAES, IHGK ſecat planum BESD, erunt communes ſectiones IK, ES parallelę: ſed etiam HG ad axem ES, eſt parallela. ergo IK, HG parallelæ. Ergo GH, IK parallelogrammum eſt. ergo HI, GK æquales. His demonſtratis hunc in modum concludemus propoſitū. ducatur in cylindri ſuperficie recta BD, erit hæc parallela axi ES, ac proinde etiam ad IK erit parallela. Igitur ED eſt ad KD, vt EB, ad IB, hoc eſt, c vt quadratum AE ad quadratum HI, hoc eſt vt quadratum AE, ad quadratum GK. ergo d AGD parabola eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 15. vndec.
b 16. vndec.
c 1. parab.
d Ibid.

PROPOSITIO LXXXVI.

CYlindrus parabolicus rectus ABCD (cuius baſis ABD, & baſeos axis EB, ordinatim verò poſita AED) ſecetur primò ſectione per AD exhibente parabolicam vngulam FAGCBD, & altera ſectione GFM quæ æquidiſtet baſi ABD.

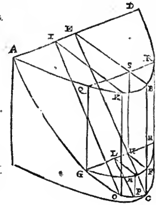
Dico vngulam totam AGCBD ad partem reſciſſam GFCM, quintuplicatam eius habere rationem quam habet AD, ad GM.



Demonſtratio.

Diuidantur proportionaliter rectæ AD, GM in quibuſuis punctis I & L, & erigantur diametri IK, LN; & ſectiones fiant ſecundùm lineas EB, IK, & HF, LN exhibentes in ſuperficie cylindrica rectas lineas BC, KO, & FC, NP. Iungantur denique EC, IO & HC, LP. Quoniam plana IKO, EBC parallela ſecat planum ACD, erunt communes ſectiones IO, EC parallelæ. pari argumento parallelæ ſunt HC; LP; & ſimilia erunt triangula EBC, IKO & HFC, LNP cùm tam anguli BEC, KIO quàm anguli EBC, IKO. item tam anguli FHC, NLP quàm HFC, LNP æquales ſint. Deinde quia rectæ AD, GM ſimiliter ex conſtr. ſunt diuiſæ, erit rectangulum AID ad rectangulū AED,

a 47. parab.



b 141. parab.

c Primâ parab.

vt rectangulū G L M ad rectangulum G H M, ergo a & I K eſt ad E B, vt L N ad H F. Deinde ob triangulorum ſimilitudinem, O K eſt ad C B, vt I K ad E B, hoc eſt vt L N ad H F. hoc eſt vt N P ad F C. Igitur vngula A B C D ad vngulam G F C M, rationem habet compoſitam ex ratione baſeos A B D ad baſim G F M, & ex altitudine B C ad altitudinem F C, quoniam omnes partes baſeos A B D ad omnes partes baſeos G F M, hoc eſt pars baſis A K I ad G N L, vel I K B E ad L N F H, eandem rationem habent quam tota parabola A B D ad parabolam G F M & altitudines omnes vngulæ A B C D ad altitudines vngulę G F C M, vt B C ad F C, vel K O ad N P. Sed ratio baſeos b A B D ad baſim G F M, hoc eſt Q B R, eſt triplicata rationis A D ad Q R; & ratio B C ad F C, hoc eſt E B ad H F, hoc eſt S B, duplicata c eſt eius, quam habet A D ad Q R. Igitur quoniam ratio triplicata A D ad Q R, ducta in duplicatam eiuſdem producit quintuplicatam, manifeſtū eſt rationem vngulæ A B C D ad vngulam G F C M, quintuplicatam eſſe eius quam habet recta A D ad Q R, hoc eſt A E ad H G, ſiue A D ad G M. Quod erat demonſtrandum.

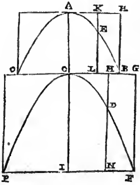
PROPOSITIO LXXXVII.

HAbeant parabolę A B C, C D F æquale latus rectum inſeruiens axibus, poſitiſq; contingentibus A H, C G, ponantur ordinatim B C & F I, & erectis F G, B H quę æquidiſtent axibus; mixtilineæ ſuperficies A E B H & C D F G, ducantur in ſeipſas.

Dico corpora producta ex ductu illo habere inter ſe quintuplicatam rationem eius quam habet B C linea ad lineam F I.

Demonſtratio.

d 47. de parab.



e Coroll. 143. parab.

DIuidantur proportionaliter A H, C G in K & M, & conſtituantur K E L, M D N parallelæ diametris. erit igitur rectangulum F I P ad F N P, hoc eſt B C O ad B L O, vt linea d I C ad N D, hoc eſt C A ad L E. ergo vt A C, hoc eſt K L ad C I, hoc eſt M N, ita erit E L ad D N, vel K E ad M D. Igitur A H B ductum in ſe ad C G F, in ſe ductum, habet rationem compoſitam ex ſuperficie H A E B ad ſuperficiem G C D F, & ex altitudine H B ad G F altitudinem ſecundùm tenorem diſcurſus facti præcedenti propoſitione, ſed baſis A E B H ad baſim C D F G, triplicatam habet rationem eius quam habet linea A H ad C G, hoc eſt C B ad I F, (oſtendimus e enim ſuperficiem A E B H ad C D F G, eandem rationem habere quam parabola A B O ad parabolam F C P:) & ratio H B ad G F, hoc eſt A C ad C I, du-

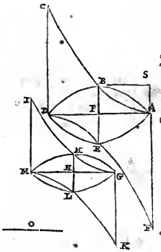
duplicata eſt rationis quam habet AH ad CG, hoc eſt CB ad IF, igitur cùm triplicata ratio BC ad FI, ducta in rationem duplicatam eiuſdem BC ad FI, producat quintuplicatam rationem HA ad GC, patet rationem corporum ex ductu AEBH & CDFG, in ſeipſa eſſe quintuplicatam eius quam habet linea AH ad CG. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXVIII.

Sint ABC, DEF parabolæ ſimiles & æquales quarum vertices A & D, & axes AF, DC. Similiter parabolæ GHI & KLM, ſimiles inter ſe & æquales quarum axes GK, MI: ſit autem O linea latus rectum quod omnibus his parabolis ad axes inſeruiat.

Dico ABCD ductum in ADEF ad GHIM, ductum in GMLK, quintuplicatam habere rationem eius quam habet AD ad GM.

Demonſtratio.



Diuidantur AD, GM bifariam in punctis P & N, & poſitis rectis BPE & HNL, quæ æquidiſtent axibus deſeribantur parabolæ per ABD, GHM habentes axes BP, HN. erit igitur ABCD ductum in ADEF, æquale [a] parabolæ ABD ductæ in ſe, & ſimiliter GHIM ductum in MLKG, æquale parabolæ GHM in ſe ductę. habent autem parabolę ABD, GHM ęquale latus rectum ad axes quod ſic oſtendo. Ducantur BS, SA ipſis PA, PB parallelæ vt AS ad SB, ſic SB ad O, latus rectum, [b] ſed BP, PA ipſis BS, SA ſunt æquales. ergo vt BP ad PA, ita PA ad O, & vt HN ad NG, ita NG ad O, quoniam ex conſtructione parabolæ ABC; GHI commune habent latus rectum O. ſed etiam lineæ BP, PA communes ſunt parabolæ ABD & rectæ HN, NG communes quoque parabolæ GHM. Igitur commune habent etiam latus rectum O. Hoc poſito; demonſtratum eſt [c] ABD, ductum in ſe ad FHM in ſe ductum quintuplicatam habere rationem AD ad GM. Igitur etiam ABCD ductum in ADEF ad GHIM, ductum in GMLK, habet quintuplicatam rationem eius quam habet linea AD ad GM. Quod fuit demonſtrandum.

a 100 De duct.

b 8 parab.

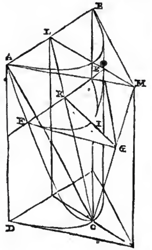
c Preced.

PROPOSITIO LXXXIX.

Sit ABCD cylindrus parabolicus, & ſectio AFCB, vngulam parabolicam producens, ductiſq; contingentibus parabolam AM, BM, demittatur recta MC, in qua aſſumpto quouis puncto G, per illud fiat ſectio FGK parallela plano ABM.

Dico FG contingere parabolam FKI, ſectione per G factâ productam.

 Demon-



a 18.parab.
b 16.vndec.
c 18.parab.

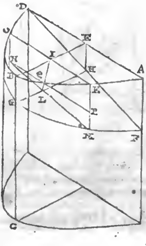
Demonſtratio.

Biſeca A B in L, ductâque L E M; per rectas L M, M G C ducatur planum faciens in plano F K G communem ſectionẽ K I G, & in plano A C B ſectionem L K C, in ſuperficie autem cylindrica rectam E I C. Quoniam A M ex conſtructione parabolam A E B contingit in A, ergo [a] L E, E M æquales ſunt lineæ. cùm ergo planum F K G æquidiſtet A M B, erit quoque G K [b] æquidiſtans L M. ergo & K I æqualis I H, cùm triangulum L M C, ſimile ſit K G C triangulo & L E ad E M, vt K I ad I G. quare [c] etiam G F parabolam F K I contingit in F. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO XC.

Ponatur cylindrus parabolicus rectus A B C D ſectus quacunque ſectione per rectam D F in plano D A F poſitam, exhibente ſectionem F G D.

Dico F G D eſſe parabolam.



Demonſtratio.

Diuiſa bifariam A D in E, ſit E B diameter parabolæ A B D, per quam ponatur planum parallelum ad A F, exhibens communes interſectiones E H, H G, B G. Deinde ſtatuatur I K æquidiſtans E A, erit I K ordinatim poſita ad diametrum E B, ſecundùm I K: fiat ſectio æquidiſtans A F, occurrens plano F G D ſecundùm rectam M N, quæ proinde parallela erit rectę D F per 16. 11. exhibens pręthereà communes interſectiones cum cylindri ſuperficie K M, O N parallelas inter ſe; poſita igitur ex N recta N P, quæ æquidiſter O K, erit O K P parallelogrammum, ideoque P N, æqualis eſt K O, & quia bifariam diuiſa eſt O K in I, diuidetur quoque P N, bifariam in Q per I L, communem interſectionem planorum E B G, & O K M quæ I L æquidiſtat K M: ac proinde etiam M N bifariam diuiſa eſt in L, eſt verò & F D biſecta in H.

Deinde quoniam cylindrus ex hypot. rectus eſt, erunt anguli F A D, M K O hoc eſt M P N, recti. rurſum quia A F, F D æquidiſtant P M, M N, [d] anguli A F D, P M N pares erunt. triangula ergo D A F, N P M æquiangula ſunt. Ergo vt A D ad P N, ſic F D ad M N. ergo quadratum A D eſt ad quadratum P N, hoc eſt K O, vt quadratum F D, ad quadratum M N. ſed

d 10.vndec.

quadra-

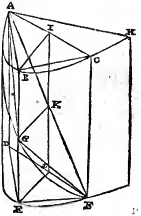
quadratum AD eſt ad quadratum KO, vt ᵃ EB ad BI, hoc eſt, vt HG ad LG. [a 1. parab.] ergo quadratum FD eſt ad quadratum MN, vt HG ad LG. Quare cùm FD, MN biſectæ ſint in H & L, erit quadratum FH ad quadratum ML, vt HG ad LG. ergo FMGD parabola eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCI.

Cylindri recti parabolici baſim ABH ſecet quæuis AC, ſecundùm quam & rectam AD facta ſectione ACF, erectaque ex I puncto, quo diuiditur AC bifariam diametro IB, ponatur planum per IB parallelum rectæ AD, exhibens BE rectam in ſuperficie cylindri, quâ biſſecta in G, ponatur per G & AF lineam, planum AGF; & ponantur plana per ABE, & CBE quæ exhibeant communes interſectiones AG, GF, DE, EF.

Dico corpus habens baſim ACF, & hædris ABG, BCFG, incluſum, æquale eſſe corpori quod fit ſub baſi ADF, clauſum planis AGED & GEF: ſiue totum priſma ACFDEB, plano AGF biſecari.

Demonſtratio.



Quoniam planum IBE parallelum AD ſecat bifariam AC in I, ſecabit quoque DF in L bifariam, quæ parallela eſt rectæ AC & conſequenter diuidet bifariam rectā AF in puncto K, ſed ex conſtructione planum AGF diuidit rectam quoque BE bifariam in G, parallelogrammum igitur IBGK æquale eſt parallelogrammo KGEL. Quare cùm pyramides IBGKA, KGELF æquales habeant baſes, & altitudines item pares ſint, quod planum IE æquidiſtet rectis AD, CF & biſecet rectas AC, DF pyramides æquales erunt. ſed etiam totum priſma AILDEB æquatur toti ICFLEB. ergo & reliquum IBKGFC æquatur reliquo KGELDA. quibus ſi addas æquales illas pyramides, erit ſolidum ACFGB par ſolido ADFGE. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCII.

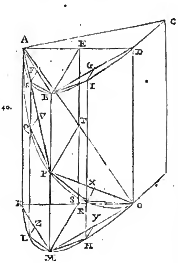
Sit denuo cylindrus parabolicus rectus cuius baſis parabola ABC; ductâ deinde quauis AD ponatur eius diameter EB, & iunctis AB, BD, biſecentur AB & BD in F & G, & diametri harum ſint FH, GI ducantur AH, HB, BI, ID, per rectas tandem AD, AB, BD, & AH, HB, BI, ID, plana ponantur exhibentia in cylindri ſuperficie rectas lineas AK, HL, BM, IN, DO; in plano autem KMO ſectiones faciant KO, KM, MO, KL, LM, MN, NO. ſurſum per rectas EB, FH, GI ducantur parallela lateri AK plana quæ faciant in plano KMO, ſectiones SM, ZL, YN; in planis verò ADOK, ABMK, DBMO ſectiones ES, FZ, GY: ductâ deniq; diagonali AO fiat ſectio per AO: quæ diuidat

uidat B M biſariam in P, & producat communes ſectiones A O, A V P, V Q, P Q, P X O, X R, P R, O R, T P.

His poſitis demonſtrauimus in præcedenti priſma inſcriptum toti fruſto cylindrico A B D O M K, cuius aduerſa plana ſunt triangula A B D, K M O, biſecari plano A P O.

Dico igitur ab eodem plano A P O biſariam quoque diuidi aggregata priſmatum quæ reſiduis fruſti cylindrici ſegmentis inſcribuntur, hoc eſt, ſolidum A F B G D I H A Q R O X P V A, æquari ſolido A V P X O R Q A K L N O Y M Z K A.

Demonſtratio.



a Per 140. parab.

QVoniam A E æqualis eſt E D, hoceſt S O, & E S æquidiſtat A K. erit A T æqualis T O, eſt autem P B æqualis P M, ex cōſtructione; igitur parallelogrammum eſt E B P T quemadmodum & figura P T S M. quia verò ſegmenta æqualia ſunt A H B, & B I D, hoc eſt K L M, M N O, & G I, F H diametri diuidunt rectas A B, B D biſariam in F & G, a erit triangulum A H B, æquale triangulo B I D, hoc eſt triangulo M N O. quare cùm etiam ſit altitudo B P æqualis altitudini M P, ex conſtructione; pars priſmatis habens baſim triangulum A H B, & altitudinem B P æquatur parti habenti baſim triangulum M N O, & altitudinem M P. ſed etiam totum priſma habens eandem baſim triangulum A H B, & altitudinem B M, æquale eſt priſmati ſuper baſi triangulari M N O, & altitudine B M; igitur A V P Q M Z K L reſiduum cuius baſis eſt triangulū A V P Q, æquatur P X O R B G D I, alteri reſiduo cuius baſis eſt triangulum P X O R. totum igitur ſolidum A F B G D I H A Q R O X P V A, æquatur ſolido toti A V P X O R Q A K L N O Y M Z K A. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium primum.

QVod ſi ſubtenſis A H, H B, B I, I D, biſariam rurſum diuiſis per diametros inſcribantur ſegmentis parabolę reſiduis noua rurſum triangula, atque ita procedatur in infinitum: actiſque per ſingula latera planis inſcribantur reſiduis cylindri parabolici ſegmentis priſmata alia, eodem diſcurſu demonſtrabimus, plano eodem illo A P O, biſariam ſemper diuidi aggregata priſmatica.

Corollarium ſecundum.

QVare conſequenter quoties planum A P O diuidit lineam B M biſariam, rectè inferri poterit cylindricum corpus parabolicum biſariam in partes æquales diuiſum eſſe ex eo quod in infinitum per conſtructionem præſcriptam inſcribi poſſint vtriſque æquales quantitates quæ ſemper plus dimidij reſiduorum auferant; vnde per ea quæ de progreſſionibus dicta ſunt, concluditur plano A P O biſariam diuiſum eſſe cylindricum ſegmentum quod baſi conſtat A B D & altitudine M B.

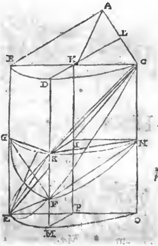
PRO-

PROPOSITIO XCIII.

SIt A B axis parabolæ C D B, & vngula parabolica A B E C in ſuo cylindro A C O E B; poſito deinde ſecundùm rectam B E exiſtentem in ſuperficie cylindri plano C B E O, exhibente in plano parabolico A E C, quod vngulam terminat communem interſectionem C E, in baſi verò cylindrica O M E rectam O E; diuidatur C B bifariam in K, & per K planum ponatur parallelum plano A B E, ſecans ſuperficiem cylindri ſecundùm rectam D M parallelam B E, planum verò C B E O, ſecundùm rectam K P occurrentem lineę C E, in puncto I, (in quo ipſam K P bifariam diuidi patet, ſunt enim C K, P E æquales, & parallelæ, ac propterea vt P E ad C K, ſic P I ad I K) diuiſâ inſuper D M bifariam in H, per rectam C I E, & punctum H ſectio fiat, formans in ſuperficie cylindri lineam C H E, & ſumpto in recta D H M, puncto quouis F, per C E & F, age planum quod faciat in cylindri ſuperficie lineam C F E, ponaturque per I æquidiſtans rectę C B recta N I G, per quam & puncta H & F, agantur plana N H G, N F G.

Dico ſolidum planis C H E, C F E terminatum æquari magnitudini quæ clauditur planis N F G, N H G.

Demonſtratio.



IVngantur I H, I F, C H, C F, G H, G F, & N H, N F, E H, E F. quoniam planum L D M æquidiſtat rectis B E, C O, erunt binæ pyramides I H F N, I H F C, item binæ I H F G, I H F E æquales. duæ igitur I H F C, I H F E æquantur duabus I H F N, I H F G. Atque hoc ipſum demonſtrari poteſt de alijs quantitatibus quæ formari poſſunt per ſubdiuiſionem ſegmentorum C D, D B in duo æqualia ſegmenta parabolica, continuando eandem conſtructionem inſcriptionis qua vſi ſumus præſenti propoſitione & præcedenti: igitur per ea a quę demonſtrata ſunt libro de progreſſionibus Geometricis conſtat quantitatem vngularem N H F G æqualem eſſe magnitudini quæ continetur planis C H E, C F E. Quod fuit demonſtrandum.

a Per 116. de progreſſ.

PROPOSITIO XCIV.

SEcetur vngula parabolica à recto cylindro decuſſata A B C D plano E F L quod baſi æquidiſtet; diuiſâ deinde A D bifariam in H, ponatur H B axis, ſecundùm quem fiat ſectio exhibens in cylindri ſuperficie rectam B C occurrentem ſectioni E F L, in puncto F. poſitis inſuper E F, F L, & A B, B D, plana conſtituantur A B C, D B C, & E F C, L F C quo-

P P rum

rum communes interſectiones cum baſi vngulari ſint rectę A C , C D & C E, C L.

Dico pyramidem vngulæ A B C D inſcriptam ad pyramidem incluſam vngulę E F C L, eandem habere rationem quam vngula A B C D ad E F C L vngulam.

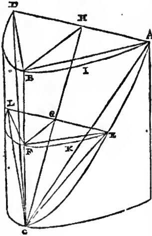
Demonſtratio.

a 86. huius.

b 127. parab.

c 240. parab.

d 241. parab.



Oſtenſum a eſt vngulam A B C D ad vngulam E F C L quintuplicatam habere rationem eius quam habet linea A H ad E G. ſed etiam pyramis A B C D ad pyramidem E F C L quintuplicaram habet rationẽ A H ad E G. quod ſic demonſtro: triangulum A B D quod eſt maximũ eorũ b quæ parabolę inſcribi poſſũt ad triangulum E F L, quod itẽ maximum eſt, eandem habet rationem, quam c parabola A B D ad E F L parabolam. ſed d parabola A B D ad E F L, triplicatã habet rationẽ A H ad E G. ergo & triangulum A B D ad triang. E F L, triplicatã habet rationẽ A H ad E G. Deinde B C altitudo pyramidis A D B C eſt ad F C altitudinem pyramidis E F L C, vt H C ad G C, hoc eſt vt quadratum A H ad quadratum E G, hoc eſt in duplicata rationis A H ad E G. Quare cùm ratio pyramidum A B D C, E F L C compoſita ſit ex ratione baſium A B D, E F L, & ratione altitudinum B C, F C, perſpicuum eſt eam eſſe quintuplicatam rationis A H ad E G, ac proinde eandem cum ratione vngularum quibus inſcribuntur. Quod erat propoſitum.

Corollarium.

Hinc ſequitur reſidua quoque vngularum quæ ſuperſunt ablatis pyramidibus inſcriptis aut incluſis, inter ſe eandem rationem continuare quæ reperta eſt inter ipſaſmet vngulas aut pyramides.

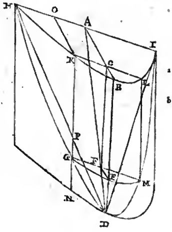
PROPOSITIO XCV.

Sit A B axis parabolę I H B, quæ baſis eſt vngulę parabolicæ A B D H. Factâ autem ſectione per axem A B, quę aſſignet in ſuperficie cylindrica rectam B D altitudinẽ vngulæ, ſit E D quarta pars rectę B D, ponaturque planum M E G parallelum baſi I B H, cum plano I D H ſectionem cõmunem faciens M G.

Dico totam vngulam I B D H ad vngulam M E D G, eam habere proportionem quam triginta duo ad vnum.

Demon-

Demonſtratio.



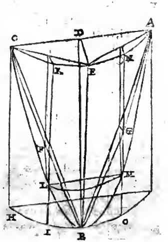
PEr 85. huius I M D G H, parabola eſt, diametrum habens A D. deinde quia parallela plana I B H, M E G ſecat planum parabolicum I M D G H, erunt a ſectiones I H, M G parallelæ. Quare cùm I H ſit ordinatim poſita ad A D, erit & M G. ducatur iam recta E F, erit hæc b parallela A B. ergo B D ad E D, vt A D ad F D, ſed A D eſt ad F D, in duplicata eius quam habet I A ad M F. ergo & ratio B D ad E D, hoc eſt ratio 4 ad 1. duplicata eſt rationis I A ad M F. Ergo ratio I A ad M F, eadem eſt cum ratione dupla, & inuertendo M F, eſt ad I A, vt 1 ad 2. continuetur ratio 1, ad 2, per ſex terminos nimirum 1, 2, 4, 8, 10, 32. Erit ergo ratio 1, ad 32, quintuplicata rationis 1, ad 2, hoc eſt rationis M F ad I A. Atqui ratio vngulę M D G ad vngulam I D H, quintuplicata c eſt rationis M F, ad I A. Ergo vngula M D G eſt ad vngulã I D H, vt 1, ad 32. Quod erat demonſtrandum.

a 16. vndec.

b ibid.

c 86. huius.

PROPOSITIO XCVI.



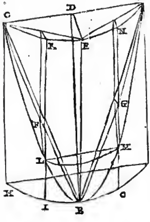
VNgula parabolici cylindri recti ſit diuiſa ſectione D E B, per axem parabolæ A E C exhibente in cylindri ſuperficie rectam E B, iunctiſque A E, C E fiant plana per A E B & C E B, occurrentia baſi vngulari A B C ſecundùm lineas A B, B C; deinde per has rectas A B, B C plana ponantur diuidentia lineas N O, K I determinatas in 92. huius bifariam, formãtia in cylindri ſuperficie lineas curuas A G B, B F C.

Dico vngulam totam A E B C maiorem eſſe pyramide incluſa A E B C, vnà cũ ſegmẽto cylindrico C E B I H C, magnitudinibus quæ ſuperficiebus comprehenduntur A G B, A M B; & C F B, C L B.

Demonſtratio.

OStenſum eſt d ſegmentum cylindricum baſeos C K E, & altitudinis K I bifariam diuiſum eſſe plano B F C quod ducitur per punctum F in quo biſecatur recta K I, ſi- d Coroll. 2. 91 huius.

 militer

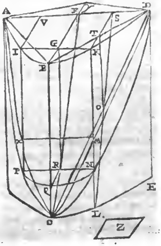


militer ſegmentum cylindricum ſuper baſi ANE, & altitudine EB biſectum eſſe plano AGB. Cùm igitur æqualia ſint ſegmenta parabolica ANE, EKC, æqualia quoque ſunt ſegmenta cylindrica communis altitudinis illis ſegmentis parabolicis inſiſtentia; vnde pars AGBE, æqualis eſt parti BFCH, ac binæ partes AGBE, EBFC, toti ſegmento EBHC æquales ſunt. Quare cùm ſegmẽta vngularia AMBE, EBLC: quæ vnà cum pyramide vngulam conſtituunt, ſuperent ſegmenta AGBE, EBFC magnitudinibus, quæ clauduntur planis AGB, AMB; BFC, BLC, (ſunt enim illæ planis AGB, CFB, ab vngula reſectæ) ſi ſegmentis vngularibus AMBE, EBLC, & ſegmento EBHC, addatur communis pyramis AECB; ſegmenta vngularia AMBE, EBLC vnà cum pyramide, (hoc eſt tota vngula) ſuperabunt ſegmentum EBHC, vnà cum pyramide, magnitudinibus, quę ſuperficiebus comprehendũtur AGB, AMB; & CFB, CLB. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCVII.

VNgulæ ABCD ab cylindro parabolico recto abſciſſæ, baſis ſit parabola ABD, cuius axis BF & ordinatim poſita AD, diuiſo axe FB in G, vt BG ſit quarta pars BF, per G ponatur IK ordinatim ad axem; & ſecundùm lineas BF, eiuſq; parallelam KS, & tertiam BD plana agantur FBC, SKL, DBC: poſita deinde diagonali CD occurrente communi interſectioni TO planorum DBC, SKL in O, erigatur recta OM quæ æquidiſtet TK, & per DC, OM ſectio fiat, exhibebit illa a DMC parabolam. Tandem per KI planum, ponatur rectæ BC æquidiſtans, occurrens ACD ſectioni ſecundùm rectam PN, agaturque PQN planum quod æquidiſtet baſi ABD.

a 15. huius.



Dico vngulam PQCN æqualem eſſe magnitudini contentæ parabolicis planis DMC, DNC.

Demonſtratio.

QVoniam FB diuiſa eſt in G, vt GB quartæ parti ipſius FB æqualis exiſtat, igitur AF dupla eſt rectę IG; nam ratio FB ad

FB ad GB, duplicata eſt FA ad IG. Vnde poſitâ IV quæ æquidiſtet BF, erit VS hoc eſt IK æqualis FD, ac proinde FB dupla ST, & ST dupla TK, eſt enim GB æqualis [a] TK, cùm ſegmenta parabolica ſint æqualia IBK, BKD ob æquales lineas VS, FD. quia verò æquidiſtant rectę KN, TO & ſimiliter ex conſtructione TK rectæ OM, erit KM æqualis TO, & quia BD dupla eſt TD, erit quoque BC hoc eſt KL, dupla KM; ac proinde KM æqualis ML: eſt autem ST dupla TK, igitur etiam KM dupla MN, hoc eſt NL: nam KM æqualis eſt ML, & KM dupla MN, igitur NL æqualis eſt MN. Igitur KL quadrupla eſt NL. eſt autem FB ad BG, vt BC ad CQ; quare BC, hoc eſt KL quadrupla eſt QC, hoc eſt NL, ęquales igitur ſunt lineæ QC, NL hoc eſt NM. Quare pyramis baſim habens triangulum RQC, & altitudinem RN æquatur pyramidi habenti baſim triangulũ OMN, & altitudinem DS, hoc eſt SF, hoc eſt RN. quare per propoſitionem quam paulò ante pręmiſimus tota vngula PQCN æquatur magnitudini incluſę planis DMC, DNC. Quod demonſtrare oportuit.

a Ex 133. & 118. de parab.

PROPOSITIO XCVIII.

Iiſdem poſitis:

Dico vngulam totam ABCD ſuperare pyramidem maximam vngulæ inſcriptam ſimul cum cylindri ſegmento baſeos BTKD, & altitudinis BC, magnitudine DMCND bis ſumpta.

Demonſtratio.

Oſtenſum [b] eſt ſegmentum BKLD plano DMC, in duas æquales partes diuiſum eſſe. quare BCMD dimidium eſt ſegmenti cylindrici BKLD, ac proinde æquale ſemiſegmento cylindrico AXCB: eſt verò tota vngula æqualis pyramidi inſcriptę [c] ſimul cum duobus ſemiſegmentis AXCB, BCMD inſuper adiunctis quãtitatibus quæ determinantur parabolis AXC, APC & DMC, DNC. Igitur exceſſus quo vngula excedit pyramidem inſcriptam ſimul cum ſegmento BTKLD, ſiue duobus ſemiſegmentis cylindricis AXCB, BCMD æqualis eſt duabus quantitatibus quæ intercipiuntur planis AXC, APC & DMC, DNC hoc eſt DMCND bis ſumpto. Quod oportuit demonſtrare.

b Coroll. 2. 92. huius.
c 96. huius.

PROPOSITIO XCIX.

Oporteat vngulæ cylindri parabolici parallelepipedum æquale exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.

Demonſtratum eſt inſuper proportionem vngulę PQCN ad vngulam ABCD eſſe [d] vnius ad triginta duo. Igitur vngula PQCM bis ſumpta ad totam vngulam ABCD rationem continet duorum ad triginta duo: ſed vngula PQCN, æquatur quantitatibus AXCPA vel DMCND, ablatis igitur magnitudinibus AXCPA & DMCND quæ ſingulæ æquales ſunt vngulæ PQCN, ab vngula ABCD, remanebit quantitas quæ ad vngulam PQCN, rationem obtinebit quam triginta ad vnitatem: eſt autem vngula [e] ablatis quantitatibus AXCPA & DMCND, æqualis pyramidi inſcriptę vngulæ, ſimul cum ſegmento cylindrico quod baſi inſiſtit BTDK ſub altitudine BC: & nota quoque eſt proportio huius ſegmenti BKLD ad pyramidem inſcriptam vngulæ, cùm ſuperficies BKD parabolica [f] quadrata ſit, igitur ſit pyramis habens baſim ABDγ, & altitudinẽ BC ęqualis pyramidi inſcriptę vngulæ ABCD, vnà cum ſegmento BTKLD, igitur pyramis AγDBC ad vngulam PQC rationem habet quàm triginta ad vnum. igitur ſi trigeſimæ parti baſeos ABDγA ſit æqualis Z, & ſub Z & altitudine BC pyramis conſtituatur, erit hæc æqualis vngulæ PQCM. vnde exhibuimus pyramidem & conſequenter parallelepipedum æquale vngulæ parabolicæ. Quod erat faciendum.

d 95. huius.
e 96. huius.
f 139. huius.

Corollarium.

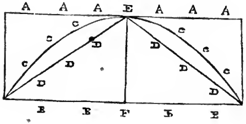
HInc manifeſta eſt ratio dignoſcendi proportionem inter vngulam parabolicam, & cylindrum parabolicum qui vngulam continet, vel inter vngulam & reſiduum quod cum vngula parabolica cylindrum perficit. ex libro etenim quem præmiſimus de parabola methodus colligi poteſt reducendi cylindrum parabolicum ad parallelepipedum illi æquale: cum verò hac præſenti propoſitione praxis demonſtrata ſit etiam vngulam ad parallelepipedum reducendi, quod eidem ſit æquale; qui horum parallelepipedorum rationem cognouerit, etiam proportiones cognitas habebit, quæ ſunt inter cylindrum parabolicum eiuſque vngulam.

PROPOSITIO C.

REctangulo A B inſcripta ſit parabola C B, cuius axis E F & ordinatim ad eundem poſita B B, iungantur E D.

Dico corpus ex ductu ſuperficiei A C in altitudinem E F (ſcilicet inuolucrum cylindri parabolici ſuper baſi parabolica B C & altitudine E F,) ad ipſum cylindrum parabolicum habere rationem vt vnum ad duo.

Demonſtratio.



SVnt enim hæc corpora inter ſe vt baſes, cùm communem habeant altitudinem: ſed oſtenſum eſt [a] baſim parabolicam C B duplam eſſe baſeos C A; igitur patet veritas propoſitionis.

a Ex 137. parab.

PROPOSITIO CI.

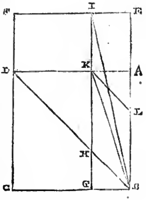
SIt A B C quadratum cuius latere B A producto in E, vt A E ſit dimidia A B, compleatur parallelogrammum B F; ductâ denique diagonali B D, ponatur quæuis G I parallela A B.

Dico pyramidem habentem altitudinem B G, & baſim G H I rectangulum æqualem eſſe ſolidæ magnitudini quæ ſit ex plano B G H, ducto in planum B A K H.

Demon-

Demonſtratio.

DVcantur B I, B K: deinde fiat K L parallela B H. oſtenſũ eſt libro de ductibus trianguli B H G, ductum in triangulũ K B H, duplam magnitudinẽ producere eius quod producit B H G, ductum in L K B triangulum, at pyramis habens baſim G H I rectangulum, & altitudinem B G continet præter pyramidem ex baſi G H K, & altitudine B G inſuper pyramidem ex baſi G H, K I, & communi altitudine G B. Oſtendendum igitur eſt corpus ex baſi G H, K I, & altitudine B G æquari magnitudini quæ reſultat ex ductu ſuperficierum B H G & A K B inter ſe. nam reliquum eſt commune, ſcilicet pyramis ex rectangulo G H K, ducta in altitudinem B G; æqualitatem verò iſtam ſic oſtendo. Quoniam A B dupla eſt ex conſtructione rectæ K I. Igitur vt oſtenſum eſt in libro de ductibus B G H, ductum in A K B æquale producit ſolidum pyramidi quæ fit ex ductu B G H in I K B. Igitur patet pyramidem ex ductu B G H in B H I, hoc eſt pyramidem ex baſi G H I & altitudine B G, æquari ſolido quod reſultat ex ductu B G H in B H K A.



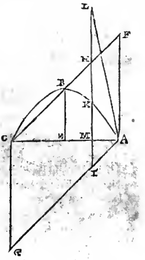
PROPOSITIO CII.

SIt parabola A B C habens axem B E, æqualem A E ordinatim poſitæ, & fiat A F orthogona A C, eidemq; æqualis. Ductâque A G quę æquidiſtet C F, ponatur C G parallela A F. Denique ponatur quæuis H I parallela B E, ſecans parabolam in K, productâ verò I H, vt H L ſit æqualis B E dimidiæ nimirum ipſius A F, ponatur A L.

Dico pyramidem cuius baſis A M L rectangulum & altitudo A M, æqualem eſſe ſolidę magnitudini quæ baſim habet A K M & altitudinem B E.

Demonſtratio.

PRæcedenti propoſitione oſtenſum eſt pyramidem cuius baſis eſt I M L, ſiue A M L rectangulum & altitudo A M, æquari ſolidæ magnitudini quę fit ex ductu plani A M I in planum A M H F. demonſtratum quoque eſt in Corollario 82. huius, eidem ſolido quod fit ex ductu plani A M I in planum A M H F, æquari ſolidam magnitudinem quæ baſim habet ſegmentum parabolicum A K M, altitudinem B E. Ergo pyramis cuius baſis eſt rectangulum I M L, altitudo A M, æquatur ſolidæ magnitudini cuius baſis eſt A K M altitudo B E. Quod erat demonſtrandum.

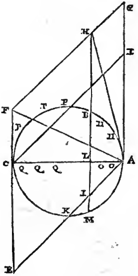


PROPOSITIO CIII.

Circulum A B C maximum in ſphæra A B C K, cuius diameter A C, contingant A D, C E æquales diametro & iungantur D C, A E. productis deinde E C in F, & A D in G, vt D G, F C ſint æquales ſemidiametro, circuli ponantur F G, & F A. ſecet deinde H I æquidiſtans G A, circulum in B, & ponatur A H.

Dico ſphæram A B C plano ducto per H B I, recto ad planum circuli A B C, diuiſam eſſe ſecundùm eam rationem quam habet pyramis ex ductu trianguli A C E in A C F triangulum, ad pyramidem quæ fit ex triangulo A L I ducto in A L H triangulum.

Demonſtratio.

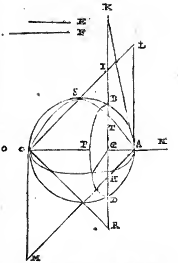


Est enim ratio ſemicirculi A B C ducti in ſe ad partem A B L, in ſe ductam vt eſt ſphæra A B C K, ad partẽ B A M, nã quadrata P Q & N O, eandem inter ſe rationem ſeruant quam circuli radijs P Q & N O deſcripti. quàm ſequelã propoſitione cẽteſimâ vigeſimâ nonâ huius exactiùs & vniuerſaliter probabimus: ſed habetur ex præcedẽtibus ſemicirculũ A B C ductũ in ſe ad partem A N B L, in ſe ductam, eam obtinere rationem quam A C E, ductum in A C F ad A L I, ductum in A L H, igitur etiam ſphæra ex circumductu A B C, ſemicirculi circa axem A C ad partem ſphæræ quæ fit ex circulatione A N B L ſuper axe A L, eam habet rationem quam pyramis ex A C E in A C F producta, ad pyramidem ex A L I in A L H triangulum. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CIV.

His poſitis datam ſphæram ſecundùm quamuis rationem diuidemus alia rurſum praxi quàm Archimedes.

Conſtructio & demonſtratio.



DEtur igitur ſphæra ABCD diuidenda ſecundùm rationem quam habet E ad F, ducta ſectio per axem AC exhibeat circulum ABC, producatur eius diameter vtrimque vt AN & CO, ſint æquales ſemidiametro. Atque ita diuidatur AC in G, vt pyramis baſim habens rectangulum AGC, altitudinem AG, ſit ad pyramidem cuius baſis rectangulum CGN, altitudo CG, in ratione datâ E ad F, hac ratione inuento in axe AC puncto G, fiat per G ſectio recta ad axem AC Dico partem ſphæræ ABD ad reſiduum BCD, eam habere rationem quam habet E linea ad F. quod ex ijs quæ demonſtrata ſunt proximis propoſitionibus manifeſtè poteſt conſtare. erectis enim AL, CM perpendicularibus ad axem AC, quæ ſint ipſi axi æquales, iungantur LC, AM & normaliter ad diametrum ponantur GK, GR æquales rectis GO, GN, connectantur item AK, CR. denique inſeribatur circulo maximo parabola ASC axem habens ſemidiametro PS parem. Quoniam AL, AC ſunt pares, etiam 4. 6. IG par eſt GC. Quare cùm tota GK par ſit toti GO, erit & reliqua IK par reliquę CO. ſed CO eſt par ſemidiametro. ergo & IK ſemidiametro par eſt, adeoque dimidia eſt ipſius AL. pari modo oſtendam HR eſſe dimidiam ipſius CM. prætereà quoniam AG, CG ipſis HG, IG eodem diſcurſu æquales ſunt, rectangula AGO, CGN, ſunt rectangula HGK, IGR, ac proinde pyramides, quarum baſes ſunt rectangula AGO, CGN, altitudines autem AG, CG æquantur pyramidibus quarum baſes rectangula HGK, IGR, altitudines verò HG, IG. Quare cùm priores pyramides ſint inter ſe vt E, F, erunt & poſteriores vt E ad F. iam verò poſteriores pyramides, quarum nempe baſes ſunt rectangula HGK, IGR, altitudines HG, IG, æquantur[a] ſolidis quorum baſes ſunt ſegmenta a 101. huius.
parabolæ ATG, ESTG. altitudo verò communis SP. ergo ſolida illa parabolica
ſunt vt pyramides ſupradictæ, ſed vt illa ſolida parabolica, ita ſunt ſegmenta [b] vngularia quorum baſes portiones ſemicirculi ABG, GBSC: Vt autem vngularia b 8. huius.
illa ſegmenta [c] ita ſunt portiones ſphæricæ BAD, BCD. ergo portiones ſphæricæ ſunt inter ſe vt ſupradictę pyramides. Atqui has oſtendi ſuprà, datam inter ſe ſeruare rationem E ad F. Ergo etiam ſphæricæ portiones ſunt inter ſe vt E ad F. Igitur ſphæram diuiſimus ſecundùm datam rationem E ad F. Quod fuerat requiſitum. c 77. huius.

Corollarium.

POſita igitur recta NO diuiſa in quatuor partes æquales in A, P & C, ſi diuidatur recta NO, in G vt quadratum AG multiplicatum per GO ad quadratum GC, multiplicatum per GN proferat rationem datam E ad F, diniſa erit ſphæra ſecundùm rationem datam. Archimedes quidem paulò aliter ſuam pręparationem conſtruit, quam non minùs imperfectam reliquit, atque ea eſt quam nos exhibuimus, Lectori proinde non ingrata fore exiſtimo, quæ hic deduximus.

PARS SEXTA.

De Sphæroide.

Cylindri & ſphæræ nonnullas proportiones earumq; partium conati ſumus hucvſque explicare; & quia ad rem noſtram non parum facit materia Sphæroidica & Conoidica cuius reductio ad magnitudines cubicas à circuli quadratura maximè dependet, hinc eam intactam prætermittere nefas videtur: conabimur itaque hoc paruo tractatu proprietates Sphæroidis magis obuias ac neceſſarias inueſtigare ac demonſtrare.

DEFINITIO PRIMA.

SEmiellipſeos alter axium ita intelligatur conſtitutus vt circa eum immotum ipſa ſemiellipſis in orbem agatur donec in eundem locum redeat à quo moueri cœperat; ſolidum ex hac reuolutione formatum Sphæroides vocetur.

DEFINITIO SECVNDA.

Axem Sphæroidis voco lineam quę in eiuſdem formatione immota manſit; eſtq; ſimul axis ellipſeos quę conoides genuit.

DEFINITIO TERTIA.

Centrum Sphęroideos dicatur punctum quod in formatione centrum fuit ellipſeos, ſimulque eſt centrum omnium figurarum quæ per ipſum tranſeunt.

Scholion.

NOtatu dignum videtur duplex eſſe Sphæroides, vnum quod formatur ſuper axe maiore ellipſeos, alterum quod fit ſub minore, quod quoniam lenticularis forma figuram exhibet, à Geometris videtur prætermiſſum qui oualem figuram cum elliptica confundere conſueuerunt: quæ igitur ſequentibus propoſitionibus adducemus, vtrique ſphæroidi, & ouali & lenticulari communia eſſe volumus.

DEFINITIO QVARTA.

Similes ellipſes dicantur quę axes habent proportionales.

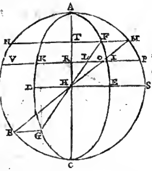
PROPOSITIO CV. LEMMA.

ELlipſim cuius axis A C contineat circulus A B C, contingens in A & C, ductâ deinde quouis F G, quę occurrat axi in H, ponatur quęcunque I K ordinatim ad axem A C ſecans F G in L. Denique per H ponatur H E ordinatim ad axem A C, & per F recta M T ordinatim ad A C, & ducatur M H B occurrens rectæ I K in O.

Dico S H quadratum ad E H quadratum eam rationem obtinere quam P O V rectangulum ad I L K.

Demon-

Demonſtratio.



VT M T ad F T, hoc eſt a vt P R ad I R, ita eſt O R ad L R, cùm igitur ſit vt totum P R ad totum I R, ita ablatum O R ad L R ablatum erit reſiduum P O ad reſiduum I L, vt totum P R ad totum I R, hoc eſt vt S H ad E H. Deinde iam oſtenſum eſt O R eſſe ad L R, vt P R ad I R, hoc eſt vt V R ad K R. ergo componendo V O eſt ad O R, vt K L ad L R: & permutando V O eſt ad K L, vt O R ad L R. hoc eſt vt M T ad F T, hoc eſt rurſum vt S H ad E H, ratio ergo quæ componitur ex rationibus P O ad I L, & V O ad K L, hoc eſt ratio rectangulorum P O V, I L K, eſt duplicata rationis S H ad E H, hoc eſt, eadem cum ratione quadrati S H ad E H. Quod fuit demonſtrandum.

a *Vide Scholion prop. 4. ellipſ.*

PROPOSITIO CVI. LEMMA.

Iſdem poſitis:
Dico rectangulum F L G ad F H G rectangulum eam obtinere rationem quam rectangulum I L K ad E H D rectangulum.

Demonſtratio.

Ratio rectanguli F L G ad F H G rectangulum cõponitur ex ratione F L ad F H, hoc eſt M O ad M H, & ex ratione L G ad H G, hoc eſt O B ad H B, ſed ex ijſdem rationibus componitur ratio rectanguli M O B ad rectangulum M H B. ergo ratio rectangulorum F L G, F H G eadem eſt cum ratione rectangulorum M O B, M H B. ſed ratio rectangulorum M O B, M H B eadem eſt cum ratione P O V ad S H quadratum, cùm tam rectangula b M O B, P O V, quàm rectangulum M H B & quadratum S H ſint æqualia. igitur etiam ratio F L G ad F H G, eadem eſt cum ratione P O V ad S H quadratum, ſed ratio c P O V ad S H quadratum, eadem eſt cum ratione I L K ad H E quadratum. Igitur rectangulum F L G ad F H G, eſt vt I L K rectangulum ad rectangulum E H D. Quod erat demonſtrandum.

b *35. huius.*
c *Per præc.*

PROPOSITIO CVII. LEMMA.

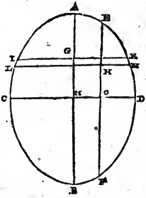
Iſdem poſitis:
Dico F L G rectangulum ad rectangulum I L K eam habere rationem quam quadratum F H ad H E quadratum.

Demonſtratio.

Eſt enim d rectangulum F L G ad F H G, vt I L K ad E H D. Igitur permutando vt F L G ad I L K, ita eſt F H G, hoc eſt F H quadratum ad E H D, hoc eſt quadratum E H.

d *Per præced.*

PROPOSITIO CVIII. LEMMA.



Sint AB, CD axes elliptici; recta verò EF æquidiſtans axi ſecans CD in O, diuiſa ſit rurſus in H, vt eſt diuiſa AB in G, & ponantur IGK, LHM ordinatim ad axem.

Dico rectangulum LHM ad COD rectangulum eam habere rationem quã IG quadratum ad CN quadratum.

Demonſtratio.

a 4. Ellipſ.

b 106. huius.

ESt enim quadratum IG ad CN quadratum, vt a AGB rectangulum ad rectangulum ANB, hoc eſt quoniam AB, EF, ſimiliter ſunt diuiſæ, vt rectangulũ EHF ad EOF. ſed vt EHF rectangulum ad EOF, ita eſt b LHM ad COD rectangulum. igitur vt LHM rectangulum ad rectangulum COD, ita eſt IG quadratum ad CN quadratum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CIX.

OMnis ſectio ſphæroideos per axem facta exhibet ellipſin à qua ſphæroides formatum eſt.

Demonſtratio.

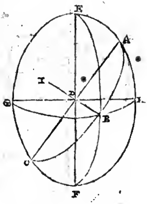
NOn indiget propoſitio vlteriore demonſtratione quàm eâ quæ ex definitione prima poteſt aſſumi: cùm enim per ellipſis determinatæ circulationem ſuper axe immoto ſphæroides formetur, igitur in omni parte circulationis eadem ellipſis reperietur quæ ſphæroides efformat.

PROPOSITIO CX.

OMnis ſectio ſphæroidis per centrum facta recta eſt ad aliquod planum ductum per axem ſphæroideos.

Demon-

Demonſtratio.



SIt ABC ſectio per centrum ſphæroideos D obliqua ad axem EF, (nam de recta dubium eſſe non poteſt) erigatur igitur a ex D, centro normaliter ad planum ABC recta DI, & per ID, & axem EF planum EGF conſtruatur. Dico planum ABC rectum eſſe ad planum EDGF, quod per axem tranſit, nam ID cùm ſit ex conſtructione recta ad planum ABC, igitur b etiam planũ EDGF, per ipſam ductum rectum eſt ad planũ ABC. Quod erat propoſitum.

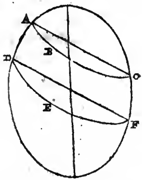
a Per 11. undecimi.

b 18 undecimi.

PROPOSITIO CXI.

OMnis ſectio ſphæroidis per centrum non tranſiens recta eſt ad aliquod planum quod per axem ſphæroideos duci poteſt.

Demonſtratio.



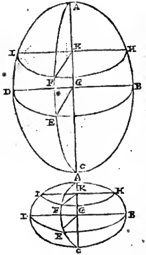
SIt ABC ſectio ſphæroidis non per centrum acta, ſit autem DEF, per centrum poſita æquidiſtans plano ABC. Quoniam oſtenſum eſt plano DEF aliquod per axem poſſe conſtitui quod eidẽ orthogonaliter inſiſtat, igitur plano ABC. æquidiſtanti idem planum orthogonum erit, fieri itaque poteſt, quod propoſitio aſſerit.

PROPOSITIO CXII.

OMnis ſectio ſphæroidis normalis ad axem qui in conſtructione ſphæroideos immotus fuit circulum exhibet.

 Demon-

Demonſtratio.



a 109. huius.

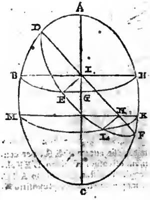
b ibid.

SIt ſphæroides A B C cuius axem immorum A C diuidat ſectio H F I orthogonaliter. Dico illam circulum eſſe. fiat ſectio per A C axem ſcilicet, erit [a] hæc ellipſis illi ſimilis à qua ſphęroides productum eſt: ſit autem communis ſectio plani A B C D, & plani H F I recta H I, tandem per punctum F, quoduis in ſuperficie ſphæroidis aſſumptum, & axem A C, planum agatur A F C occurrens plano H F I, ſecundùm lineam K F. erit ſectio A F C ellipſis [b] ſimilis & æqualis ellipſi A B C D. Et quoniam ex hypotheſi axis A K rectus eſt plano H F I, defin. 3. vndecimi erunt K F, K H normales axi, ac proinde ordinatim poſitę ad axem. Quoniam igitur ad idem punctum axeos communis ellipſium æqualium & ſimilium ſint ordinatim ductæ K H, K F erunt inter ſe æquales, eſt verò & I K æqualis K H. ergo K H, K F, K I æquales ſunt. ſectio igitur H F I circulus eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXIII.

OMnis ſectio ſphæroideos ellipſim exhibet ſi obliqua eſt ad axem.

Demonſtratio.



c 111. huius.

SEcetur ſphæroides A B C ſectione D E F, quæ ſit obliqua ad axem A C. Dico illam eſſe veram ellipſim, intelligatur facta ſectio A B C per axem A C, quæ ſit recta ad planum D E F quod fieri poſſe demonſtratum eſt [c]. Deinde ex puncto I interſectionis plani per axem A C cum plano D E F erigatur normaliter I E, erit ergo I E, linea in plano D E F; quoniam ex ſuppoſitione orthogonaliter inſiſtit plano A B C, per rectam igitur I E planum agatur H E B, quod ſit rectum ad axem A C, aſſumpto deinde quouis N puncto in communi interſectione planorum A B C, D E F, erigatur N L parallela I E. erit hæc N L in plano D E F, quod eſt ex constructione orthogonum ad planum A B C. per N L, denique agatur planum K L M parallelum B E H. Quoniam [d] H E B, K L M circuli ſunt, igitur H I B rectangulum eſt ad K N M rectangulum, vt eſt quadratum I E ad N L quadratum. ſed vt [e] rectangulum H I B ad rectangulum K N M, ita eſt rectangulum D I F ad D N F rectangulum; igitur vt quadratum I E ad N L quadratum, ita eſt D I F rectangulum ad rectangulum D N F, quare vera ellipſis eſt ſectio D E L F. Quod fuit demonſtrandum.

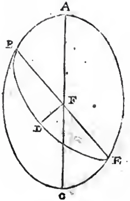
d 112. huius.

e 106. huius.

PROPOSITIO CXIV.

SPhæroides ſectum plano per axem ſecetur & altero plano per centrum priori ad angulos rectos.

Dico communem interſectionem horum planorum ab axe biſectam eſſe.



Demonſtratio.

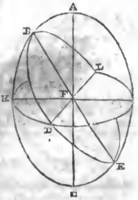
SIt planum A B C per axem A C, alterum quoque planum B D E, per centrum F conſtitutum priori ad rectos angulos, producat communem interſectionem B E. Dico illam in F biſectam eſſe. nam B F E linea eſt non minus in plano A B C quã ſit in plano B D E. ſed prout eſt in plano A B C elliptico tranſit per F centrum ellipſeos, ac proinde biſariam in F diuiſa eſt, igitur etiam prout eſt in plano B D E, biſecta eſt. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXV.

PLano per centrum ſphæroidis poſito ſi aliud normaliter per axem iſti inſiſtat; communis interſectio exhibebit axem ſectionis quę per axem ſphæroideos non tranſit.

Demonſtratio.

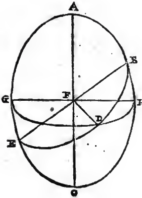
SEcetur ſphæroides A B C plano B D E, per centrum ſphæroideos F; agatur deinde planum per A C axem ſphæroidis quod normaliter plano B D E inſiſtat, exhibens communem interſectionem rectam B E. Dico B E axem eſſe ſectionis B D E. per centrum F ponatur planum G D H rectum ad axem A C, erit [a] hoc circulus, & quidem [b] plano A B C rectus. ſit autem D F L communis ſectio planorum G D H, B D E. quia verò A B C ellipſis eſt cuius F eſt centrum, ergo recta B F æqualis eſt F E, eſt autem etiam F D æqualis L F utpote in circulo G D H L, per centrum acta, deinde quia plana B D E, G D H, recta ſunt plano A B C, erit [c] D F L communis eorum ſectio recta plano A B C. quare cùm D L ſit diuiſa bifariam in F, diuidatq́ue B E bifariam ad angulos rectos, neceſſariò B E & L D, axes erunt ſectionis B D E, quæ vera ellipſis oſtenſa eſt.



a 112. huius.
b 18. undec.
c 19. undec.

PRO-

PROPOSITIO CXVI.



OMnis linea in quouis plano poſita quod per centrum ſphęroideos tranſit biſecatur à centro ſphæroidis.

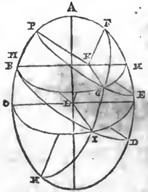
Demonſtratio.

SIt ſphæroides A B C ſectum plano B D E, per centrum F, ducta verò ſit in plano B D E recta BE per centrum F. Dico illam biſectam eſſe in puncto F. Agatur enim planum per A C axem ſphæroideos A B C quod rectum ſit ad planum B D E, erit B E horum planorum communis interſectio, quàm ex 114. huius perſpicuum eſt biſectam eſſe in centro F. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO CXVII.

SEctio ſectioni per axem factæ ſi æquidiſtans fuerit, eidem ſimilis erit.

Demonſtratio.



POnantur in ſphæroide A B C duo plana parallela P G E, B I D. Vnum ſcilicet per centrum B I D, alterum eidem æquidiſtans. Dico illas ſectiones inter ſe ſimiles eſſe. Agatur planum A B C per axem ſphæroideos rectum ad plana parallela, occurrens illis ſecundùm lineas P E, B D: erunt igitur P E, B D axes [a] ſectionum per centrum ſphæroideos & ſectionis P G E, erigatur normaliter ad planum A B C recta L I, diuiſâ deinde P E bifariam in K, agatur planum per K quod tranſeat per L I lineam nimirum F G I H, exhibens K G communem interſectionem cum plano P G E, cum plano autem per axem ducto A B C, interſectionem F H, quę [c] erit axis ellipſeos F G H, erit itaque K G normalis ad P E, cùm ſit æquidiſtans L I. vnde rectangulum F K H, eſt ad rectangulũ F L H vt [d] P K E rectangulum ad rectangulum B L D. ſed vt rectangulum F K H ad F L H, ita eſt quadratum K G ad L I quadratum, cùm ſectio F G H ſit elliptica cuius axis eſt F H. Igitur vt rectangulum P K E ad B L D, ita eſt quadratum K G ad L I quadratum, igitur vt P E ad B D, ita eſt K G ad L I, ſunt autem P E, K G & B D, L I axes ellipſeon. Quare ſimiles ſunt hæ ſectiones, quod demonſtrare oportuit.

a 115. *huius.*

b *ibid.*

c 106. *huius*

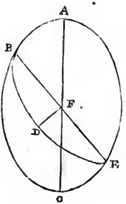
d 4. *ellipſ.*

P R O-

PROPOSITIO CXVIII.

Dati ſphæroidis axem exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



Sit ſphæroides A B C, cuius axem oporteat exhibere, fiat ſectio quæcunque E D B. erit ea a aut circulus, aut ellipſis. Inuento huius ſectionis axe E B, per E B, fiat ſectio A B C ad angulos rectos ſectioni EDB. erit ea rurſus ellipſis. Inueniatur denique ſectionis A B C axis A C. Dico A C axem quoque fore ſphęroideos. cùm enim ſectio A B C ad angulos rectos conſtitura ſit ſectioni E D B tranſiens per axem E B, erit b in plano A B C axis ſphęroidis, ac proinde A B C ellipſis erit facta per axem à qua ſphęroides formatum eſt; axis ergo eſt A C ſphæroideos A B C. Quod erat demonſtrandum.

a 112 & 113. huius.

b Colligitur ex 115. huius.

PROPOSITIO CXIX.

Dati ſphæroideos centrum aſſignare.

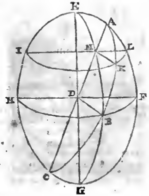
Conſtructio & demonſtratio.

Inuentus axis A C diuidatur bifariam in F. Dico F, punctum eſſe quæſitum, eſt enim hoc ipſum centrum ellipſeos ex qua ſphæroides formatum eſt per quod omnis linea in ſphæroide poſita biſecatur.

PROPOSITIO CXX.

Omnis ſectio per centrum tranſiens obliquè ad axem, ellipſin exhibet diſſimilem illi quæ per axem facta eſt.

Demonſtratio.



Sit ſectio ABC per centrū ſphæroideos D obliqua ad axem. Dico A B C eſſe ellipſim diſſimilem E F G ſectioni quæ facta eſt per axem.

Quod A B C ſit ellipſis patet ex 113. huius.

Quod autem ſimilis non ſit inclinata ſectio A B C ſectioni E F G ſiue E B G, ſic oſtendo. ſit E F G ſectio per axem ſphæroideos recta plano A B C (fieri enim id poteſt per 110.) per centrum autem fiat ſectio H B F ad axem E G recta, (per 18. vndecimi etiam recta erit plano E F G,) faciens cum plano A B C communem ſectionem B D; cum plano autem E F G ſectionē D F. quoniam igitur plana H B F, A B C ambo recta ſunt plano E F G, erit per 19. vndecimi communis eorum ſectio B D recta plano E F G, ac proinde per defin. 3. 11. etiam

a 115.huius recta ad A C, quæ axis [a] eſt ſectionis A B C. ergo B D alter axis eſt ſectionis A B C. ſimiliter perſpicuum eſt E D, D F axes eſſe ellipſeos E F G. quoniam verò H B F

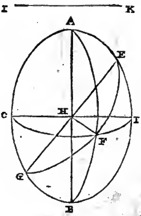
b 111.huius [b] circulus eſt, æquales ſunt D F, D B. his poſitis propoſitum ita concluditur non eſt axis E D ad axem D F, vt axis A D ad axem D B, hoc eſt D F. Quod tamen iuxta definitionem 3. requiritur ad ellipſium ſimilitudinem.

Corollarium.

EX demonſtratis patet axem minorem ſphæroideos eſſe communem omnibus ſectionibus ellipticis per centrum factis.

PROPOSITIO CXXI.

SEctio per axem maiorem maxima eſt omnium ſectionum, quæ in ſphæroide fieri poſſunt, ſicut ſectio per axem minorem minima.



Demonſtratio.

SInt duo axes ſphęroideos A B, C D & ſectio per illos facta exhibeat ellipſim A C B D. Dico illam eſſe maximam omnium ſectionum quæ in ſphæroide fieri poſſunt. Erigatur H F normaliter ad planum A C B. Deinde per quamlibet lineam H E in plano A C B, & lineam H F ſectio ponatur E F G. Dico illam eſſe minorem plano A C B. Per rectas A B, H F fiat ſectio A F B, erit ſectio A F B æqualis ſectioni A C B, ſed A F B ſectio eſt maior ſectione E F G cùm linea A H ſit maior axis, ac proinde maior quauis diametro H E. Igitur etiam A C B maior eſt ſectione E F G. Igitur ſectio per axem maiorem maxima eſt omnium ſectionũ quæ in ſphæroide fieri poſſunt, minimam autem eſſe C F D manifeſtius eſt quàm vt demonſtrari debeat.

PROPOSITIO CXXII.

DAtâ quauis I K lineâ quę ſit minor axe maiore ſphæroideos, maior autem axe minore eiuſdem, oporteat ellipſin exhibere in ſphæroide cuius axis æqualis ſit datæ lineæ I K.

Conſtructio & demonſtratio.

INuento axe ſphęroideos A C B ducatur ex centro eiuſdẽ circulus interuallo dimidio datæ I K, occurrens ſectioni A C B per axem factæ in puncto E, & iungantur E H. Denique per rectam E H G, ſectio fiat E F G, recta ad planum A C B. Dico E F G eſſe quæſitam ſectionem. cùm enim ſectio E F G, recta ſit ad planum

c 115.huius A C B quod per axem eſt, igitur [c] ſectionis E F G axis eſt E G. qui cùm ex conſtructione æqualis ſit datæ I K, patet perfectum eſſe quod problema requirebat.

PRO-

PROPOSITIO CXXIII.

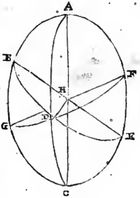
Omnes ſectiones per centrum ſphæroideos tranſeuntes eam inter ſe ſortiuntur rationem quam continent axes maiores inter ſe.

Demonſtratio.

Sint ſphæroideos A B C duæ ſectiones B D E, F D G per centrum H ductę. Dico illas eam inter ſe habere rationem quam duo axes maiores inter ſe ſi ſphæroides ſit oblongum. agatur enim planum A B C per axem A C, quod rectum ſit ad planum B D E exhibens communē interſectionem lineam B E. erit [a] igitur B E axis maior ſectionis B D E; recta verò H D quæ communis eſt interſectio plani B D E cum plano per axem A C, axis minor eſt [b] tum ſectionis B D E tum A B C vel A D C. ſimiliter communis interſectio plani F D G, cum plano quod per axem A C, fiet erit axis minor tum ſectionis F D G, tum ſectionis per axem factæ. cùm igitur ſectiones per centrum omnes, eoſdem habeant axes minores, eam inter ſe rationem habebunt quam axes maiores, cùm ellipſium ratio ex rationibus axium componatur.

[a] 115. huius.

[b] Patet ex demonſtratis 120. huius.



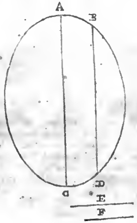
Aliter & breuiùs propoſitum ſic concludo. per Corollarium 120. huius ellipſes omnes per centrum tranſeuntes, axem minorem habent communem cum ſphæroide. Quare cùm ratio ellipſium ex axium rationibus componatur, erunt ellipſes per centrum tranſeuntes, vt axes maiores.

PROPOSITIO CXXIV.

In dato ſphæroide ellipſim exhibere, quæ ad ellipſim per axem rationem habeat datam minoris inæqualitatis ſitq́; illi æquidiſtans.

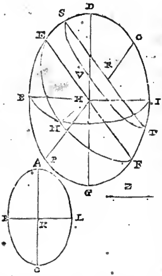
Conſtructio & demonſtratio.

Sit ſphæroides A B C cuius ſectio per axem A B C. Oporteat autem exhibere ellipſim in ratione duplicata E ad F, quæ æquidiſtet axi A C. fiat vt E ad F, ita A C ad B D, in plano ſectionis per axem A B C; ſectioni autem A B C ad rectos angulos conſtituta ſit quædam ſectio per B D. dico hanc ſectionem eſſe quæſitam. nam ſimilis eſt ſectioni quæ illi fieret parallela per axem ſphæroideos A C, & conſequenter ſimilis ſectioni A B C, atqui ſimiles ſectiones ſunt in duplicata ratione laterum homologorum, hoc eſt A C ad B D, hoc eſt E ad F. Igitur exhibuimus quod petebatur.



PROPOSITIO CXXV.

DAtam ellipſim in dato ſphæroide exhibere quæ maiorem proportionem inter ſuos axes non habeat quam ellipſis quę fit per axem ſphęroidis.



Conſtructio & demonſtratio.

SIt D B G I ſectio facta per axem ſphæroideos & altera data ellipſis, cuius axis maior A C ad minorem L B, non maiorem habeat rationem quàm axis D G ad I B. Oporteat ellipſim exhibere in ſphæroide. Fiat axis minor ſphæroidis H B ad aliam Z, vt K B ad K A. Patet ex hypotheſi Z non fore maiorem axe H D. in ſphæroide igitur exhibeatur ellipſis, [a] cuius axis maior H E, ſit æqualis Z: huius [b] minor axis H M par erit H B. Quare erit H M ad H E, vt K B ad K A. Ergo per definit. 4. huius ellipſes E M F, A B C ſimiles ſunt. Poſitâ deinde O P diametro coniugatâ ipſi diametro E P, fiat vt E H, quadratum ad quadratum A K, ita rectangulum O H P ad O R P rectangulum, & per punctum R ſectio fiat S V T, quæ æquidiſtet ſectioni E M F. Dico S V T ſectionem æqualem & ſimilem eſſe ſectioni A B C. Eſt enim A B C ſimilis ſectioni E M F. Sed S V T etiam ſimilis eſt ſectioni E M F, igitur etiam A B C ſimilis eſt ſectioni S V T. Deinde ellipſis E M F ad ellipſim A B C, eam rationem habet, quam quadratum E H ad A K quadratum, hoc eſt ex conſtruct. quam O H P rectangulum ad O R P rectangulum, hoc eſt rurſum, quam quadratum E H ad S R, quadratum. ellipſis ergo A B C æqualis eſt & ſimilis ellipſi S V T. Igitur perfecimus quod poſtulatum fuit.

a 121. huius.
b Coroll. 110.

PROPOSITIO CXXVI.

IN ſphæroide exhibere ſectionem per centrum quæ ſimilis ſit ellipſi datæ cuius axes non contineant maiorem rationem quàm axis maior ſphæroideos ad minorem.

Conſtructio & demonſtratio.

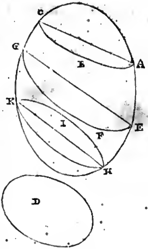
DAta ſit ellipſis A B C cui ſimilem oporteat exhibere per centrum ſphæroideos dati D E F. Poſito D G axe in ſphęroide fiat ſectio D E G, cuius centrum H, erectâ deinde recta H I normaliter ad axem D G quæ erit minor axis ſphæroideos, inuentiſq; axibus A C, B L ellipſis datæ, fiat vt K B ad K A, ita I H ad H E, perſpicuum eſt ex hypotheſi H E fore minorem axe ſphæroideos maiori H D. exhibeatur [c] ergo in ſphæroide ellipſis E M F per centrum cuius maior axis ſit H E. Dico E M F ellipſim eſſe ſimilem A B C. nam axis E H ad H I, hoc eſt [d] H M, eſt vt axis A K ad K B, ex conſtructione, igitur ſimiles ſunt ellipſes per ſimilium ellipſeon definitionem.

c 122. huius.
d Coroll. 120. huius.

PRO-

PROPOSITIO CXXVII.

DAtæ ſectioni in ſphæroide alteram in eodem æqualem conſtituere; quæ datæ ellipſi ſit ſimilis, habenti inter ſuos axes non maiorem rationem quàm axes inter ſe habeant ſectionis per axem ſphęroidis.



a 114. huius.

Conſtructio & demonſtratio.

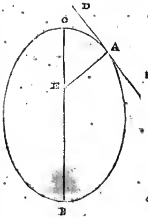
DAta ſit ſectio in ſphæroide A B C cui æqualem oporreat exhibere & ſimilem datæ D. fiat per præcedenrem quædam ſectio per centrum ſphęroideos E F G ſimilis D. Deinde fiat [a] H I K ſectio parallela E F G, quę ad ipſam E F G ſectionem eam habear rationem quam A B C ad ſectionem eandem E F G, eritque perfectum problema vt per ſe manifeſtum eſt.

PROPOSITIO CXXVIII.

AD datum punctum in ſphæroidis ſuperficie contingens planum ponere.

Conſtructio & demonſtratio.

SIr A punctum datum in ſuperficie ſphæroideos A B C, ad quod oporteat planum adponere quod ſphæroides contingat. inuento [b] axe C B, agatur per C B, & A punctum planum A B C, perque ea quæ libro de ellipſi docuimus, ponatur A D in plano A B C, contingens ſectionem in A, erectâ denique A E normali ex A ad rectam A D, quæ occurrat axi in E. fiat per A D planum rectum ad ſectionem A B C. Dico illud ſphæroides contingere in A. Quoniam E A linea recta eſt ad D A, & ſimul ex conſtructione planum per A D rectum ad planum A B C, igitur etiam E A recta eſt ad planum per A D poſitum. Cùm igitur linea E A breuiſſima ſit oſtenſa [c] ad ellipſim A B C, & ſimul breuiſſima ad planum orthogonum per A D, neceſſariò planũ per A D normaliter plano A B C inſiſtens, contingit ſphæroides in A. ergo præſtitimus quod fuerat requiſitum.



b 118. huius.

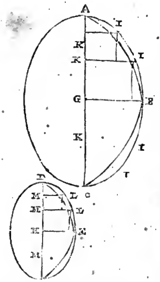
c 131. ellipſ.

PROPOSITIO CXXIX.

SInt ABC, DEF ſectiones factæ per axes ſphæroideon ABC, DEF, quibus inſcribantur parabolę ABC, DEF.

Dico ſphæroides ABC ad ſphæroides DEF habere rationem compoſitam ex parabola ABC ad DEF parabolam, & ex ratione altitudinis BG ad EH altitudinem.

Demonſtratio.



ESt enim ellipticum planum ABC ductum in ſe ad DEF planum ellipticum in ſe ductum vt corpus habens baſim ABC parabolam & altitudinem BG, ad ſolidum ſuper baſi DEF parabolica & altitudine EH, hæc enim illis æqualia eſſe facilè colligetur ex 204. libri de parabola, & 45. libri de ductibus, ſed ſicut ſe habet ABC, ellipticum in ſe ductum ad DEF, ellipticum ductum in ſe, ita quoque ABC ductum in orbem ad DEF, ellipticum ductum in orbem, cùm quadrata IK ad LM, eandem rationem contineant quam circuli radijs illis deſcripti. Igitur etiam ſphæroides ABC ad DEF, eam habet rationem quam parabola ABC ducta in altitudinem BG, ad parabolam DEF ductam in altitudinem EH. Quod fuit demonſtrandum.

Verùm quoniam argumentandi ratio ſub finem huius demonſtrationis vſurpata, non adeò fortaſſe plana omnibus videbitur, vt vlteriorem probationem non deſiderent, adiungo lemma vniuerſale huiuſmodi.

Data ſint quæuis plana ABC, DLF. Dico ſolida quæ fiunt ex planis illis in ſe ductis eandem inter ſe rationem habere, quam ſolida quę procreantur ex ijſdem planis ductis in orbem.

Ducantur in vtroque plano parallelæ infinitæ, IK, LM. & concipiantur ſuper quadratis IK, LM conſtitui parallelepipeda infinita in altitudinibus KK, MM. manifeſtum eſt hæc parallelepipeda inſcripta eſſe ſolidis, quæ fiunt ex ductibus planorum ABC, DEF, in ſe. intelligantur deinde radijs IK, & LM deſcribi circuli infiniti ac ſuper ijs erigi cylindri infiniti in altitudinibus ijſdem KK, MM. patet hos cylindros inſcriptos eſſe ſolidis, quæ fiunt ex planis ABC, DLF ductis in orbem. Iam verò quoniam parallelepipeda & cylindri habent communes altitudines, erunt inter ſe vt baſes, ſcilicet vt quadrata IK ad circulos radiorum IK. ſed quadrata ſingula IK ſunt ſingulis circulis radiorum IK proportionalia. ergo etiam parallelepipeda ſingula ſunt ſingulis cylindris proportionalia. Ergo 12. 5. vt vnum parallelepipedum IK ad primum cylindrum IK, ita omnia parallelepipeda ad omnes cylindros. pari argumento vt vnum parallelepipedum LM ad vnum cylindrum LM, ita omnia parallelepipeda LM ad omnes cylindros LM. ſed vt vnum parallelepipedum IK, ad vnum cylindrum IK, ita vnum parallelepipedum LM ad vnum cylindrum LM, cùm horum quatuor ſolidorum ratio eadem ſit quæ baſium, quas patet eſſe proportionales. Ergo omnia parallelepipeda IK, ſunt ad omnes cylindros IK, vt omnia parallelepipeda LM ad omnes cylindros LM, & permutando, &c. Vnde facile iam probabitur iuxta formam diſcurſus libri de ductu plani in planum,

Digitized by Google

num. propoſitione 45. ſolida quę fiunt ex ductibus planorum A B C, D E F in ſeipſa ſolidis quæ procreantur ex iiſdem planis in orbem ductis eſſe proportionalia.

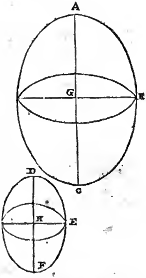
Hoc igitur vniuerſim demonſtrarum deinceps aſſumemus in particularibus propoſitionum caſibus, non aliam afferentes probationem præter hanc, quod ſint vt quadrata parallelarum, ita circuli qui iiſdem parallelis vt radijs deſcribantur.

Corollarium.

EX propoſitione patet ſi altitudines B G, E H ſint æquales, ſphæroides eſſe ad ſphæroides vt parabola ad parabolam.

PROPOSITIO CXXX.

SPhæroides ad ſphæroides habet rationem compoſitam ex ratione ellipſeon quę per axes maiores fiunt, & ex ratione altitudinum axium minorum, vel ex ratione ellipſeon quæ per axes minores fiunt & altitudinum maiorum in ſphęroidibus lenticularibus.



Demonſtratio.

OStenſum eſt in præcedenti ſphæroides ad ſphæroides eam habere rationem quæ cōponitur ex ratione inſcriptæ parabolæ ſemiellipſi per axem A E C ad parabolam inſcriptam ſemiellipſi per axem D E F, & axis E G ad axem E H. eſt autem parabola inſcripta ad inſcriptam vt ſemiellipſis ad ſemiellipſin, ſunt [a] enim vt triangula maxima inſcripta. Igitur cùm rationes quoque E G, E H ſemiaxium minorum, communes ſint rationibus diametrorum parabolicarum inſcriptarum, reſtat vt ratio A E C, ſemiellipſeos ad ſemiellipſin D E F, ducta in rationem E G ad E H, eandem rationem exhibeat cum ratione parabolæ inſcriptæ ſemiellipſi A E C ad parabolam inſcriptam D E F, ducta in rationem E G ad E H. Cùm igitur illa eadem ſit cum ratione ſphæroidis ad ſphæroides; ergo etiam hæc eſt vt ſphæroides ad ſphæroides. Quod fuit demonſtrandum.

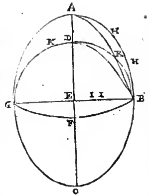
[a] 140. parab.

PROPOSITIO CXXXI.

SPhæroides ad ſphæram inſcriptam eam obtinet rationem quæ inter axes reperitur.

Demon-

Demonſtratio.



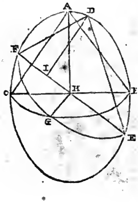
a 111. *huius.*
b *Colligitur ex Coroll.* 129. *huius.*
c 240 *parab.*
d 119. *huius.*

SPhæroides ABC ſeca per BE, axem minorem plano ad axem AC recto, ſectio BFG circulus [a] erit. inſcribatur ſuper circulo GFB, ſemiſphæra DBFG. ducto autem per axem AC plano, exhibeātur ſectiones AHB, DKB, & inſcribatur cuique ſectioni ſua parabola ABE, DBE. Oſtenſum [b] eſt ABE, ductum in ſe ad DBE ductum in ſe eam habere rationem quam parabola inſcripta ABE ad inſcriptam DBE. ſed parabola ABE ad DBE parabolam, (quoniam axes BE communes ſunt) eſt [c] vt AE ad DE; igitur etiam ABE ellipticum ductum in ſe ad DBE, circulare ductum in ſe eſt vt AE ad DE, ſed vt ABE ellipticum ductum in ſe ad DBE, circulare ductum in ſe, ita eſt ABE, ellipticum ductum in orbem ad DBE circulare ductum in orbem; cùm [d] quadrata HI ad KI quadrata eam rationem contineant quam circuli radijs HI deſcripti ad circulos radijs KI deſcriptos. igitur vt AE ad DE, ita eſt ſphæroides ABE ad ſphæram DBE. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXII.

OMnes coni maximi ſphæroidi inſcripti inſiſtentes alicui ſectioni quæ fit per centrum inter ſe ſunt ęquales.

Demonſtratio.



e *Per Coroll prop.* 45. & 44.
f 15. *ſexti.*
g 123. *huius.*
h 15. *duodecim.*

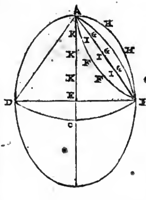
SInt duo maximi coni ABGC, DEGF inſcripti ſphæroidi, inſiſtentes ſectionibus BGC, EGF per centrum factis. Dico illos inter ſe æquales eſſe. triangulum per axem coni EDF eſt æquale triangulo per axem coni ABC, per ea quę libro de ellipſi demonſtrata [e] ſunt. igitur [f] eſt HC ad HF, vt reciprocè DI ad AH. ſed vt HC ad HF, ſic [g] elliptica baſis BGC ad baſim ellipticam EGF. ergo vt BGC ad EGF, ita reciprocè DI ad AH. ergo [h] coni EDF, BAC æquantur.

PROPOSITIO CXXXIII.

SIt conus ABCD ſphęroidi inſcriptus & per E centrum & verticem coni A ductum planum exhibeat triangulum ABD, cui inſcripta ſit parabola AFB verticem habens A, altera verò inſcripta ſit ellipſi AHBE cuius vertex B.

Dico

Dico conum inſcriptum ad ſphęroides eam habere rationem quam habet parabola AFBE ad ſpacium parabolicum AGBE.



Demonſtratio.

OStenſum eſt [a] quod AGBE ductum in altitudinem BE æquetur AHBE, ducto in ſe. prætereà demonſtratum eſt [b] AIBE in ſe ductum æquari AFBE ducto in BE, eſt autem BE altitudo communis. Igitur AHBE ductum in ſe ad AIBE, ductum in ſe, eſt vt parabola AGBE ad ſpacium parabolicum AFBE. ſed ſicut ſe habet AHBE ductum. in ſe ad AIBE in ſe ductum, ita ſe habet ſphæroides ABCD ad conum AIBCD, [c] cùm quadrata HK ad quadrata IK, eandem rationem obtineant quam circuli radiorum HK ad circulos radiorum IK. Igitur ſphæroides ABCD ad inſcriptum conum eam habet rationem quam parabola AGBE ad ſpacium parabolicum AFBE.

a Colligitur ex 104. parab. & 45. de ductibus.

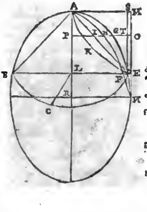
b Ex 67. parab. & 45. de ductibus.

c Patet ex diſcurſu 129. huius.

PROPOSITIO CXXXIV.

SEcetur ſphęroides ſectione ad axem rectâ exhibente circulum ſuper quo vt baſi inſcribatur conus parti ſphęroideos ABCD; poſitoque per axem plano ABN, ponantur AM, NM parallelæ axibus AR, RN & parabolę inſcribantur AHN, AKD parallelogrammis ARN, ALD, quarum vertices ſint N, & A.

Dico partem ſphæroideos ADCB, ad conum inſcriptum rationem habere compoſitam ex ratione quã habet ſuperficies parabolica FHAL ad ſuperficiem parabolicam DKAL, & ex ratione quam habet altitudo AM ad altitudinem DL.



Demonſtratio.

DVcatur quæuis OP quæ æquidiſtet AM, oſtenſum eſt [d] proportionales eſſe lineas OP, GP, HP. ſimiliter ſi ex D puncto ponatur DS quæ ſit parallela NM, demonſtratum eſt [e] TP, IP, KP eſſe proportionales, quare AGDL ſuperficies in ſe ducta æquatur [f] ſolido quod habet baſim AHFL, & altitudinem AM. ſimiliter ſuperficies triangularis AIDL in ſe ducta pyramidem exhibebit æqualem [g] magnitudini cuius baſis eſt ſpacium parabolicum AKDL, & altitudo TP. ſed hæ magnitudines habent rationẽ cõpoſitã [h] ex ratione baſeos parabolicę AHFL ad parabolicã AKDL, & ex altitudine MA ad SA, ſiue OP ad TP. Ergo corpora illis æqualia, nimirum AGDL ductum in ſe, & AIDL in ſe

d 104. parab.

e 67. parab.

f 45. Duct.

g Ibid.

h 13. huius.

SS ductum

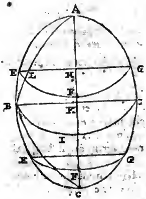
ductum habebunt rationem ex iiſdem compoſitam. ſed quam rationem habet AGDL ductum in ſe ad AIDL, in ſe ductum, eandem rationem habet pars ſphæroideos ABCD ad conum inſcriptum AIDCB; cùm quadrata GP, DL [a] eandem habeant rationem quam circuli radijs GP, DL deſcripti. Igitur etiam pars ſphæroideos ABCD ad conum inſcriptum AIDCB, habet rationem compoſitam ex ratione parabolæ AHFL ad AKDL, & ex altitudine OP ſeu AM ad DL altitudinem. Quod fuit demonſtrandum.

a Ex diſcurſu 129. huius.

PROPOSITIO CXXXV.

SPhæroides ABCD ſecetur per axem ſectione ABC; atque hęc ipſa ſectio ſecetur duobus planis parallelis, vno per centrum, altero ſupra centrum vel infra exhibentibus circulos DIB, GFE, in plano autē ABC deſcribatur parabola ALB, cuius vertex ſit B.

Dico ſegmentum ſphæroidicum ABID ad AEFG, ſegmentum ſphæroidicum eam obtinere rationem, quam ſuperficies ALBK ad ALH.



b Vide 129. huius.

Demonſtratio.

EST enim AEBK in ſe ductum ad AEH, ductum in ſe, vt ſuperficies ALBK ad ſuperficiem ALH parabolicam; quod oſtendetur eodem diſcurſu quo vſi ſumus in demonſtratione 133. huius. ſed vt AEBK ductum in ſe ad AEH, ductum in ſe, ita eſt AEBK ductum in orbem [b] ad AEH, in orbem ductum: cùm quadrata EH, BK eandem rationem ſeruent, quam circuli radijs EH, BK deſcripti. Igitur etiam ſphæroides AEBID ad partem AEFG, eandem rationem ſeruat, quam ALBK ſuperficies parabolica ad ſuperficiem ALH. Quod fuit demonſtrandum.

PARS

PARS SEPTIMA.

De Conoide Parabolico.

Explicatâ Sphæroidis naturâ eiuſque proprietatibus, breui etiam compendio proſequi intendimus Conoidicas magnitudines, quarum duplex eſt differentià: aliæ etenim magnitudines oriuntur à ſectione parabolæ; aliæ ab hyperbolæ; quodq́ue à parabola gignitur, conoides parabolicum appelletur: quod verò ab hyperbola, hyperbolicum.

DEFINITIO PRIMA.

Conoides parabolicum voco ſolidum ex ſemiparabolæ circulatione productum ſuper axe eiuſdem parabolę quieſcente.

DEFINITIO SECVNDA.

Axis conoidis parabolici linea eſt quę in formatione conoideos axis parabolę fuit, & ſecat omnes lineas baſi conoidis parallelas bifariam.

DEFINITIO TERTIA.

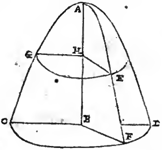
Figura conoidibus inſcripta vocetur maxima figurarum quę illis inſcribi poteſt.

EXPLICATIO.

CVm plurima triangula parabolę verbi gratiâ inſcribi poſſint, illud antonomaſticè dicatur inſcriptum quod maximum eſt triangulorum quæ parabolæ ſuper baſi inſcribi poſſunt. idem eſto de corporibus, quæ conoidibus inſcribuntur.

PROPOSITIO CXXXVI.

OMnis ſectio conoidis parabolici per rectam factam quę in formatione conoidis immobilis fuit parabolam generat.



Demonſtratio.

SIt igitur ſemiparabolæ ABC quæ conoides formauit ſua gyratione, axis AB: ſecundùm quem fiat ſectio ABF, aſſumāturq́; in parabolæ ABC perimetro duo puncta G & C, ex quibus demittantur perpendiculares ad rectam AB, lineę GH, CB, & planum ACB voluatur eouſque in orbem donec peruenerit ad punctum E ſectionis AEF. igitur HG æqualis eſt HE, ſimiliter BC æqualis BF, cùm ſint eædem lineę ſolâ ſitus gyratione mutatæ. quare vt GH ad BC, ita eſt HE ad BF, & vt quadratum GH ad CB quadratum, ita eſt qua-

dratum HE ad BF quadratum, eſt autem ex ſuppoſitione ABC parabola, ad cuius axem AB, ordinatim poſitæ ſunt HG, BC; igitur vt quadratum HG ad BC quadratum, hoc eſt quadratum HE ad BF, ita linea AH ad AB lineam. a quare etiam AEF eſt parabola. Quod erat propoſitum.

a 21. Parab.

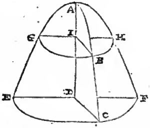
Corollarium.

NOn ſolùm conſtat ABF parabolam eſſe, ſed eodem diſcurſu patet parabolas ABF, ABC eſſe æquales ac ſimiles, ac proinde latus rectum quod axi AB deſeruit commune eſſe vtrique ſectioni.

PROPOSITIO CXXXVII.

OMnis ſectio conoidis parabolici ad axem conoidis recta circulum format.

Demonſtratio.



EX parabolici conoidis definitione linea ED quæ baſis eſt ſemiparabolæ ADE, formantis conoides, deſcribit circulum ECF, & quia ED ordinatim eſt collocata ad axem AD, orthogonaliter illi inſiſtit. poſito igitur quouis plano ABC per axem AD, erit CD æqualis DE per Corollarium præcedens, cùm ſit eadem parabola ABC cum ADE: erit inſuper CD recta ad AD. acto deinde plano quocunque GBH quod æquidiſtet ECF, exhibens communes interſectiones IB, IH, planorum ABC, AGE & GBH. erunt normaliter erectæ, adeoque ordinatim poſitæ ad axem AI, lineæ IB & IG: quia b parallelæ ſunt IG, DE, & IB, CD. Cùm autem parabola ABC eadem ſit cum parabola AGE, hinc IG eſt ad DE, vt IB ad DC, & DE ad DC, vt GI ad IB: cùm autem æquales ſint DE, DC, æquales quoque ſunt IG, IB. puncta igitur GBH in ſemicirculo exiſtunt non minùs quàm ECF. Quod fuit demonſtrandum.

b 16. Vndecim.

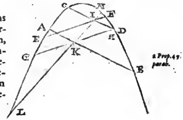
PROPOSITIO CXXXVIII. LEMMA.

INterſecent parabolam binæ parallelę AB, CD & EF, GH occurrentes ſibi inuicem in punctis I & K.

Dico rectangulum EIF ad GKH, eandem habere rationem quam habet CID rectangulum ad rectangulum AKB.

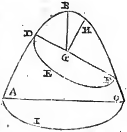
Demon-

Demonſtratio.



PEr puncta I & K, ponatur recta occurrens perimetro parabolæ in punctis L M. erit ergo rectangulum EIF ad GKH rectangulum, vt LIM ad LKM rectangulum, vt eſt oſtenſum lib. de parabola. a ſed eodem modo eſt rectangulum CID ad AKB, vt LIM ad rectangulum LKM. Igitur vt EIF rectangulum ad rectangulum GKH, ita CID ad AKB rectangulum. a Prop.49. parab.

PROPOSITIO CXXXIX.



SEctum ſit conoides quouis plano obliquè ad baſim.

Dico per axem fieri poſſe ſectionem quæ recta ſit ad planum ductum.

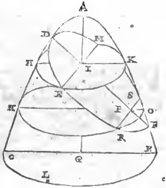
Demonſtratio.

SIt conoides parabolicum ABC ſectum ſectione DEF obliquè ad baſim AIC, igitur axi occurret in aliquo puncto G, cùm ſectio DEF axi non æquidiſtet, erigatur ex G linea GH normaliter ad planum DEF, & per HG, & lineam GB planum ponatur: erit illud rectum ad DEF planum, cùm omnis ſectio per lineam GH b recta ſit ad planum DEF. b 18. Vn-dec.

PROPOSITIO CXL.

OMnis ſectio conoidis parabolici ad axem obliqua ellipſim format.

Demonſtratio.



SIt conoides parabolicum ABC plano DEF, obliquè ſectum ad axem AG. Dico DEF ellipſim eſſe. Agatur enim per axem conoideos planum quod rectum ſit ad planum DEF, exhibens communem interſectionem DF, ex puncto verò I, quod commune eſt axi & lineę DF, erigatur normaliter IE ad planum ABC, quod factum fuit per axem rectum ad DEF planum, ponatur denique per IE planum HEK, quod æquidiſtet baſi CLB, faciens in planis BAC, DEF ſectiones KIH, EIM. Et quoniam IE recta eſt plano BAC, c perpendicularis eſt ad DF, KH. Igitur circulus eſt d ſectio HEK quare lineæ IK, IE, IH, IM æquales ſunt inter ſe. Tandem ponatur planum NRO parallelum HEK, occurrens plano DEF, ſecundùm communem interſectionem PR. Et plano BAC ſecundùm c Def.3.11. d 137. huius.

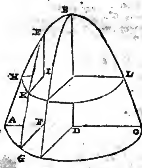
SS 3 rectam

a 16 vndec. b 8 vndec. c Defin. 3. vndec. rectam O P N. erit denuo N R O circulus, & quia a P R parallela eſt ad I E, ac recta I E ex conſtruct. normalis ad planum A B C, erit & recta P R b normalis ad planum B A C, ac proinde normalis ad rectas D F, c O N. Igitur rectangulum H I K eſt ad N P O rectangulum vt quadratum I E ad P R quadratum, ſed vt rectangulum H I K d 49 parab. ad rectangulum N P O, ita rectangulum D I F, ad rectangulum D P F. ergo rectangulum D I F eſt ad rectangulum D P F, vt quadratum I E ad quadratum P R: Quare ſectio D E R F ellipſis eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLI.

OMnis ſectio axi conoidis parabolici æquidiſtans parabolam exhibet.

Demonſtratio.

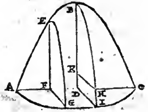


ESto conoideos A B C, cuius axis B D, ſectio E F G æquidiſtans B D. Dico ſectionem E F G eſſe parabolam. agatur per axem B D planum C B A, quod rectum ſit ad ſectionem E F G, exhibens communem interſectionem E F. Deinde agatur aliud planum H K L quod æquidiſtet baſi A G C, cuius communis interſectio cum plano E F G ſit linea I K, linea verò F G ſit communis eiuſdem interſectio cum plano A G C. Quoniam plano A B C, plana E F G & H K L orthogonaliter inſiſtunt, erit K I communis eorum ſectio e recta plano A B C. (e 19. vndec.) ſimiliter & F G recta eſt plano A B C. ergo rectangulum H I L æquale eſt quadrato I K; & rectangulum A F C quadrato F G eſt æquale. quia verò etiam A B C planum per axem B D poſitum eſt, parabola f eſt A B C ſectio; (f 136. huius) demonſtratum verò eſt libro de parabola g quod (g Pro. 44. parab.) rectangulum quoque H I L ad A F C rectangulum eam rationem obtineat quam linea E I ad E F lineam, igitur etiam quadratum I K ad F G quadratum, eam rationem habet quam linea E I ad E F lineam. quare h parabola eſt ſectio E F G axi (h 1. parab.) B D æquidiſtans. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXLII.

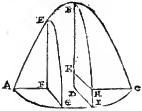
PArabolæ omnes quæ generantur in conoide parabolico ſectionibus axi parallelis, æquale latus rectum habent quod omnium axibus inſeruit: ſiue æquales ac ſimiles ſunt omnes parabolæ axi æquidiſtantes.

Demonſtratio.



IN conoide A B C ponantur tres ſectiones; altera per axem B D; ſcilicet A B C: reliquæ duæ eidem ad angulos rectos, vna quidem nempe G E F, parallela axi, altera verò D B I etiam per axem: facientes cum plano baſeos communes ſectiones F G, D I, quæ per 19. vndecimi nor-

normales erunt ad planum ABC, acproinde per definit.3. vndec. normales ad AC. Per præcedentem EFG, BDI parabolæ ſunt & axes earũ, EF,BD. fiat rectæ EF æqualis BK, & ordinatim ponatur HK quę erit parallela DI, cùm ſit BDI parabola; igitur vt a BK ad BD, ita eſt quadratum HK ad DI quadratum. quia ſimiliter ABC parabola eſt, rectangulum b AFC ad ADC eſt, vt linea EF ad BD lineam, hoc eſt ex conſtructione vt BK ad BD. ſed vt rectangulum AFC ad rectangulum ADC, ita quadratum FG ad quadratum DI. (Cũ enim FG,DI ſint normales ad AC quadrata rectangulis ſunt æqualia.) Igitur FG quadratum eſt ad quadratum DI, vt linea BK ad BD lineam, hoc eſt KH quadratum ad DI quadratum. Igitur FG linea æqualis eſt lineæ KH. ſed & linea EF æqualis eſt ex conſtructione rectæ BK, igitur ſunt æquales & ſimiles parabolæ EFG & BKH, & æquale habent latus rectum quod axibus BK & EF inſeruit. Eodem diſcurſu oſtendam quamlibet aliam parabolam axi parallelam æqualem eſſe ac ſimilem parabolæ per axem. Omnes igitur parabolę axi conoideos parallelę ſunt æquales ac ſimiles, ſiue latus rectum axibus inſeruiens habent commune. Quod erat demonſtrandum.



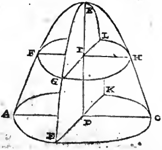
a 1 parab.

b 47. parab.

PROPOSITIO CXLIII.

Dati conoidis parabolici axem præbere.

Conſtructio & demonſtratio.



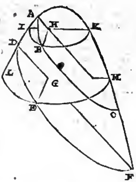
Sit conoides parabolicum ABC cuius baſis AEC. Inuento centro baſeos D, ex eodem erigatur normaliter ad planum baſeos recta DB. Dico BD fore axem, aſſumpto enim quouis puncto I in linea DB, fiat ſectio FIGH quæ æquidiſtet baſi AEC. Deinde ſecundum lineam BD ſectio altera faciens communes ſectiones IGDE, quæ 16. vndecimi erunt parallelæ. itaque IH, IG, IF æquales ſunt, & ſimiliter DC, DE, DA: ſed etiam IL æqualis eſt IG. quemadmodum & KD æqualis DE. Igitur quia DB ſecat omnes lineas in plano FGH plano baſeos AEC parallelas bifariam, axis erit conoideos parabolici per definitionem axis quam poſuimus.

De

De planis parallelis quæ conoides parabolicum interſecant.

PROPOSITIO CXLIV.

SEctiones parallelę in conoide parabolico ſimiles figuras exhibent quæ axi occurrunt.



Demonſtratio.

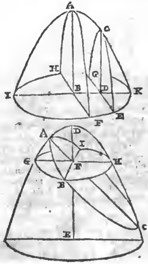
SI æquidiſtant baſi ſectiones, circuli a ſunt, & conſequenter figuræ ſimiles. ſi cum baſi concurrunt, erunt ellipſes. oſtendendum autem eſt illas eſſe ſimiles. fiat planum A C F per axem conoideos rectum ad plana parallela A B C, D E F, erunt rectæ A C, D F axes ſectionum A B C, D E F: diuiſis itaque A C, D F lineis proportionaliter in H & G, erectiſque H B, G E normaliter ad planum A C F, ſecundùm illas rectas H B, G E plana ponantur baſi conoideos parallela, ac proinde recta ad planũ C A L: nempe plana I B K, L E M. quare & per defin. 3. vndec. erunt B H, E G normales ad rectas K D, A C, M L, D F. rectangulum c A H C eſt ad D G F rectangulũ vt eſt I H K ad L G M rectãgulum, hoc eſt quoniam B H, E G normales ſunt ad diametros D K, L M, vt quadratum H B ad G E. ſunt igitur A B C, D E F ellipſes ſimiles iuxta definitionem ellipſeon ſimilium.

a 137. huius.

b 140. huius.

c Per 138. huius.

PROPOSITIO CXLV.



PLanum per axem conoidis rectum ad quamlibet aliam ſectionem, illius ſectionis axem exhibebit.

Demonſtratio.

DVplex hic eſt caſus: alter quo ſectio ad quã planum per axem eſt rectum, axi æquidiſtat; alter quo axi conoidis occurrit.

Ponatur primùm ſectio G C E, ad quam planum per axem K A I rectum eſt, æquidiſtare axi. per axem ponatur planũ F A H, parallelum plano G C E, erunt ergo A B, C D communes ſectiones plani K A I cum planis F A H, G C E d parallelę. Quare cùm A B, vtpote axis rectus ſit plano K F I, erit e & C D recta eidem plano, ergo C D normaliter ſecat E G, quę eſt communis ſectio planorum G C E, K F I. Inſuper planum F A H, f rectum eſt plano K F I, ergo planum G C E, eidem parallelum, plano K F I rectum eſt: eſt autem & planum K A I rectum

d 16. vndec.

e 8. vndec.

f 18. vndec.

rectum plano G C E. ergo communis eorum [a] ſectio I D K, recta eſt plano G C E. a 19. vndec.
ergo defin. 3. vndec. I D K recta eſt ad E D G. Quare cùm I D K ſit diameter, patet E G biſectam eſſe in D. Et quidem vt ſupra oſtendi, ad angulos rectos. ergo C D eſt axis ſectionis C E D.

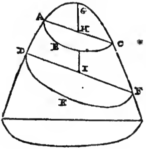
Secundum quoque caſum ſic demonſtrabimus. Sit iterum ſectio A B C, plano A D C per axem D E occurrens ſecundùm lineam A C ad angulos rectos. Dico A C axem eſſe ellipſeos A B C. ex puncto F, quo axis D E occurrit plano A B C, erigatur normaliter F B ad planum A D C. igitur ſi ſecundùm [b] F B fiat ſectio G B H baſi conoidis æquidiſtans, erit circulus & quidem rectus [c] ad planum A D C, ac proinde F I æqualis F B. quare cùm F B recta ſit ad planum A D C, recta quoque erit definit 3. vndecim. ad rectam A C. vnde cùm à rectâ A C diuidatur biſariam recta B I, ad angulos rectos, patet rectam A C axem eſſe ſectionis A B C.

b 157. huius.
c 18. vndec.

PROPOSITIO CXLVI.

SI duæ ſectiones in conoide parabolico axi occurrentes æquidiſtantes fuerint, linea per vtriuſque centrum actâ axi conoideos æquidiſtabit.

Demonſtratio.

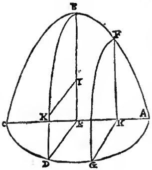


SInt plana parallela A B C, D E F, quorum centra H & I. Dico lineam H I æquidiſtare axi conoideos. oſtenſum [d] eſt ſectiones A B C, D E F ſimiles eſſe, prætereà demonſtratum eſt [e] planum per axem conoidis rectum ad ſectiones A B C, D E F axes earundem exhibere, planum igitur per axes A C, D F ſectionum A B C, D E F tranſiens eſt planũ, quod per axem conoidis tranſit, ſit igitur planum hoc D A G C F. Igitur D A F parabola eſt quę per axem tranſit ac proinde recta G H I, quæ biſariam diuidit A C, D F, quæ 16. vndecimi ſunt parallelæ, ſectionis D G F per axem conoidis factæ diameter eſt. Sunt autem omnes diamerri axi ſectionis æquidiſtantes. igitur & G H I axi ſectionis æquidiſtat. ſed ſectio D G F eumdem habet axem quem conoides. ergo G H I axi conoideos æquidiſtat. Quod erar propoſitum.

d 144. huius.
e 145. huius.

PROPOSITIO CXLVII.

DVæ ſectiones axi conoideos æquidiſtantes ſortiuntur baſium ſuarum triplicatam rationem.



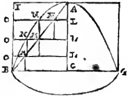
Demonſtratio.

SInt duæ ſectiones DBE maior & minor FGH, quarum axes ſint BE, FH; factaque BI æquali FH, ponatur IK æquidiſtans ED: erit itaque BIK parabola æqualis FGH, vt oſtenſum eſt ſuprà [a]: ſed parabola BED ad BIK, parabolam triplicatam habet rationem eius quam habet recta [b] ED ad IK, hoc eſt HG. Igitur manifeſtum eſt ſectiones axi parallelas triplicatam habere rationem ſuarum baſium. Quod erat demonſtrandum.

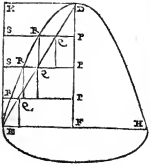
a 142. huius.

b 241. parab.

PROPOSITIO CXLVIII.



COnoides parabolicum (BAG) ad conoides parabolicum (EDH) eandem rationem habet, quam triangulum BAC ductum in rectangulum ACBI, ad triangulum FDE, ductum in rectangulum DFEK, hoc eſt quam priſma baſim habẽs triangulum BAC, altitudinem CB, ad priſma baſim habens triangulum FDE, altitudinem FE.



Demonſtratio.

PEr ea quæ demonſtrauimus prop. 129. huius, conoides eſt ad conoides, vt corpora quæ fiunt ex ductibus parabolarum in ſeipſas. ſed hæc æquantur [c] ſolidis, quæ fiunt ex triangulis BAC, FDE ductis in rectangula ACBI, DFEK. Ergo conoidium ratio eadem eſt quę ſolidorum factorum ex ductibus triangulorum BAC, FDE in rectangula ACBI, DFEK. Quod erat demonſtrandum.

c Ex 42. de parab. & 45. duct.

Corollarium.

PArtes conoideos parallelis ad baſim planis abſciſſæ, eam ſeruant rationem quam partes parabolæ per axem iiſdem planis intercepta, in ſe ductæ, ſiue quam partes trianguli BCA ductæ in altitudinem AI ſeu CB.

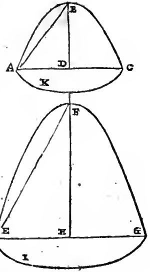
Demonſtrabitur diſcurſu omnino ſimili.

PROPOSITIO CXLIX.

COnoides parabolicum ad conoides parabolicum rationem habet compoſitam ex altitudine ad altitudinem, & ex baſi ad baſim.

Demon-

Demonſtratio.

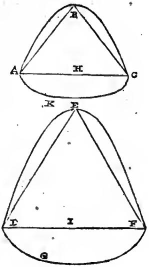


Sint duo conoides A B C,G E F. oſtendendum eſt conoides ABC ad conoides GEF, habere rationem compoſitam ex ratione baſios AKC ad baſim EIG, & ex ratione altitudinis BD ad FH altitudinem. præcedenti propoſitione demonſtratum eſt conoides ad conoides eam habere rationem quam priſma habens baſim triangulam BDA, & altitudinem DA ad priſma ex baſi triangula FHE & altitudine HE. ſed ratio illorum priſmatum componitur ex ratione altitudinum DA, HE, & ex ratione triangularium baſium BDA, HFE, hoc eſt rurſum ex ratione DA ad HE, & ex ratione BD ad FH. ergo ratio conoidium componitur ex ratione DA ad HE bis ſumpta, hoc eſt ex ratione circuli AKC ad circulum EIG, & ex ratione altitudinum conoidearum BD, HF. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CL.

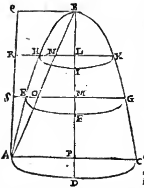
Conoides parabolicum ad conoides parabolicum habet rationem quam conus inſcriptus ad conum inſcriptum.

Demonſtratio.



Sint conoidibus inſcripti coni ABC, DEF. Dico conoides ad conoides eam habere rationem quam habet conus ABC ad DEF. Conus enim ad conum rationem habet compoſitam ex baſi circulari AKC ad baſim DGF, & ex altitudine BH ad EI. ſed præcedenti propoſitione idipſum eſt demonſtratum de ratione conoidis ad conoides. ergo conus inſcriptus ad conum inſcriptum eam habet rationem quam conoides ad conoides, cùm altitudines & baſes communes exiſtant.

PROPOSITIO CLI.



Conoidis ABC ſecetur plano per axem BPA, & alijs planis EFG, HIK baſi parallelis, occurrentibus plano APB ſecundùm communes interſectiones LH, ME.

Dico partes conoideos eam ſortiri inter ſe rationem quam partes trianguli inſcripti PBA.

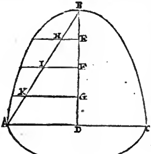
Demonſtratio.

Segmenta illa conoidica parallelis ad baſim planis abſciſſa eam inter ſe rationem habent, a quam priſmata quæ fiunt ex partibus trianguli intercepris ijſdem planis ductis in communem altitudinem AP. ſed hæc ſunt vt partes trianguli. ergo, & illa. Quod erat propoſitum.

a Coroll. 148.

PROPOSITIO CLII.

Secetur axis conoidis parabolici in E, F, G in partes æquales, actâque per axem plano ABC, ponantur EH, FI, GK parallelę baſi AC & ſectiones fiant diuidentes conoides.



Dico partes conoidis planis illis abſciſſas rationem continuare quæ reperitur inter ſeriem numerorum 1.3.5.7. &c.

Demonſtratio.

Svnt enim partes conoidis inter ſe demonſtratæ b eandem ſeruare rationem quæ reperitur in partibus trianguli ABD. ſed partes ABD facilè oſtendũtur rationem continuare quæ inter ſeriem numerorũ 1.3.5.7.9. &c. reperitur; igitur etiam partes conoidicæ eandem ſeriem continuant. Quod fuit demonſtrandum.

b 151. huius.

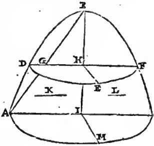
PROPOSITIO CLIII.

Datum conoides parabolicum diuidere ſecundùm datam rationem ſectione baſi parallela.

Conſtructio & demonſtratio.

Sit conoides parabolicum ABC diuidendum ſectione quæ baſi AMC æquidiſtet, ſecundùm rationem K ad L. fiat per axem BI ſectio ABI, ductâque AB diuidatur triangulum ABI recta HG, quæ rectæ AC, æquidiſter ſecundùm rationem K ad L, & per HG planum ponatur DEF, quod baſi AMC æquidiſtet. Dico conoides

conoides ABC ad conoideos partem DBF, eam rationem continere quam K ad L. oſtenſum enim eſt a conoides ad partem ſui parallelo ad baſim plano reſectam eam rationem obtinere quam triangulum per axem ad partem ſui: ſed ex cōſtructione triangulū ABI ad triangulum GBH, eſt vt linea K ad L. Igitur & conoides ABC ad partem ablatam DBFE, eandem rationem K ad L obtinet. Factum igitur quod poſtulatum fuit. a 135. huius



PROPOSITIO CLIV.

COnoides ad partem ſui parallelo baſi plano ablatam eam ſortitur rationem, quæ eſt duplicata axeos totius ad partem axeos ablatam.

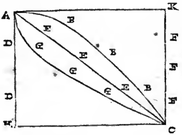
Demonſtratio.

REponatur præcedentis propoſitionis ſcema quo A B C conoides diuiſum eſt plano DEF parallelo baſi AMC. demonſtratum iam eſt conoides ABC ad partem DBF, habere rationem eandem cum ratione trianguli ABI ad GBH, quam cùm ex elementis conſtet eſſe duplicatam rationis BI ad BH, manifeſtum eſt conoides ABC ad ſui partem DBF, duplicatam habere rationem altitudinis BI ad BH.

Conoidis parabolici cum alijs corporibus comparatio.

PROPOSITIO CLV.

PArabolam ABC cuius axis AD, contingat recta AK, axis parabolæ AGC: perfecto deinde rectangulo HK, ponatur diagonalis AC.



Dico parabolā ABCH in ſe ductam ad triangulum AECH, ductum in ſe, eam habere rationem quam ſex ad quatuor.

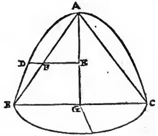
Demonſtratio.

DVcantur parallelæ FBEG ad ordinatim applicatam CH. Quoniam oſtenſum b eſt lineas FD, BD, ED proportionales eſſe, ſimiliter oſtenſum eſt proportionales eſſe c FD, ED, GD. ergo ABCH ductum in ſe æquatur d AECH ducto in altitudinem AK, & AECH ductum in ſe æquatur AGCH ducto in altitudinem AK. Igitur quam rationem habet ABCH, ductum in ſe ad AECH in ſe ductum eam rationem habebunt ſuperficies AECH, AGCH ductæ in altitudinem AK. cùm igitur duo corpora genita ex ductibus planorum AECH, AGCH in communem altitudinem AK, ſortiantur baſium ſuarum proportionem, etiam ABCH, in ſe ductum cum AECH ducto in ſe, habebit eandem baſium proportionem, trianguli

b 67. parab. c 45. de duct. d 41. parab.

guli nimitum A E C H ad ſpacium paraboliсum A G C H, ſed hanc eſſe rationem ſex ad quatuor facilè deducitur ex Corollario 256. de parabolâ. Quare etiam parabola A B C H ducta in ſe ad triangulum A E C H in ſe ductum rationem continet quam ſex ad quatuor.

PROPOSITIO CXLVI.



Conoides ad inſcriptum conum eam rationem obtinet quæ eſt inter ſex & quatuor.

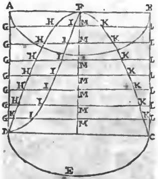
Demonſtratio.

Oſtenſum eſt præcedenti propoſitione parabolam A D B G ductam in ſe ad triangulum A F B G, in ſe ductum eam habere rationem quam ſex ad quatuor: ſed quam rationem habet parabola A D B G, ducta in ſe ad triangulum A F B G in ſe ductum, eam quoque obtinet conoides A B C ad conum inſcriptum A B C, eùm quadrata parallelarum baſi in parabola ad quadrata parallelarum baſi in triangulo eandem inter ſe contineant rationem, quam circuli iiſdem parallelis, vt radijs deſcripti. ergo ſimili fere diſcurſu quo vſi ſumus prop. 129. huius, concludemus propoſitum.

PROPOSITIO CLVII.

Conoides cylindri quo continetur dimidium eſt.

Demonſtratio.



Cylindrus A B C cuius baſis D E C, habeat inſcriptum conoides D F C. Ducto cylindri axe F M, qui & conoidi communis eſt, per eundem fiat ſectio exhibens parabolam D F C; deinde deſcribatur parabola D I F habens axem A D: ducanturque G H I M K L parallelæ ordinatim poſitæ C D. ex ijs quę libro de parabola ſunt demonſtrata [a] erit quadratum G I æquale rectangulo G H L, vnde per quadrageſimam quintam libri de ductibus, G H ductum in H L, æquale ſolidum formabit magnitudini quæ fit ex ductu G I in ſeipſam, hoc eſt ex ductu H M in ſeipſum cum H M, I G parabolæ eædem ſint. Atqui G M ductum in M L æquale corpus profert illis quæ fiunt ex ductu G H in H L, & ex H M in M K: quod colligitur ex 46. de ductibus, eùm rectangulum G M L æquetur rectangulis G H L, H M K. Igitur eùm G H in H L, æquetur H M, ducto in ſeipſum ſiue in M K; patet G M ductum in M L, duplum eſſe H M ducti in M K, ſiue in ſeipſum. ſed eandem habet rationem [b] G M ductum in M L, ad H M ductum in M K, quam habet cylindrus G L ad conoides H K, eùm quadrata G M ad quadrata H M, eandem rationem contineant cum circulorum ratione qui fiunt radijs G M & H M. Igitur etiam cylindrus G L duplus eſt conoidis inſcripti. quod demonſtrandum fuit.

[a] Propoſ. 167. parab.

[b] Ex diſcurſu 119.

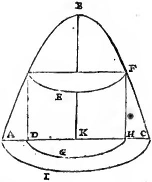
Breuiùs ex præcedenti idem demonſtrabitur. Cylindrus ambiens coni inſcripti triplus

triplus eſt, conoides verò eiuſdem ſeſquialter. igitur ſi conus ponatur, 2. erit conoides 3. cylindrus autem 6. Ex quo patet propoſitum.

PROPOSITIO CLVIII.

Conoidi A B C inſcribatur quicunque cylindrus D G H F.

Oporteat rationem conoidis ad cylindrum inſcriptum notam facere.



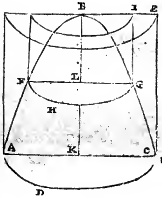
Demonſtratio.

Oſtenſum eſt cylindrum cui conoides inſcribitur, duplū eſſe conoideos inſcripti. Igitur ratio cylindri ſuper baſi A I C, & altitudine K B ad cylindrū, cuius baſis eſt D G H, & altitudo F H, dupla a eſt eius quam habet ratio conoideos A B C ad eundem cylindrum inſcriptum; nota igitur eſt ratio conoidis ad inſcriptum cylindrum, cùm nota ſit ratio cuiuſuis cylindri ad quemuis cylindrum. a 2. Propoſ.

PROPOSITIO CLIX.

Sit conoides A B C cylindro A D G E inſcriptum, & plano F H G poſito, quod æquidiſtet baſi A D C, fiat cylindrus F H G I, continens conoides F B G, & fiat ſectio A B C per communem axem.

Dico cylindrum A D C E ad cylindrum F H G I habere quadruplicatam rationem A C ad G F lineam.



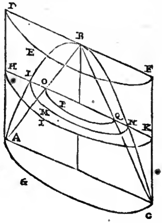
Demonſtratio.

Cylindrus enim A D C E ad F H G I, rationem habet compoſitam ex baſi A D C ad baſim F H G, quæ duplicata eſt rationis A C ad F G, & ex ratione altitudinis C E ad G I, hoc eſt K B ad B L, quę eſt pariter duplicata b rationis A C ad F G, cùm ſectio per B K, axem conoidis exhibeat parabolam A B C. vnde cùm ratio B K ad B L, ducta in rationem duplicatam A C ad G F, producat quadruplicatam A C ad G F, manifeſtum fit cylindrum A D C E ad cylindrum F H G I, quadruplicatam quoque habere rationem eius quam A C habet ad F G. b 1. Parab.

PRO-

PROPOSITIO CLX.

SIt quæuis pars conoidis parabolici A B C, habens baſim ellipticam A G C, ſuper qua cylindrus conſtruatur continens conoideos partem ablatam A B C; & ſuper eadem baſi formetur conus inſcriptus conoidi: fiat deinde quæuis ſectio quæ æquidiſtet baſi ellipticę, formans ternas ſectiones, vnam in cylindro H I K, ſecundam in conoide L M N, tertiam in cono O P Q.



Dico tres has ſectiones eſſe inter ſe ſimiles.

Demonſtratio.

CVm ſolidum A G C F ſupponatur eſſe cylindrus, ſectio A G C ſimilis & æqualis erit ſectioni H I K; ſed quia demonſtratum eſt a omnes ſectiones in conoide parallelas ſimiles eſſe, etiam ſectio L M N ſimilis eſt ſectioni A G C:. quia verò etiam demonſtratum eſt in cono ſectiones parallelas quæ exhibent ellipſes, ſimiles exiſtere, etiam ſectio O P Q ſimilis erit ſectioni A G C. Igitur omnes tres H I K, L M N, O P Q ſectiones ſimiles ſunt baſi A G C, & conſequenter inter ſe. Quod erat demonſtrandum.

a 144. huius.

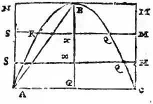
PROPOSITIO CLXI.

SInt duæ parabolæ quarum vna A B C ſit recta, habens nimirum ordinatim poſitas ad angulos rectos; altera D E F obliqua cuius nimirū ordinatim poſitæ ad diametrum E H, non faciant cum diametro rectos angulos. ſint autem tam diametri B G, E H quàm C A, D F ordinatim ad eas conſtitutæ, æquales inter ſe.

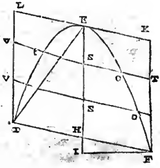
Dico B G C ductum in ſe ad angulos rectos, ad E O F H ductum in ſe ad angulos obliquos E H F, eam ſortiri rationem quæ compoſita eſt ex triangulo A B G ad D E H, & ex A G ſeu G C ad F I, normalem ad E H.

Demon-

Demonſtratio.



FOrmetur parallelepipedum ex ductu KEHF, in ELDH; habebit illud baſim KEHF, & altitudinem FI. ſimiliter ſi conſtruatur parallelepipedum ex rectangulo MBGC in BNAG, habebit hoc baſim BGCM & altitudinem GC. Igitur hæ magnitudines compoſitam habent rationem ex ratione baſis MBGC ad baſim KEHF, hoc eſt ex ratione trianguli ABG ad triangulum DEH, & ex ratione altitudinis CG ad altitudinem FI. ſed MBGC, ductum in BNAG æquatur ſolidis, quæ fiunt ex ductu plani MBQC in planum CQBNA ſimul cum ſolido quod fit ex ductu BQCG in planum BRAG: ſimili pacto magnitudo ex ductu KEHF in ELDH, æquatur ſolidis quæ oriuntur ex ductu plani KEOF in planum FOELD, & ex ductu plani EOFH in EHDP. Diuidantur iam BG, EH in partes æquales in punctis X, Z. Et quia æquantur GB. HE, etiam XB, ZE pares erunt: ducanturq; MQXRS, & TOZPV parallelæ ad CA, FD. quadratum FD (hoc eſt ex hypotheſi quadratum CA) eſt ad quadratum OP, vt HE linea ad ZE, hoc eſt, vt GB ad XB, hoc eſt vt rurſus quadratum CA ad quadratum QR. æquantur igitur quadrata OP, QR. ergo rectæ OP, QR, adeoque & OZ, QX æquales ſunt. ſunt verò & MS, TV adeoque & MX, TZ æquales. demptis ergo æqualibus OZ, QX, reliquę TO, MQ æquales ſunt: & quia totæ MS, TV, æquales, etiam QS, OV æquales erunt. rectangula igitur MQS æquantur rectangulis TOV, æquantur autem & quadrata OP, QR. ergo omnia rectangula MQS ſunt ad omnia quadrata QX, vt omnia rectangula TOV ad omnia quadrata OZ. ergo MCQB ductum in BQCAN, eſt ad BQCG in BRAG, vt KFOE in EOFDL; ad EOFH in EPDH. Ergo MCQB in BQCAN, vnà cum BQCG, in BRAG, (hoc vt iā oſtendi, parallelepipedū ex MG in GN) eſt ad MCQB in BQCAN, vt KFOE in EOFDL, vnà cum EOFH, in EPDH (hoc eſt vt parallelepipedum ex KH, in HL) eſt ad KFOE in EOFDL. igitur permutando vt totum parallelepipedum ex MG in GN, eſt ad totum parallelepipedum ex KH in HL, ita ablatum MCQB in BQCAL, ad ablatum KFOE, in EOFDL. ergo & reliquum BQCG in BRAG, eſt ad reliquum EOFH in EPDH, vt parallelepipedum ad parallelepipedū, hoc eſt (vt oſtēdi ſupra) in ratione compoſita ex ratione trianguli ABG ad triangulū DEH, & ex ratione ipſius AG, ad FI. Quod erat demonſtrandū.



Scholion.

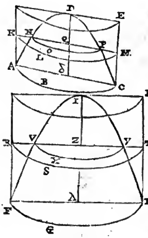
MEmor ſum libro de parabola demonſtratum eſſe, nullas dari parabolas inclinatas, quod ſenſui huius propoſitionis videtur repugnare: nam ſi multiplicatio parabolæ BCG *in* BGA, *per ductum facta qui quadrata producit fiat circulariter, & comparetur productum cum magnitudine* FHE *quæ etiam multiplicatione circulari formabit aliquod ſolidum, tunc vera fiet comparatio conoideos cum conoide, nam* BQCG *ductum in orbem producit verum conoides; vnde etiam* EFH *ductum obliqua inclinatione in orbem exhibebit inclinatum conoides, nihilominus vtrumque ſubſiſtit, rectè ſcilicet affirmatur non dari parabolas inclinatas,*

& tamen concedi poteſt dari conoides aliquod inclinatum. verùm vlteriùs inclinationem illam non proſequimur, cùm tale conoides nullius ſit vſus, & excludatur à definitione quam initio poſuimus.

PROPOSITIO CLXII.

SIt pars conoidis ABCD habens baſim ellipticam, incluſa cylindro ABCE, & alterum conoides FGHI, ſuper baſi circulari, incluſum cylindro FGHK.

Dico conoides ABCD ad conoides FGHI eandem habere rationem quam cylindrus ABCE ad cylindrũ FGHK.



Demonſtratio.

FIat enim quæuis ſectio KLM parallela ABC, occurrens axi obliqui cylindri in Q, & formãs in conoide ADC ſectionẽ NOP. diuiſo deinde axe Iλ in Z ſecundũ rationẽ DQ ad Qδ, parallela FGH, fiat per Z ſectio RST, exhibens ſectionẽ VXY in conoide FGHI. erũt igitur ſectiones a KLM, NOP ſimiles, vti & RST, VXY. inſuper quadratum Cδ, hoc eſt MQ, eſt ad quadratum PQ, vt δD eſt ad QD, hoc eſt ex conſtructione vt λI ad ZI, hoc eſt vt quadratum Hλ ad quadratum YZ, hoc eſt vt quadratum TZ ad quadratum YZ. cùm igitur ſit quadratum MQ ad quadratum PQ, vt quadratum TZ ad quadratum YZ, & ellipſes oſtenſæ ſint ſimiles, erit ellipſis NOP ad KLM, vt eſt circulus VXY ad circulum RST, vnde cùm hoc ſit vniuerſaliter verum, factis quotcunque ſectionibus, facile iuxta formã diſcurſus quadrageſimæ quintæ propoſitionis libri de Ductibus concludemus cylindrum ABCE eſſe ad conoides incluſum, vt cylindrus FGHK eſt ad conoides inſcriptum.

a 160. huius.

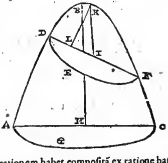
PROPOSITIO CLXIII.

SIt ABC conoides à quo dematur obliquâ ſectione ad axem BH, pars DEFB. factâ deinde ſectione ABC per axem BH, quæ recta ſit ad planum DEF; diuidatur communis interſectio DF in I biſariam, & erigatur IK parallela axi, ponaturq́; KL normalis ad DF.

Dico conoides AGCB ad partem DEFK, habere rationem compoſitam ex baſi AGC ad baſim DEF, & ex altitudine BH ad altitudinem KL.

Demon-

Demonſtratio.



a 161. huius.

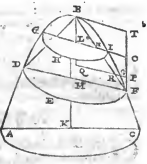
DEmonſtratum a eſt conoides AGCB incluſū ſuo cylindro, eam rationem continere ad partem conoideos DEFK incluſam ſuo cylindro ſuper baſi DEF, quam cylindrus ad cylindrū: ſed cylindrus ſuper AGC baſi & altitudine BH, ad cylindrum ex altitudine KL & baſi DEF, rationem habet compoſitā ex ratione baſeos AGC ad baſim DEF, & ex altitudine BH ad altitudinem KL. Igitur etiam ratio conoidis AGCB ad partem DEFK ex iiſdem eſt compoſita. quod autem KL ſit altitudo partis abſciſſæ DEFK inde patet, quod IK ſit diameter ſectionis FKD bifariam ſecans DF, & conſequenter KI maxima linearum quæ axi æquidiſtant; vt patet ex 47. parabolæ & 5. 2. ac proinde etiam KL longiſſima normalium quæ ex quouis puncto perimetri FKD ad FD poſſunt demitti.

PROPOSITIO CLXIV.

SIt conoides ABC ſectum duobus planis parallelis DEF, GHI ſed inclinatis ad axem; ducto deinde etiam altero plano ABC per axem BK, quod ſit rectum ad plana DEF, GHI, exhibens communes interſectiones FD, IG; quibus in L & M biſectis ponantur BLM, & FB.

Dico partes conoideos BDEF & BGHI, eam ſortiri rationem, quæ eſt inter triangula BMF, & BLN.

Demonſtratio.



b 42. parab.

PErficiatur parallelogrammum MT, & ponatur quæuis PSRQ; quæ æquidiſtet FM. erūt b iraque OL, IL, NL; item PQ, SQ, RQ proportionales. quare per propoſitionem quadrageſimam quintam libri de ductibus magnitudo conſtans baſi triangula FBM, & altitudine obliquâ FM, æquabitur ſolido, quod emergit ex ductu BISFM in ſe ſecundùm eandem obliquitatem anguli BMF: vnde etiam pars magnitudinis conſtans baſi triangula BNL & altitudine obliquâ FM æquabitur ſolido, quod fit ex ſuperficie BIL in ſe ducta ſecundùm eandem obliquitatem. Cùm igitur hęc priſmata conueniant altitudinibus, inter ſe rationem cōſequuntur quę inter baſes triangulares inuenitur. Vnde etiam BISFM in ſe ductum eandem habet rationem ad partem BIL ductam in ſe, quam continet triangulum BMF ad triangulum BLN. ſed quam proportionem habet ſolidum ex ductu BISFM in ſe, ad BIL in ſe, eandem habet conoidis pars BDEF ad partem conoidis BGHI, quia ellipſis DEF ad ellipſin GHI, vel ad quamcumque aliam eidem parallelam eandem rationem habet quam quadratum FM ad IL quadratum vel quoduis aliud

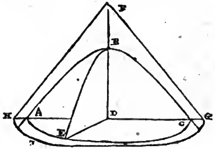
 inter-

intermedium. Igitur ſimili diſcurſu quo vſi ſumus in 29. huius paret conoidis partem B D E F ad partem B G H I eam rationem obtinere quam triangulum B M F ad B L N triangulum.

PARS OCTAVA.

De Conoide Hyperbolico.

DEFINITIO PRIMA.



SIt hyperbola A B C, cuius axis B D, ſuper quo immoto intelligatur circumduci in orbem pars A B D pergens ex A in C & E, donec tandem reuertatur in A punctum. exhibebitur figura corporis quod conoides hyperbolicum dicimus. Cuius axis B D & vertex B punctum.

DEFINITIO SECVNDA.

Iiſdem poſitis ſit hyperbolæ A B C centrum F, ex quo aſymptoti ponantur figuræ A B C; ſcilicet F G, F H, & producta D C in G agatur F D G triangulum in orbem deſcribens conum H I G F. Appelletur conus hic aſymptoticus conoidis A B C.

DEFINITIO TERTIA.

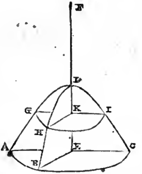
Similes hyperbolę ſunt quę rectas & tranſuerſas diametros proportionales habent.

PROPOSITIO CLXV.

OMnis ſectio conoidis hyperbolici per axem facta hyperbolam generat eandem cum illa, quâ in formatione conoidis vſi ſumus.

Demon-

Demonſtratio.



SIt figura ADC hyperbola ex qua formatum eſt conoidos, & axis ſit DE: quo producto inueniatur hyperbolæ ADC centrum F. ſectione denique factâ DBE per axem, & aſſumpto quouis puncto G in perimetro ADC, demittatur ex eo normalis ad axem DE quæ ſit GK; ex K autem ſit KH, normalis item ad axem, & agatur hyperbola DEA in orbem, donec perueneritad ſectionem DHB. quoniam igitur hyperbola CDA generat ex hypotheſi ipſum conoides, patet lineam KG ſolo ſitu differre à lineâ KH; eſt verò & EA æqualis BE, eùm ambæ ſint ſemidiametri. Ergo vt quadratũ EA ad quadratum KG, ſic quadratum BE ad quadratum HK. ſed, quia ADC ex hypotheſi eſt hyperbolã, vt quadratum EA ad quadratum KG, ſic a rectangulum FED ad rectangulum FKD. ergo vt quadratum BE ad quadratum HK, ſic rectangulum FED ad rectangulum FKD. Ergo DHB hyperbolã eſt eadem eum ADC, quæ formauit conoides. Quod erat demonſtrandum. a 21. hyperb.

PROPOSITIO CLXVI.

OMnis ſectio in conoide hyperbolico baſi æquidiſtans circulum format.

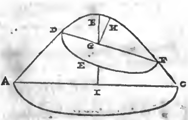
Demonſtratio.

SIt conoides ABCD, & ſectiones per axem ADC & DHB; ſectio autem parallela baſi ſit GHI: ex dictis propoſ. 165. patet KG æqualem eſſe KH, & eodem modo oſtendam reliquas omnes quæ ex K ad perimetrum GK ducuntur, æquales eſſe. ergo GHI circulus eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXVII.

COnoides hyperbolicum ſecetur plano inclinato ad axem.

Dico per axem conoideos poſſe duci planum quod rectum ſit ad planum datum.



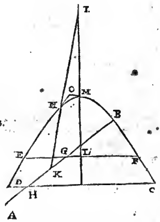
Demonſtratio.

SIt conoideos ABC planum DEF, ſecans obliquè axem BI in G: erectâ deinde normaliter GH ex G ad planum DEF, erunt GH & GB, in eodem plano quod per 18. vndecimi rectum erit plano DEF. Ex quo patet propoſitum.

PROPOSITIO CLXVIII. LEMMA.

SIt A B C hyperbola quam ſecent duę æquidiſtantes D C, E F, ponaturque tertia A B, quæ parallelis occurrat in punctis H & G, neque per I centrum tranſeat.

Dico rectangulum E G F ad D H C eandem habere rationem quam habet rectangulum A G B ad A H B rectangulum.

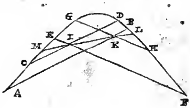


Demonſtratio.

EX centro hyperbolæ demiſſis diametris rectarum A B, E F, quæ occurrant perimetro hyperbolę in punctis N & M, ponantur contingentes N O, M O. concurrent hæ in puncto quodam O. nam æquidiſtantes ſunt a ordinatim applicatis A B, EF; quæ ſibi occurrunt; eritque per 27. tertij conicorum rectangulum A G B ad E G F, vt eſt N O quadratum ad M O quadratum. ſed etiam per eandem propoſitionem eſt rectangulum A H B ad D H C, vt quadratum N O ad M O quadratum. Igitur vt rectangulum E G F ad D H C, ita eſt A G B ad A H B. Quod fuit demonſtrandum.

a 12. *hyperb.*

LEMMA. PROPOSITIO CLXIX.



SInt in hyperbola binę parallelę A B, C D, & E F, G H ſibi occurrentes in I & K.

Dico rectangulum C I D ad A K B, eandem continere rationem quam rectangulum E I F ad G K H rectangulum.

Demonſtratio.

IVngantur puncta I K rectâ lineâ, quæ conueniat cum perimetro in L & M. erit itaque per præcedentem vt rectangulum L K M ad rectangulum L I M, ita tam rectangulum G K H ad E I F, quàm A K B rectangulum ad C I D rectangulum. Igitur vt rectangulum C I D ad A K B rectangulum, ita eſt rectangulum E I F ad G K H rectangulum.

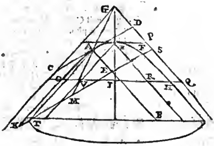
LEM-

LEMMA. PROPOSITIO CLXX.

SEcent hyperbolam inter aſymptotos conſtitutam quæuis rectę A B, H R aſymptoto parallelę; ponantur autem ex A & H, rectę contingentes ſectionem quæ conueniant in C, D, P cum aſymptotis: ex centro denique G duæ diametri ducantur G A M & G H I, & fiat vt G A ad G M, ita G H ad G I, ponanturque ordinatim M F S ad diametrum G A, & I N Q ad diametrum G H.

Dico lineas Q O S K proportionaliter ſectas eſſe in N, R, I & F, E, M.

Demonſtratio.



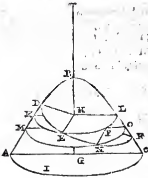
EST S M ad E M, vt G M ad A M, hoc eſt per hyp. vt G I ad H I, hoc eſt vt Q I ad R I. ſunt igitur S M & Q I proportionaliter ſectæ in E, & R. poſitis deinde, H V, A T quæ æquidiſtent aſymptoto G C, erunt iterum Q V & S T proportionaliter ſectæ, cùm ſit R I ad I Q, hoc eſt V I, ad I Q, velut eſt E M ad M S, hoc eſt M T ad M S: ſunt autem tres quantitates S F, S E, S K & aliæ tres Q N, Q R, Q O a proportionales, ac proinde cùm ſint F E æquales T K & N R, V O, (a 18. hyperb.)
(nam F M æqualis eſt M K & E M, M T: & N I æqualis I O, & I R æqualis I V,) etiam b quantitates S F, F E, E T & Q N, N R, R V ſunt proportionales, quare (b 9. progreſſ.) cùm ſit Q R oſtenſa ad R I, eandem habere rationem, quam habet S E ad E M, etiam Q N ad N R, hoc eſt V O eandem habebit proportionem quam S F ad F E, hoc eſt T K. quare totæ lineæ Q O, S K in punctis N, R, I & F, E, M ſunt proportionaliter ſectæ. Quod fuerat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXXI.

OMnis ſectio conoidis hyperbolici ad axem obliqua ellipſim exhibet.

Demon-

Demonſtratio.



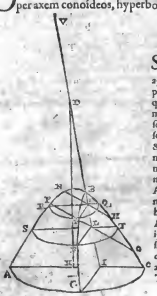
a 16. vndec.
b 8. vndec.

OCcurrat planum DEF ad angulos obliquos axi BG. Dico ſectionem DEF ellipticam eſſe. ponatur planum ABC per axem BG quod ſit rectum ad planum DEF, exhibens communem interſectionem DF, quæ occurrat axi in puncto quouis H, erectâ deinde normaliter HE ad planum ABC fiat ſectio per HE parallela baſi AIC, ſcilicet KEL, quæ erit circulus. deinde ponatur planum MNO, baſi quoque æquidiſtans producẽs circulum MNO ac ſignans communem interſectionem cum plano DEF rectam PN. erit [a] igitur PN parallela HE, ac proinde [b] recta plano ABC. quia ergo tam HE, quàm PN ſunt rectæ plano ABC, definit. 3. vndec. erit HE normalis ad DF, KL; & PN normalis ad DF, MO; ac proinde HE, PN ſunt ordinatim poſitę ad axem DF, ſectionis DEF, & quadrata HE, PN rectangulis KHL, MPO æqualia ſunt. Deinde oſtenſum eſt [c] rectangulum KHL ad MPO, eandem habere rationem, quam rectangulum DHF ad DPF rectangulum. igitur, cùm rectangulis KHL, MPO paria ſint quadrata HE, PN, etiam quadratum HE ad PN quadratum eandem habet rationem quam rectangulum DHF ad DPF rectangulum. Quare ſectio DEF ellipſis eſt, cum linea HE æqualis ſit HK, recta verò HF maior HL, ſiue HK.

c 168. huius.

PROPOSITIO CLXXII.

OMnis ſectio conoideos quæ tranſeat per centrum hyperbolæ factæ per axem conoideos, hyperbolam exhibet.



Demonſtratio.

SIt conoides ABC, cuius ſectio per axem habeat pro centro punctum D, per quod agatur planum DBG. Dico BEG eſſe hyperbolam. fiat enim per axem DH ſectio quæ ſit recta ad planum BEG, ſitque id planum ABC, erit igitur DI communis interſectio planorum ABC, & BEG, diameter in ſectione ABC: aſſumptis autem punctis K & L in diametro DI, erigantur KE, LF normaliter ad planum ABC. erunt igitur hæ lineæ in plano BEF quod orthogonaliter plano ABC inſiſtit; poſitis deinde in ſectione ABC ordinatim rectis OLP, MKN ad diametrum DI, fiant ſectiones per KE, LF quæ baſi AGC æquidiſtent occurrentes plano ABC, ſecundùm rectas QKR, TLS. cum igitur defin. 3. vndec. rectæ KE, LF normales ſint diametris circulorum QER, TFS, erunt quadrata KE, LF rectangulis RKQ, SLT æqualia. erit igitur vt rectangulum QKR ad TLS, ita quadratum KE ad LF quadratum

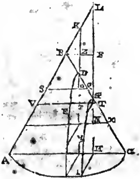
tum.ſed vt eſt QKR rectangulum ad rectangulum TLS, ita eſt a rectangulum MKN ad OLP rectangulum; igitur vt rectangulum MKN hoc eſt quadratum MK, ad rectangulum OLP, hoc eſt quadratum OL, ita eſt quadratum KE ad LF quadratum. eſt autem quadratum MK ad OL quadratum, vt rectangulum VKB (factâ prius DV æquali DB,) ad VLB rectangulum, igitur vt quadratum KE ad LF quadratum, ita eſt rectangulum VKB ad VLB. Eſt igitur ſectio BEFG hyperbola cuius axis BI & latus tranſuerſum BV. a 169. huius.

PROPOSITIO CLXXIII.

DVæ hyperbolæ in cono parallelæ inter ſe ſimiles ſunt.

Demonſtratio.

SIt conus ABC ſectus planis parallelis DRE, GHI quæ hyperbolas exhibeant. Oportet oſtendere eas ſimiles eſſe. facto per axem coni plano ABC quod ſit rectum ad ſectiones parallelas, erunt DK, GL earum latera tranſuerſa communes interſectiones planorum cũ coni latere AB cõcurrentes. dein ex B coni vertice ponatur BF ſecans bifariam. tranſuerſas diametros GL, DK. erũt ergo BZ, BF diametri b rectę. His poſitis quia KD, LG c ſunt parallelæ, KD eſt ad LG vt BD ad BG, hoc eſt vt BZ ad BF. Ergo per defin. 3. hyperbolæ DEF, GHI ſimiles ſunt. Quod erat demonſtrandum.



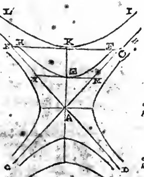
b Defin. 5. hyperb.
c 16. undec.

PROPOSITIO CLXXIV.

OMnes hyperbolæ inter eaſdẽ aſymptotos conſtitutæ ſimiles ſunt.

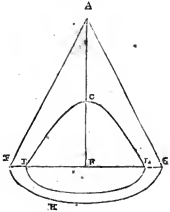
Demonſtratio.

SInt DAE, CAO aſymptoti communes duabus hyperbolis FGH, IKL. Dico illas eſſe inter ſe ſimiles. Ponantur enim contingentes MGN, OKE ad axem communem AGK, qui angulum aſymptotorum biſecat: erunt ergo AK, AG, dimidia laterum tranſuerſorum, OE autem & MN, erunt d rectæ diametri. Iam quia OE, MN tangunt hyperbolas in punctis, vbi axis communis ſecat hyperbolas, erunt parallelæ. Ergo AG ad AK, vt MN ad OE. quare cùm proportionales ſint diametri rectæ & tranſuerſæ patet e hyperbolas gaudentes communibus aſymptotis ſimiles figuras eſſe.



d 41. hyperb.
e Defin. 3. huius.

PROPOSITIO CLXXV.



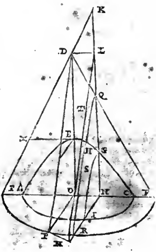
SIt A centrum hyperbolæ BCL factæ per axem conoideos CF & eiuſdem hyperbolæ in eodem plano ſit aſymptotos AE quæ in orbem acta ſuper axe AF, immoto conum EHGA deſcribat.

Dico conum hunc cum conoide BCL non concurrere, quamuis dato quouis interuallo propius accedat.

Demonſtratio.

FIat enim quæuis ſectio per axem conoidis EAG, habebit hæc pro aſymptotis AE, AG lineas quę cum ſectione conoidica per eundem axem AE facta nunquam conuenient; accedent tamen ad interuallum dato minus ex natura linearum aſymptoton: quare cùm omni ſectioni per axem factæ hoc conueniat, manifeſtum eſt ſuperficiem conicam nunquam cum conoide conuenire, licet ad interuallum dato minus perueniat. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXXVI.

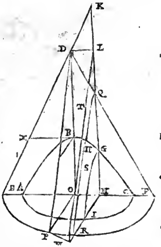


SIt iterum conoides ABC; ſectionis ABC per axem factæ centrum ſit D, & aſymptoti DE, DF in ſuperficie aſymptotici coni DFE. fiat autem ſectio GNI, quæ recta ſit ad planũ ABC per axem conoideos & parallela axi conoideos BO, exhibens communem interſectionem NIM, cum plano baſeos EPF: ductâ deinde DL quæ diametro AC baſeos conoidis æquidiſtet, ducatur LM linea vt angulus NLM ſit dimidius anguli quẽ continent aſymptoti EDF, par nimirum angulo ODE.

Dico ſectionis GNI aſymptoton eſſe rectam LM.

Demon-

Demonſtratio.



EX O centro baſeos ponatur O P, quæ ſit parallela N M, & iunganrur D P, P M. quoniam plana F P E, L N M recta ſunt plano E D F, erit [a] communis eorum ſectio M I N recta plano E D F, adeoque ad lineam F E. ergo P O parallela ad M N, etiam recta eſt ad F E. inſuper quia D P eſt in ſuperficie coni aſymptotici, erit angulus P D O par angulo E D O, hoc eſt M L N. ſunt verò & anguli D O P, L N M recti vt facile ex hypoth. colligitur. quare cùm latera D O, L N etiam ſint æqualia, erunt quoque [b] O P, N M æquales. igitur N O, P M, iungunt O P, N M æquales & parallelas. ergo & ipſæ ſunt parallelæ. ergo cùm angulus P O N oſtenſus ſit rectus, etiam O P M rectus erit. ergo [c] M P tangit circulum. planum ergo D P M tangit conum; deinde quia iam oſtendi M P eſſe parallelā N O, eſtque etiam ex hyp. D L parallela N O, erunt L D, M P parallelę. ergo L M, in vno [d] plano eſt cum rectis M P, P D, D L, in plano ſcilicet conum tangente: & quidem parallela ad D P; cùm L M, D L iungant D L, P M æquales ac parallelas. ergo L M non concurret vnquam cum D P, quæ eſt plano tangenti & ſuperficiei conicæ communis; ac proinde, quia planum tangens cum cono non conueniet vnquam niſi in ſola linea D P, patet L M cum ſuperficie coni non concurrere. Atqui per præcedent. ſuperficies coni nunquam concurrit cum conoide. Ergo L M multo minùs vnquam cōcurret cum conoide, ac proinde neque cum conoideos ſectione G N I. quod autem accedat ad interuallum dato minus, ſic oſtenditur: planum tangens ſi verſus baſim vnà cum cono producatur, ad conum accedit ad interuallum dato minus; nam factis ſectionibus circularibus baſi parallelis, cùm circuli fiant maiores datis quibuſcunque, anguli contactuum M P R fient datis minores, accedit autem & conica ſuperficies ad conoidem ad interuallum dato minus ergo & planum tangēs accedit ad conoidem ad interuallum dato minus. ergo & lineæ L M, G N I, ad inuicem accedunt interuallo dato minori. Patet ergo propoſitum.

a 19. undec.

b 26. primi.

c 16. tertij.

d 7. undec.

PROPOSITIO CLXXVII.

IIſdem poſitis:

Dico coni aſymptotici D F E ſectionem Q S R inter aſymptoton L M eſſe conſtitutam, ſiue L M etiam eſſe aſymptoton ſectionis Q S R.

Demonſtratio.

ESt enim angulus N L M ex conſtructione dimidius anguli F D E, quem aſymptoti complectuntur; vnde ſi ponatur Q T normalis ad L Q & B X, contingens A B C ſectionem, erit D B ad B X, vt L Q ad Q T, ſed vt B D ad B X, ita eſt Q L ad L D, igitur Q T & L D æquales ſunt, eſt autem L Q dimidium diametri tranſuerſæ, & L D hoc eſt Q T dimidium rectę. Igitur L T M aſymptotos eſt hyperbolæ Q S R. Idem patet ex demonſtratis in præcedenti, illic enim oſtenſum eſt L M non concurrere cum ſuperficie coni. quare neque cum ſectione Q S R, quæ eſt in coni ſuperficie, vnquam conueniet.

Corollarium.

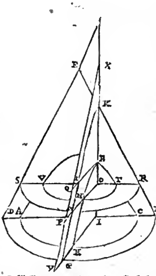
HYperbolæ Q S R, G N I ſimiles ſunt, nam ijſdem continentur aſymptotis per 176. & 177. ergo per 174. ſimiles ſunt.

PROPOSITIO CLXXVIII.

SIt conoides cono aſymptotico incluſum, & fiat ſectio K I G axi parallela, quæ recta ſit ad planum A B C ductum per axem, exhibens hyperbolam K L G in cono D E F; & ſectionem B N H in conoide hyperbolico: & ducatur O N M P parallela I G Y.

Dico quadratum O M excedere quadratum O N eodem exceſſu quo quadratum I G excedit I H quadratum.

Demonſtratio.



POnatur planum R M S baſi D G F, æquidiſtans, exhibebuntur duo circuli T N V & R M S, paralleli circulis A H C, D G F. eritque quadratum O N æquale T O V rectangulo; quadratum verò O M æquale rectangulo R O S. quemadmodum etiam quadratum I H æquale rectangulo A I C, & quadratum I G, æquale D I F rectangulo. ſed rectangula R T S, F C D, ſunt exceſſus rectangulorũ R O S, F I D, ſupra rectangula T O V, C I A. ergo rectangula R T S, F C D etiam ſunt exceſſus quadratorum O M, I G, ſupra quadrata O N, I H. ſed rectangulum R T S
a 12. hyp. æquale a eſt rectangulo F C D, igitur etiam exceſſus quadrati O M quo excedit quadratum O N, æqualis eſt exceſſui quo quadratũ I G, excedit quadratum I H. Quod erat demonſtrandum.

Aſſumpſi in demonſtratione rectangula R T S, F C D, exceſſus eſſe rectangulorum R O S, F I D, ſupra rectangula T O V, C I A. hoc autem ſic demonſtro. rectãgulum R O S, æquatur rectangulis R T, O S & T O, O S. ſed rectangulum T O, O S, æquatur rectangulo T O V, & rectangulo T O, V S, hoc eſt
b Coroll. 15. hyperb. b R T O. ergo rectangulum R O S æquatur rectangulis R T O S, T O V, R T O, ſed rectangula R T O S, R T O æquantur rectangulo R T S. ergo rectangulum R O S æquatur rectangulis R T S, T O V. Ergo rectangulum R T S eſt differentia rectangulorum R O S, T O V.

PROPOSITIO CLXXIX.

OMnis ſectio conoidis hyperbolici axi parallela exhibet hyperbolam illi ſimilem quæ fit per axem.

Demon-

Demonſtratio.

REpetatur præcedentis propoſitionis programma ſitque iuxta 177. X Y aſymptotos K L G hyperbolæ, quæ eſt in cono D E F. Oſtenſum eſt quod quadratum I G excedit I H quadratum æquali exceſſu, quo quadratum M O excedit quadratum N O. ſed quia X Y eſt aſymptotos hyperbolæ K M G; etiam quadratum I Y excedit quadratum I G æquali exceſſu quo quadratum O P, excedit quadratum O M, cum quadrata I Y & O P, excedant quadrata I G & O M, rectangulis ſub Y G & duplâ Y I; & ſub P M & duplâ P O, quæ per 18. hyperbolæ æqualia ſunt. Igitur exceſſus quadrati I Y ſuper quadrato I H. æqualis eſt exceſſui quo quadratum O P excedit quadratum O N. Sectio igitur B N H axi parallela, eſt hyperbola.

Quod autē ſimilis ſit hyperbola B N H, hyperbolę A B C quę per axem facta eſt, patet ex eo, quòd B N H hyperbola aſymptotis clauditur iiſdem, quibus clauditur hyperbola K I G, vt oſtenſum eſt ſuprà. Ergo per 174. huius hyperbola B N H axi parallela ſimilis eſt hyperbolæ per axem. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium primum.

OMnes ſectiones conoidis quæ axi ſunt æquidiſtantes angulum aſymptotis comprehenſum æqualem continent. patet ex 177. huius.

Corollarium ſecundum.

HInc etiam manifeſtum eſt, omnium ſectionum minimam eſſe hyperbolam per axem, ſi comparetur cum quauis hyperbola quæ ſit eidem ſectioni parallela, cùm enim oſtenſum ſit omnes illas hyperbolas aſymptotis vti, qui ſunt eiuſdem anguli. Igitur quo maiores euadent diametri tranſuerſæ, eo etiam maiores euadent hyperbolæ: diameter autem tranſuerſa, minima illa eſt quæ per axem tranſit, vt patet curioſiùs has materias conſideranti.

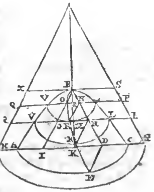
PROPOSITIO CLXXX.

SEcetur conoides plano per axem exhibens hyperbolam: inuentis autem huius ſectionis aſymptotis, fiat ſectio conoideos alteri aſymptoton parallela.

Dico parabolam hac ſectione produci.

Demonſtratio.

SIt A B C planum per axem F B K conoideos hyperbolici, exhibens hyperbolam A B C, cuius centrum F, aſymptoti verò F G, F H. poſitâ deinde rectâ B D quę æquidiſtet aſymptoto F G. fiat per eam ſectio B D E recta ad planum A B C. Dico figurā B D E eſſe parabolā ad F B K axem communē conoideos & ſectionis A B C. conſtituantur ordinatim rectę L M, quę productæ cum aſymptotis & cum ſectione concurrāt; ponanturq; B I aſymptoto F H æquidiſtans, & X B S tangens ſectionem A B C in B. Denique ſectiones fiant L R V, quę ſint rectæ ad planū per axem quarum communes ſectiones N R cum plano B R E. 19. vndec. & definit. 3. vndec. rectę erunt ad lineas L Q, B D. quoniam igitur F G, B D æquidiſtant P N æquales erunt S B



contingenti, hoc eſt B X, hoc eſt rectis O Q, eritque quadratum P M æquale quadratis P N, N M, & rectangulis P N M bis ſumptis, hoc eſt [a] rectangulis P L Q ſimul cum quadratis N M, & vnà cum rectangulis P N M bis ſumpris. ſed etiam quadrata P M æqualia ſunt rectangulis P L Q, L N V vna cum quadratis N M. ablatis igitur communibus P L Q, rectangulis & N M quadraris, remanent rectangula P N M bis ſumpta æqualia L N V. ſed iiſdem rectangulis L N V æqualia ſunt quadrata N R, quòd N R ſint rectæ ad diametros circulares L V. Igitur N R quadrata æqualia ſunt rectangulis P N M bis ſumptis. quare vt rectangulum P N M ad P N M, hoc eſt vt linea N M ad N M, hoc eſt vt N B ad N B, ita eſt quadratum N R ad N R quadratum, quare B R E, ſectio parabola eſt. Quod erat demonſtrandum.

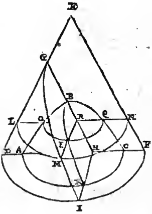
a 18. hyperb.

PROPOSITIO CLXXXI.

Sit A B C conoides cono ſuo D E F, aſymptotico incluſum, factâ deinde ſectione D E F per communem axem coni & conoideos, fiat altera G H I aſymptoto quidem E F æquidiſtans ſed normalis ad planum D E F exhibens parabolas B H K, G H I.

Dico has parabolas eſſe parallelas ſeu gaudere communi latere recto.

Demonſtratio.



Fiat ſectio L M N parallela baſi exhibens in cono & conoide circulos L M N, O P Q & producens in plano G H I communem interſectionem R M, quę, quia eſt communis ſectio duorum planorum L M N, G H I rectorum plano D E F, erit 19. vndecimi recta plano D E F, ac proinde defin. 3. vndecimi normalis ad lineam N Q O L, rectangula igitur N R L, Q R O æquantur quadratis R M, R P. pari argumento rectangula F H D, C H A æquantur quadratis H I, H K. Quare cùm rectangula N Q L, F C D ſint differentię [b] rectangulorum N R L, Q R O & F H D, C H A, erunt quoque eadem rectangula N Q L, F C D, differentiæ quadratorum R M, R P & H I, H K. Atqui rectangula N Q L, F C D [c] æqualia ſunt. Igitur exceſſus quo quadratum R M ſuperat quadratum R P æqualis eſt exceſſui quo H I quadratum excedit H K quadratum. ſunt igitur per ea quæ lib. de parabola diximus [d] parabolæ B H K & G H I parallelæ, gaudentes eodem latere recto ad communem axem. Quod fuit demonſtrandum.

b Ex demonſtratio in 178. huius.

c 18. hyperb.

d Ex prop. 351.

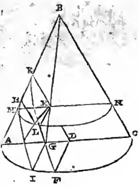
PROPOSITIO CLXXXII.

Sit conus rectus aſymptoticus A B C ſectus plano per axem exhibens triangulum A B C, & ponantur duo plana D E F, G H I normaliter conſtituta ad planum A B C, quarum communes interſectiones E D, H G cum triangulo A B C æquidiſtent lateri B C.

Dico parabolam D E F minorem eſſe parabola G H I quę remotior eſt ab aſymptoto B C.

Demon-

Demonſtratio.

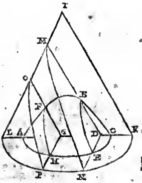


Sint communes interſectiones baſis A I C, & planorum D E F, H G I rectæ D F, G I, quæ erunt normales ad diametrum A C ex 19. vndec. & defin. 3. eiuſdem, ducta verò G B, occurrat rectæ D E in K, ponaturque per punctum K planum M L N, parallelum baſi exhibens L K, communem interſectionem cum plano E D F, quæ normalis eſt ad M N. rectangulum igitur N K M æquale eſt quadrato L K, & rectangulum C G A æquale quadrato G I. Igitur vt eſt rectangulum M K N ad A G C, ita eſt quadratum K L ad quadratum G I. ſed quia ratio N K ad C G, eadem eſt cum ratione K M ad G A, rectangulum M K N eſt ad rectangulum C G A, in duplicata ratione N K ad C G, hoc eſt B K ad B G, hoc eſt K E ad G H. Igitur etiam quadratum K L ad quadratum G I, eſt in duplicata ratione K E ad G H. ergo vt quadratum K L ad G I quadratum, ita eſt quadratum K E ad quadratum G H. ſunt itaque ſimiles portiones parabolicæ E K L & G H I. ſed latus rectũ portionis H G I, maius eſt latere recto portionis E K L, cùm rectangulum H G I maius ſit rectangulo E K L. Igitur verum eſt quod remotior à vertice maior ſit parabola quàm quæ propinquior eſt.

PROPOSITIO CLXXXIII.

Ponatur conoides hyperbolicum A B C ſectum planis parallelis exhibentibus parabolas B D E, F G H; oſtendendum eſt ſectionem B D E minorem eſſe ſectione F G H.

Demonſtratio.



Perficiatur conus aſymptotieus L I K, & planũ per axem ductum exhibeat hyperbolam A B C eiuſque aſymptotos L I, I K, quarum I K æquidiſtabit parabolis, vt patet ex 180. huius: plana verò D B E, G F H producta producãt figuras M D N, O G P, quæ vtique parabolę exiſtent cũ plana illa aſymptoto I K æquidiſtent. oſtenſum eſt [a] parabolas M D N, B D E æquales eſſe; ſimiliter & O G P, F G H. Igitur cùm oſtenſum etiam ſit [b] parabolam D M N viciniorem I K, minorem eſſe parabola O G P remotiore, etiam B D E parabola minor erit parabola F G H, quæ remotior eſt ab aſymptoto I K. Quod fuerat demonſtrandum.

a 181. huius.

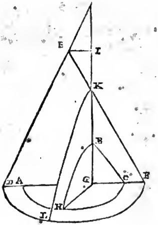
b 182. huius.

PRO-

PROPOSITIO CLXXXIV.

OMnes ſectiones conoidis hyperbolici axi æquidiſtantes, ſi inter ſe quoque æquidiſtent, centra habent in linea quæ à centro hyperbolæ per axem conoidis productę, normalis ad parallela hyperbolarum plana ducitur.

Demonſtratio.

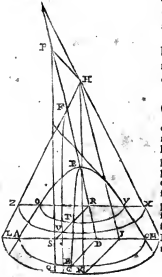


SIt igitur planum A B C per axem conoideos incluſi cono D E F aſymptotico, ad quod aliud ponatur B G H ad rectos angulos, quod æquidiſtet axi conoideos. Dico ſectionis B G H centrum eſſe in E I, quæ à centro hyperbolæ A B C ducitur normalis ad planum B G H. planum enim B G H, productum ſecet conum, & exhibeat hyperbolam K G L; huius centrum erit in recta E I. Atqui hyperbola B G H, iiſdem aſymptotis clauditur quibus hyperbola K G L, vt patet ex 176, & 177. huius. ergo & centrum cum eâ habet commune in recta E I. ſimiliter oſtendam omnes hyperbolas ipſi B G H parallelas habere centrum in recta E I. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO CLXXXV.

SEcetur conoides hyperbolicũ ABC ſectione per axem & altera BDE, quæ recta ſit ad planum per axem, concurratque cum lateribus trianguli per axem coni aſymptotici extra conum.

Dico ſectionem B D E eſſe hyperbolam quę cum ſectione coni F D G, non concurret, quæ in eodem plano exiſtit.



Demonſtratio.

QVoniam planum BDE rectum eſt ad planum per axem ABC, & concurrit cum lateribus trianguli per axem extra conum; igitur ſectio FDG coni HMGL hyperbola eſt, cuius centrum ſupponatur punctum P. ex quo aſymptotos ducatur PQ. poſitâ igitur diametro PD, aſſumptoque in ea puncto quouis R erigantur R S, D Q quę ſint normales ad planum trianguli ABC per axem, & ſecundùm R S, D Q ſectiones fiant baſi conoidis parallelæ, exhibebunt hæ ſectiones circulos O T Y, A E C & Z V X, L G M ex 19.11. & definit. 3.11. patet R T V rectis P D, X Z, ac D E G rectis L M, P D. eſſe

eſſe normales. vnde rectangulis O R Y, A D C, ęquantur quadrata R T, D E; rectangulis inſuper Z R X, L D M quadrata R S, D G, & quia H M, H L aſymptoti ſunt ſectionis A B C, etiam Z O X. L A M rectangula inter ſe ſunt [a] æqualia; vnde exceſſus quadrati R V quo ſuperat quadratum R T æqualis eſt exceſſui quo quadratum D G excedit D E [b] quadratum: & quia P Q aſymptotos eſt ſectionis F D G, exceſſus quadrati R S ſuper R V quadrato æqualis eſt exceſſui [c] quo differt quadratum D Q à quadrato D G, ac proinde quadratum R S excedit quadratum R T eodem exceſſu quo D Q quadratum ſuperat quadratum D E. ſunt igitur B T E ad hyperbolam cuius aſymptotos eſt P Q. Quare cùm duarum hyperbolarum F V G, B T E altera ſit in ſuperficie coni, altera in ſuperficie conoidis; quæ ſuperficies nunquam [d] concurrunt, nec ipſæ ſectiones concurrent. Quod erat demonſtrandum.

a 18 hyperb.

b 178. huius.

c 179. huius.

d 175. huius.

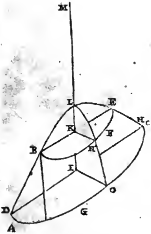
PROPOSITIO CLXXXVI.

SEcetur conoides duobus planis parallelis quę ellipſes forment B N E, D O H.

Dico illas ellipſes eſſe inter ſe ſimiles.

Demonſtratio.

AGatur A B C planum per axem conoidis quod ſit rectum ad ſectiones B F E, D G H exhibens communes interſectiones B E, D H. erit igitur A B C hyperbola. ponatur autem diameter M I, quæ diuidat B E, D H bifariam in K & I, & ſectio fiat per M L I quæ recta ſit ad planum A B C exhibens communes interſectiones, K N, I O, quæ per 19. 11. & defin 3. 11. erunt rectæ ad lineas E B, H D, ac proinde E B, K N, H D, I O ſunt axes ellipſium; erit autem per ea quę demonſtrata ſunt [c] L N O hyperbola cuius latus tranſuerſum M L, commune cum hyperbola A B C. quare vt rectangulum M K L ad M I L rectangulum, ita eſt quadratum K N ad I O, & quadratum K B. ad quadratum I D. ac proinde quadratum K N ad quadratum I O, vt quadratum K B ad quadratum I D, vnde vt E B ad K N, ita H D ad I O. ſunt igitur ſimiles ellipſes B N E, D O H.

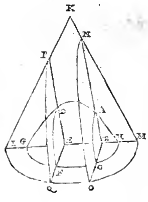


c ex prop. 174. huius.

PROPOSITIO CLXXXVII.

SI ſectiones parallelæ conoideos hyperbolici hyperbolas produxerint, ſimiles erunt hyperbolæ.

Demon-



a 175. huius.

b Coroll. 177. huius.

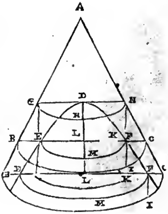
Demonſtratio.

SInt ABC, DEF ſectiones conoideos parallelæ producentes hyperbolas. Dico illas inter ſe ſimiles eſſe: perfecto enim cono aſymptotico LKM producãtur plana ABC, DEF donec occurrentia cono forment hyperbolas NBO, PEQ, oſtenſum eſt [a] hyperbolam NBO parallelam PEQ, ſimilem quoque eidem eſſe. demonſtratũ inſuper eſt [b] hyperbolas NBO, PEQ ſimiles eſſe hyperbolis ABC, DEF. igitur etiam hyperbolæ ABC, DEF ſunt ſimiles inter ſe. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO CLXXXVIII.

SIt conus ABC rectus ſectus plano per axem exhibente ſectionem hyperbolicam DEF cum aſymptotis eiuſdem AB, AC. fiant ſectiones GHN per verticem D, & aliæ BIC quæ ſint rectæ ad BAC, planum per axem, æquidiſtantes contingenti GDN & exhibeant in plano BAC ſectiones GN, BEFC: erigantur denique FI normales ad CB.

Dico rectas FI æquales eſſe rectæ DN.



c 18. hyperb.

Demonſtratio.

SVnt enim rectangula BFC æqualia [c] quadrato DN, ſed etiam rectangula BFC æquantur quadratis FI, quod FI ſint rectæ ad circulares diametros BC. ſunt igitur FI quadrata æqualia quadratis DN. ergo rectæ FI, DN etiam æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CLXXXIX.

IIſdem poſitis:

Dico ſpatium NCIBGD conoides hyperbolicum cingens æquari cylindro cuius baſis eſt circulus GHN, & altitudo DL.

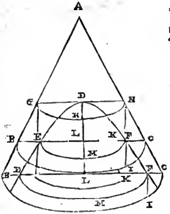
Demon-

Demonſtratio.

REctangulum C F B æquale eſt quadrato a D N, hoc eſt per præced. quadrato F I, hoc eſt quadrato K L, & conſequenter circulus radio D N deſcriptus eſt æqualis ſpatio circulis parallelis contento B I C, E M F. vnde cũ baſes ſemper ſint æquales & altitudines, facilè per cylindrorũ inſcriptiones demonſtrabitur cylindrum qui baſim habet circulum G H N, & altitudinem b D L æquari ſpatio quod conoides hyperbolicum cingit. Quod fuit demonſtrandum.

a 18 *hyperb*

b 58. *circul.*



PROPOSITIO CXC.

IIſdem poſitis:

Dico ſpatia conoides hyperbolicum cingentia quę planis parallelis contingenti G H N intercipiuntur eandem rationem obtinere quã altitudines D L, L L.

Demonſtratio.

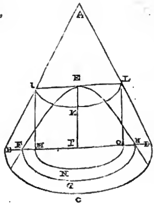
PRæcedenti enim oſtenſum eſt ſpatia illa æquari cylindri partibus qui habet baſim circulum G H N: ſed partes cylindri eam inter ſe ſortiuntur rationem quam altitudines D L, L L. igitur etiam ſpatia illa inter ſe eam rationem habent quam altitudines D L, L L, quæ cum altitudinibus cylindricis ſunt communes.

PROPOSITIO CXCI.

SIt denuo conus rectus A B C D ſectus per axem exhibens triangulum A B D, cuius latera ſint aſymptoti hyperbolæ F E H per axem factæ conoideos E F G H: ductâ deinde contingente L I ſectionem in E quæ æquidiſtet B D, deſcribatur circulus radio L E, & ſuper baſi I K L ponatur cylindrus I M N O.

Dico conoides E F G H æquari ſpatio coni quod cylindrũ I M N O L, circumcingit.

a.189.huius



Demonſtratio.

EST enim ſpatium coni reſciſſum IBCDL, æquale conoidi ſimul cum ſpatio quod conoides ambit: rurſus idem ſpatium coni æquale eſt corpori cylindrico ſimul cum ſpatio ſolido quod cylindrum circundat; eſt autem, demonſtratum ſpatium quod conoides cingit æquari cylindro IMNOL, igitur ablatis æqualibus remanent conoides & ſpatium quod cylindrum ambit æqualia inter ſe. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CXCII.

Iiſdem poſitis:

Dico conum abſciſſum AIKL ad ſpatiũ quod circundat conoides EFGH habere rationem compoſitam ex ratione altitudinis AE ad altitudinem EP, & ex ratione IL ad triplam rectæ IL.

Demonſtratio.

OStenſum enim cùm ſit, cylindrum IMNOL ęquari ſpatio ſolido quod ambit conoides hyperbolicum, igitur quam rationem habebit conus AIKL ad cylindrum IMNOL, eandem quoque habebit ad corpus cingens ipſum conoides. ſed ratio coni AIKL ad cylindrum IMNOL, componitur ex ratione AE ad EP. & ex ratione IL ad triplam IL: igitur etiam conus AIKL ad corpus ambiens conoides habet rationem ex iiſdem compoſitam.

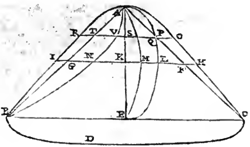
PROPOSITIO CXCIII.

REcto conoidi incluſus ſit cònus ABDC factaq; per axem AE ſectione triangulari ABC & hyperbolicâ BRAOC, diuiſiſq; AB, AC bifariam in F & G: ductâque FG quę ſectioni hyperbolicæ occurrat in H & I, fiat rectangulo HFI æquale quadratum KL, & per AE axem, & LK ſemiaxem deſcribatur ellipſis. Deinde fiat rectangulum ſub EB & MK æquale quadrato LK, & deſcribatur parabola AME, cuius axis MK facto denique rectangulo ſub EB & KN, æquali quadrato KG ſeu FK deſcribatur parabola ANB, cuius vertex A.

Dico conoides hyperbolicum ad conum incluſum eam obtinere proportionem quam ſuperficies AMEBNA ad ſuperficiem ANBEKA.

Demon-

Demonſtratio.



SVperficies AHCFA ducta in ſuperficiem AFCBIA, æquale [a] ſolidum pro- a 45.Def.
ducit magnitudini quę ntitur ex ductu ſemiellipſeos ALE ductæ in ſe, cùm ex hypotheſi rectangulum HFI, æquetur LK quadrato, & quodlibet rectangulum OPR (dummodn OR æquidiſtet HI) æquetur quadrato QS, cùm rectangula HFI, OPR, &c. ſint quadratis LK, QS, &c. proportionalia: eſt enim per 168. huius rectangulum HFI, ad rectangulum OPR, vt rectangulum AFC ad APC c 45.Def.
hoc eſt rectangulum AKE ad ASE, hnc eſt 4. ellipſ. vt quadratum KL ad quadratum SQ. ſed APLE ductum in ſe æquatur ſolido quod habet baſim parabolam AME, & [b] altitudinem EB, cùm ex hypntheſi rectangulum ſub EB, & MK æquetur quadrato LK, igitur etiam AHCFA ſuperficies ducta in planum AFCBIA, ęquatur eidem ſnlidn quod haber baſim AME & altitudinem EB.

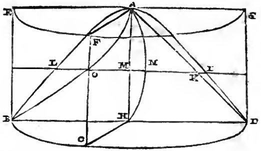
Simili ratione triangulum AFCE ductum iu ſe æquatur ſolido habenti baſim ſpacium parabolicum ANBE, & altitudinem EB; cùm KN, KG (hoc eſt FK) EB ſint prnportionales ex hypoth. & quęcunque SV, ST, EB, modò ST ſit parallela EB, ſimili ratione proportionales ſint. Quare cùm totum AOCE ductum in ſe æquetur AOCFA ducto in AFCBIA, & ſimul triangulo AFCE ducto in ſe ſiue in triangulum ABE, eùm quadrata HK, æqualia ſint rectangulis HFI, FKG; etiam totum AOCE, ductum in ſe æquatur ſolido habenti pro baſe ſuperficies AME & ANBE, hoc eſt ſuperficiem AMEBNA, & altitudinem EB. ſed ſolida illa quę altitudinem habent EB, communem, ſunt vt baſes AMEBNA, ANBESA. ergo & hyperbola AOCE ducta in ſe eſt ad triangulum AFCE, ductum in ſe vt ſuperficies AMEBNA ad ſuperficiem ANBESA. Sed ſicut ſe d Ex 129.
habet AOCE ductum in ſe ad triangulum AFCE ductum in ſe, ita quoque ſe ha- huius.
bet [c] AOCE, ductum in orbem ad triangulum AFCE, ductum in orbem, hoc eſt conois facta per gyrationem hyperboles AOCE ad conum factum ex circumductu trianguli AFCE, cùm quadrata HK ordinatim poſitarum ad quadrata FM ordinatim poſitarum eandem rationem contineant quam circuli quorum radij ſunt HK ad circulos quorum radij ſunt FK. ergo patet conoides ABDC ad conum inſcriptum AGBDC, eam habere rationem quam ſuperficies AMEBNA ad ſuperficiem ANBESA. Quod demonſtrandum fuit.

PROPOSITIO CXCIV.

SIt conoides ABCD incluſum cylindro EFCDG.

Oporteat autem rationem corporum aſſignare cylindri ſcilicet & conoideos.

Conſtructio & demonſtratio.



DVcatur per axem communem AH planum quod exhibeat parallelogrammum rectangulum GB, & hyperbolam BAD. ductâque rectâ DA ponatur linea IL parallela DB, quę biſecet AD in K, & rectangulo IKL fiat ęquale rectangulum ſuper HB & NM; & deſcribatur parabola ANH cuius axis NM. Denique fiat rectangulum ſuper HB, & MO æquale quadrato KM, & deſcribatur AOBM parabola. Dico cylindrum EFGDCB ad incluſum conoides hyperbolicum eam rationem obtinere quam rectangulum AEBH ad ſuperficiē paraboli-cam ANHBOA. In præcedenti oſtenſum eſt hyperbolam ADH ductam in ſe æquari plano ANHBOA ducto in altitudinem HB. Ergo quod fit ex rectangulo GDHA, ducto in eandem altitudinem HB eſt ad hyperbolam ADH ductam in ſe vt GDHA, ſiue AHBE ad planum ANHBOA. ſed quam rationem habet AGDH ductum in ſe ſiue in altitudinem HB ad AIDH in ſe ductum eam quoque ſeruat corpus cylindricum ad conoidicum cùm quadrata linearum rectanguli AGDH ad quadrata ordinatim poſitarum in hyperbola ad axem AH, eandem habeant rationem quam circuli radijs earundem linearum deſcripti. Igitur, manifeſtum eſt cylindrum ad conoides habere rationem quam rectangulum AEB ad ſuperficiem ANHBOA. Quod fuit demonſtrandum.

a 129. huius.

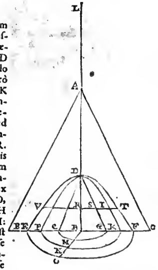
PROPOSITIO CXCV.

SInt AB, AC aſymptoti angulum rectum continentes hyperbolæ EDF, cuius vertex D; axis ADH. ponatur autem DG conſtituens angulum HDG ſemirectum. Ducatur deinde parabola DIK cuius latus rectum ſit æquale diametro tranſuerſę DL.

Dico conoides hyperbolicum DEOF æquari conoidi parabolico DPNK, ſimul cum cono DQMG.

Demon-

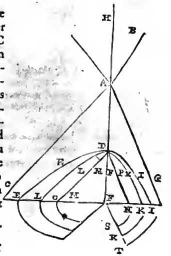
Demonſtratio.



POnatur enim R T parallela H F. Quoniam angulus B A C rectus ponitur, igitur tranſuerſa diameter & recta hyperbolæ D E F æquales [a] ſunt inter ſe. Vnde rectangulū L H D æquale eſt [b] quadrato H F, & rectangulo L R D æquale R T quadratum, quia verò diameter tranſuerſa L D eſt parabolæ D I K latus rectum ex conſtructione; igitur rectangulo L D R æquatur quadratum R I, & rectangulum L D H æquatur H K quadrato. ſed rectangula L H D, L R D, æquantur [c] rectangulis L D H, L D R, cum quadratis D H, D R. ergo quadrata F H, T R æquantur quadratis K H, I R cum quadratis D H, D R, hoc eſt cum quadratis G H, S R, ſunt enim D H, D R pares G H, R S 5. primi, quod angulus G D H, ex hypotheſi ſit ſemirectus, anguli verò S R D, G H D recti. Cùm igitur quadrata R T, F H æqualia ſint quadratis I R, S R, & K H, G H: igitur D T F H ductum in ſe, æquale eſt D I K H ducto in ſe ſimul cum D S G H in ſe ducto, vt patet ex diſcurſu quadrageſimę quintæ libri de ductu plani in planum. ſed ſicut ſe habent quadrata T R, F H, ad bina quadrata I R, S R & bina K H, G H, ita ſe habent circuli quadratorum illorum lateribus tanquam radijs deſcripti. Igitur etiam conoides hyperbolicum D E O F æquale [d] eſt conoidi parabolico D P N K, ſimul cum cono D Q M G. Quod fuit demonſtrandum.

a 41. hyp.
b 10. hyp.
c 5. ſecund.
d 119. huius.

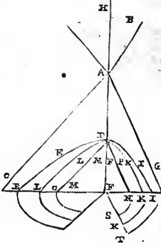
PROPOSITIO CXCVI.



SInt A B, A G aſymptoti figuræ D I F cuius axis D F, & diameter tranſuerſa D H. Conſtitutâ deinde A C quę cum axe A F angulum ſemirectum conſtituat, ponatur eidem A C parallela D M O: deinde ponatur D E E hyperbola cuius aſymptotos A C, & latus tranſuerſum H D, & ſimul ponatur parabola D L F, cuius latus rectum quoque ſit D H, tandem fiat vt F E ad F L, ita F I ad F K, & per puncta D K deſcribatur linea, ponatutque D N parallela A G, & circumuolutio D I F, D K F, D N F producat conidea & conum, cuius baſes circulares ſint I T, K K, N S.

Dico conoides hyperbolicum D I T æquari conoidi parabolico D K K ſimul cum cono D P N S.

De-



Demonſtratio.

a Ex 1. de hyperb.

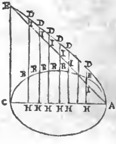
CVm duæ hyperbolæ DEE, DII ad eandem diametrum tranſuerſam DH conſtitutæ ſint, ordinatim applicatæ vnius, ſcilicet IF ad IF eandem rationem obtinent, cum ratione ordinatim applicatarum alterius FE ad FE. ſed etiam ex eo quod EF ad LF, eandem rationem habeant ex conſtructione quam rectæ IF ad KF, etiam conſtat DKK eſſe parabolam per ea quæ libro de parabola præmiſimus. Quoniam igitur eſt quadratum IF ad FE quadratum vt circulus radij IF ad circulum radij FE. igitur vt conoides IF ad FE conoides, ita eſt conoides KF vnà cum cono PF ad conoides FL vnà cum cono FM. eſt autem propoſitione præcedenti demonſtrata æqualitas inter conoides EF & conoides LF cum cono MF. Igitur manifeſta eſt etiam æqualitas conoidis hyperbolici IF cum conoide KF & cono PF. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXCVII.

b Prop. 146. SIt ellipſis ABC producens hyperbolam EDA, iuxta ea quæ[b] libro de hyperbola præmiſimus, & hyperbola conoides produxerit ADE, ellipſis verò ſphæroides ABC, triangulum quoque AIEC produxerit conum AIEC.

Dico conoides hyperbolicum ADEC æquale eſſe ſphæroidi ABC ſimul cum cono AIEC.

Demonſtratio.



DVctis ordinatim ad AC axem rectis DIBH, ponantur AB, erunt AB ex conſtructione propoſitionis ſuprà citatæ in libro de hyperbola æqualis rectis DBH, & recta EC æqualis axi AC. eſt autem quadratum AB æquale quadratis AH & BH. Igitur etiam quadratum DH iiſdem quadratis AH, BH æquale eſt. ſed, quia AC, CE æquantur, etiam AH, IH, adeoque & quadrata AH, IH æquantur. ergo quadrata DH æquantur quadratis IH & BH ſimul ſumptis. Quare ſuperficies hyperbolica DH ducta[c] in ſe, æquale corpus formabit illis magnitudinibus quæ fient ex ductu planorum HB & HI, in ſeipſa. Quare cùm circuli ſuper quadratorum illorum lateribus tanquam radijs deſcripti eandem rationem inter ſe ſeruent quam ipſa quadrata, etiam[d] conoides ex reuolutione ſuperficiei DH æquabitur, & ſphæroidi ABC & cono AIEC. Quod fuit demonſtrandum.

c Colligitur ex diſcurſu 45. dedu.

d Ex 129. huius.

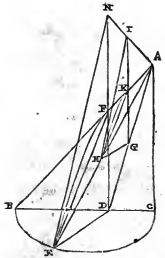
PRO-

PROPOSITIO CXCVIII.

SIt conus plano per axem ſectus exhibens triangulum A B C, ſecetur autem & altero plano D F E quod rectum ſit ad planum A B C producens in plano B A C ſectionem parallelam A C, iungaturque E F.

Dico coni partem A F E D ad pyramidem A F E D cuius baſis eſt triangulum D F E, vertex A habere rationem quam quatuor ad tria.

Demonſtratio.



QVoniam ſectio F D E eſt parallela lateri A C & recta plano B A C, erit parabola, quæ quoniam ad triangulum ſibi inſcriptum rationem habet eandem quam quatuor ad tria, manifeſtum eſt etiam ſegmentum conicum A F E D, cuius baſis eſt parabola, ad pyramidem inſcriptam cuius baſis eſt triangulum D F E, eandem obtinere rationem quam quatuor ad tria, quod inſcriptis pyramidibus, diſcurſu illo ordinario elementi duodecimi nullius negocij eſt demonſtrare; liquet ergo propoſitũ.

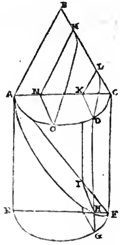
PROPOSITIO CXCIX.

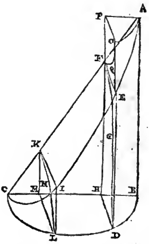
HAbeat conus A B C & cylindrus C E communem baſim A D C, cuius diameter A C diuiſa ſit vtcunque in N. factâ autem C K æquali rectę A N, fiant ſectiones paraboliçę N M O & K L D. denique ponatur planum per rectam K D, æquidiſtans axi cylindri ſcilicet K D G; ſecetur tandem cylindrus plano A H F quod ſit rectum ad planum per axem A C F formans in plano K D G ſectionem I H.

Dico partem coni A B M O N ad partem L K D C, eam habere rationem quam pars cylindri K D C F H I C ad reſiduum I H F G.

 Demon-

Demonſtratio.





PRo huius rei demõſtratione ſtatuatur cylindrus quicunque ille ſit A E G F C ſectus plano per axem exhibente rectangulum A E F in quo ducta diagonali A F fiat ſectio A H F, quæ recta ſit ad planum A E F. Deinde ſuper baſi A D C, ponatur conus verticem habens A, qui inſcriptus erit parti ſemicylindri A E C L B & tangetur à plano A E C ſecundùm rectam A C. Fiat deinde ſectio F E D H recta ad planum A B C exhibens in cylindro rectangulum F E D, in cono verò parabolã F G D. Pari modo factâ C M æquali G H, duc planum ad planum A B C rectum, producens rectangulum K I L M, & parabolam K N L. Vt F G D H parabola ad parabolam K N L M hoc eſt P F Q O, ita eſt rectangulum F E D H, ad rectangulum K I L M, hoc eſt ita eſt parabola M N O in cono A B C ad parabolam K L D: & hoc tam in omni ſubdiuiſione linearum B H, M C in cylindro quàm in omni ſubdiuiſione rectarum A N, K C in cono, ergo omnes parabolæ in parte coni A B M O ad parabolas in parte coni K L C D, vt omnia rectangula in parte cylindri A F E D H ad rectangula in parte cylindri I K C L, & vt parabolæ in parte coni A B M O ad rectangula in parte cylindri A F E D H, ita parabolę in parte coni K L C D ad rectangula in parte cylindri K I L M C, ergo vt pars cylindri ad partem cylindri, ita quoque pars coni ad partem coni, cùm baſes ſemper ſint in eadem ratione & altitudines æquales, vel in vna eademque ratione. Qui accuratiorem huius rei demonſtrationem requirit, ſubdiuidat A N & K C, lineas bifariam in infinitum quæ ſunt in cono, & ſimiliter lineas B H, M C, in cylindro & ſectionibus factis per eadẽ puncta inſcriptas figuras inter ſe comparet, quarum inſcriptionẽ hîc & alibi breuitatis cauſa omiſimus.

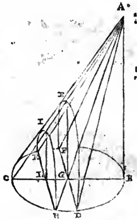
PRO-

PROPOSITIO CC.

SIt triangulum per axem A B C ad coni baſim B D C rectum, ſumptiſque in communis interſectione B C punctis G & L, erigantur G E, L I quæ æquidiſtent lateri A B: & ductis G D, L H ordinatim ad B C fiant ſectiones ſecundùm lineas E G D & I L H.

Dico rationem ſolidi A D E F ad ſolidum A H I K triplicatam eſſe rationis D F ad H K.

Demonſtratio.



SOlida A D E F, A H I K ſunt ad a pyramides ſibi inſcriptas vt 4. ad 3. ergo & eaodem habent rationem quam pyramides. ſed hæ compoſitam habent ex ratione triangulorum parabolis D E F, H I K inſcriptorum, (hoc eſt ex ratione b ipſarum parabolarum D E F, H I K) & ex ratione altitudinum B G, B L. ergo ſolida A D E F, A H I K rationem habent compoſitam ex ratione parabolarum D E F, H I K, & ex ratione altitudinum B G, B L. ſed ratio parabolarum componitur ex ratione altitudinum G E, I L, (hoc eſt ex ratione G C ad L C) & ex ratione baſium D F, H K, ſeu D G, H L. ratio igitur ſolidorũ A D E F, A H I K componitur ex rationibus B G ad B L, & G C ad L C, & G D ad L H. ſed rationes B G ad B L, G C ad L C, componunt rationem rectanguli B G C, ad rectangulum B L C, hoc eſt rationem quadrati D G ad H L, hoc eſt rationem duplicatam D G ad H L. ergo ratio ſolidorum A D E F, A H I K compoſita eſt ex ratione duplicata rationis D G ad H L, & ex ratione D G ad H L. hoc eſt ratio ſolidorum triplicata eſt rationis D G ad H L, ſiue D F ad H K. Quod erat demonſtrandum.

a 196. huius.

b 140. parab.

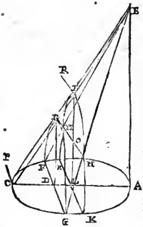
PROPOSITIO CCI.

SEcetur iterum conus per axem ſectione recta ad baſim exhibente triangulum A B C, & punctis L & D in communi interſectione aſſumptis erigantur L I, D E, parallelę A B, & poſitis L K, D G ordinatim ad A C, fiant ſectiones parabolicæ per I L K & E D G. Denique planum agatur per B, & rectam G F occurrens parabolæ H I K ſecundùm rectam N O M.

Dico parabolam F E G ad M I N habere duplicatam eius rationem quam habet F G ad N M.

Demon-

Demonſtratio.



VT eſt GF ad NM, ita eſt BD ad OB, hoc eſt DE ad OI, igitur vt eſt GF ad NM, ita eſt DE ad OI. ſimilia igitur ſunt triangula maxima GEF & NIM, parabolis inſcripta, ac proinde eorum ratio eſt duplicata rationis laterum GF, NM. ſed in libro de parabola demonſtratū eſt [a] parabolas eam inter ſe habere rationem quā triangula maxima inſcripta. ergo etiam parabola GEF ad parabolam NIM in duplicata eſt ratione GF ad NM. Quod autem triangula prædicta ſint maxima, quæ inſcribi poſſunt parabolis NIM, GEF, ſic oſtendo. LI, DE ſunt cōmunes ſectiones plani ABC recti ad baſim AGG, cum planis KHI, GEF, etiam rectis ad baſim. ergo 19. 11. LI, DE ſunt rectæ plano AAG ergo defin. 3. 11. etiam rectæ ſunt ad lineas KH, FG. ergo ſunt axes parabolarum KIH, GEF; liquet ergo [b] triangula NIM, GEF maxima eſſe.

a Propoſ. 340 parab.

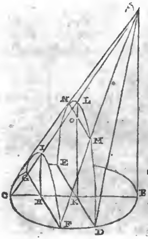
b Ibid. propoſ. 327.

PROPOSITIO CCII.

SIt ABC triangulum per axem coni ductum, rectum ad baſim BDC, & ſectiones parabolicæ DLE, FIG exhibentes communes cum triangulo BAC ſectiones KL, HI. Deinde planum agatur per A & rectam FG, producens in parabola DLE ſectionem MN.

Dico partem coni AMLN ad partem AFIG, habere triplicatam rationem BK ad BH.

Demonſtratio.



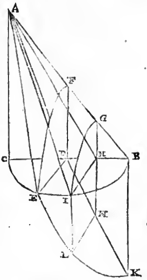
OStenſum eſt in præcedenti rationem parabolæ MLN ad parabolam FIG eſſe duplicatam rationis FG ad MN, hoc eſt LO ad IH, hoc eſt rationis AL ad AI, hoc eſt rationis BK ad BH. ſed manifeſtum quoque eſt partem coni AMLN ad partem coni AFIG, rationem habere compoſitam ex ratione baſis ad baſim, & ex ratione altitudinis BH ad altitudinem BK. Igitur ſi duplicatæ rationi BK ad BH, altera ratio BK ad BH, addatur in ſenſu multiplicationis, reſultabit ratio triplicata rationis BK ad BH. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CCIII.

TRiangulum ABC per axem coni factum ſecet normaliter baſim BEC; & ex centro baſeos D erigatur DF, parallela AC; ſimiliter ex quouis puncto diametri

metri B C erigatur recta H G æquidiſtans ſimiliter A C; ductiſque perpendicularibus H I, D E fiant ſectiones F D E, G H I. deniqne ponantur per rectas D E, H I, plana A D E, A H I. his poſitis ſupponatur quoque vngula D B K E, & planum G H I productum ſecet vngulam, exhibens communem ſectionem rectangulum H I L M.

Dico eandem eſſe rationem ſolidi A F E D ad ſolidum A G I H, quæ eſt vngulæ B D E K ad partem B H I L M K.



Demonſtratio.

OStendimus a rationem ſolidi A F E D ad ſolidum A G I H, eſſe triplicatam eius quam habet D E linea ad lineam H I. ſed etiam demonſtratum eſt b vngulam B D E K ad partem ſuam B H I L K habere triplicatam rationem eiuſdem D E ad H I. Igitur manifeſtum eſt corpora hæc inter ſe eſſe proportionalia. Quod erat demonſtrandum.

a 100. huius.

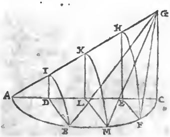
b 21. huius eiuſque Coroll.

PROPOSITIO CCIV.

SIt A B C baſis coni A G C; ſumptis autem punctis D E in diametro æqualiter à centro diſtantibus, erigantur E H, D I quæ æquidiſtent G C lateri trianguli per axem, & per I D, H E fiant ſectiones parabolicæ I D B, E H F aganturque plana ſecundùm D B & G, item E F & G.

Dico ſolida F G H E & B G I D, inter ſe æqualia eſſe.

Demonſtratio.



POnatur per centrum baſeos L planum K L M, quod æquidiſtet planis I D B, H E F, ponaturque planum per G & rectam L M. erit c ratio ſolidi G K M L ad ſolidum G I B D triplicata L M ad D B. ſimiliter conſtat d rationẽ ſolidi G K M L ad ſolidum G H F E eſſe triplicatam eius quam habet L M ad E F. Igitur cùm D B ſit æqualis E F (nam eſt ex hypotheſi A D æqualis E C) habebit ſolidum G K M L ad vtrumque ſolidum G I B D, & G H F E eandem rationem: æquantur igitur ſolida G I B D, G H F E. Quod erat demonſtrandum.

c 100 huius.

d Ex eadẽ.

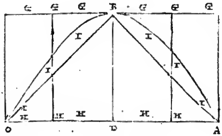
Concludo hunc librum nouâ quadraturâ parabolæ, quæ diuerſa omnino eſt à quadraturis ijs, quas dedimus libro quinto huius operis.

PROPOSITIO CCV.

PArabolam ADB, cuius axis ſit DB, ordinatim ad axem poſita AD, contineat rectangulum BDAG.

Dico rectangulum patabolæ ſeſquialterum eſſe.

Demonſtratio.



[a] Prop. 163. DVcatur diameter HG. Demonſtratum eſt in libro ductuum [a], ſolidum quod fit ex ductu rrianguli AGB in ſe, hoc eſt pyramidem cuius baſis eſt quadrarum BG altitudo BD, æquari ſolido quod fit ex plano GI, ducto in altitudinem BD. ergo ſolidum quod fit ex GI, in BD altitudinem, & pyramis eandem habent rationem ad HG rectangulum ductum in eandem altitudinem BD. ſed pyramis illa cuius nimirum baſis eſt quadratum BG, altitudo BD, eſt ſolidi quod fit ex ductu [b] 7. duodec. rectanguli GH in altitudinem BD, tertia [b] pars. ergo & ſolidum quod fit ex GI in altitudinem BD eſt tertia pars ſolidi, quod fit ex GH, in altitudinem BD; ſed hæc ſolida ſunt inter ſe vt baſes. ergo mixtilineum planum GI, eſt tertia pars rectanguli HG, ſiue BDAG, rectangulum igitur BDAG parabolæ ſeſquialterum eſt. Quod erat propoſitum.

Libri noni Finis.

QVA-

QVADRATVRÆ CIRCVLI

LIBER DECIMVS.

ARGVMENTVM.

TAndem aliquando ut operi coronidem imponamus, tempus eſt ea ad praxim redigere, quæ hucuſque præmiſimus: varias etenim materias tractauimus, quæ ab inuicem valde ſeparatæ nonnemini videbuntur. ſed præſentis libri decurſus oſtendet eas diſparatas nequaquam eſſe: vtemur enim in hoc libro medullâ præcedentibus excluſâ applicando eam circulo ad quadratum ſeu rectilineam figuram reducendo: quod vt præſtaremus, primò conati ſumus cylindrum ad eidem æquale ſolidum reducere, quod curuitate ſaltem circulari careret; proprietates etiam illius corporis varias indagauimus: reſtat hoc demum libro ex harum proprietatum ſecundùm proportionem collatione eruamus, quales ſint inter ſegmenta cylindrica rationes, ac proinde quæ proportio exiſtat inter baſes eorumdem ſegmentorum; quo tandem innoteſcat inter circularem & rectilineam figuram Geometrica proportio.

PARTITIO LIBRI.

Prima pars Lemmata complectitur quæ varijs quadraturis concinnandis inſeruire poterunt.

Secunda pars quadraturas varias circuli exhibet, modoſque reducendi cylindrica corpora ad rectilineas magnitudines ſolidas.

Tertia denique hyperbolem quoque per cylindricum hyperbolicum ad rectilinea ſolida reductum, ad figuras rectilineas planas reducit.

PARS

PARS PRIMA

Lemmata aliquot complectitur varijs quadraturis concinnandis inſeruientia.

PROPOSITIO PRIMA.

A

B C

RAtionis A ad B conſequenti termino B, adiungatur quantitas C.

Dico magnitudinem C additam B, minuere rationem A ad B, ac proinde rationẽ A ad B C minorem eſſe quàm ſit ratio A B.

Demonſtratio.

EX elementis conſtat quod eadem quantitas ad maiorem quantitatem minorem rationem habeat quàm ad maiorem: eſt autem B cum C, maior quàm ſit ſola quãtitas B. Igitur ratio A ad B C, minorem habet rationem quàm eadem A habeat ad ſolam B, quæ eſt minor quàm ſit vtraque B C, hæc autem alteratio rationis non contingit niſi per augmentum quantitatis C adueniens ipſi B, igitur acceſſus C ad B, diminuit rationem A ad B.

PROPOSITIO II.

A

B C

IIſdem poſitis:

Dico quod tantò minor ſit futura ratio A ad B C, ratione A ad B, quantò minor eſt quantitas B, quantitate B C.

Demonſtratio.

IN libro proportionalitatum Geometricarum prop.7. demonſtrauimus rationem A ad B C, eam habere proportionem ad rationem A B, quam reciprocè habet conſequens ſecundum B, ad primum B C. quantò igitur B quantitas minor eſt quantitate B C, tantò minor eſt ratio A ad B C, ratione A ad B.

PROPOSITIO III.

A

B C

DAta ſit ratio A ad quamuis aliam quantitatem diuiſam in B & C.

Dico rationem A ad B C æquari rationi A B diminutæ per rationem, quæ oritur ex magnitudine C addita quantitati B.

Demon-

Demonſtratio.

ITa decreſcit ratio A ad B, per augmentum C additum B, ſicut augetur ratio B A per idem C additum B; ſed ratio B A per augmentum C format rationem B C ad A. Igitur etiam ratio A ad B per C additum B, efficit rationem A ad B C, quæ eſt appoſita rationi BC ad A.

Paulò aliter.

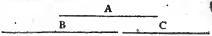
ITa ſe habet ratio A B ad rationem A, B C, vt quantitas B C eſt ad B. ſed B minor eſt quàm ſit B C magnitudine C. Igitur etiam ratio A ad B C, minor eſt ratione A ad B, ratione quæ cauſatur à quantitate C addita magnitudini B.

PROPOSITIO IV.

IIſdem poſitis:

Dico proportionem quæ eſt inter rationem A ad B, & rationem A ad B C, eandem eſſe cum proportione quam habet ratio B C ad B, ad rationem inter B & B.

Demonſtratio.



RAtio A ad B, ad rationem A ad B C, eſt vt B C a ad B. ſed ratio BC ad B, ad rationem B ad B, eſt etiam vt BC b ad B. ergo ratio A B ad rationem A ad B C, eſt eadem cum ratione BC ad B, ad rationem B ad B. Quod fuit demonſtrandum.

a 7. Proport.
b 1. Proport.

PROPOSITIO V.

IIſdem poſitis:

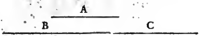
Dico quod ratio A ad B, excedit rationem A ad B C, ratione C ad B.

Demonſtratio.

RAtio A ad B, ad rationem A ad B C, per præcedentem æquatur rationi B C ad B, ad rationem B ad B. ſed ratio BC ad B, ſuperat c rationem B ad B, ratione C ad B. Igitur etiam ratio A ad B, ſuperat rationem A ad B C, ratione C ad B. Quod fuit demonſtrandum.

c 114. Proport.

PROPOSITIO VI.



DAta ſit ratio A ad quamuis aliam diuiſam in B & C.

Dico rationem A ad B C æquari rationi A ad B, minùs ratione C ad A.

Demonſtratio.

RAtio A ad B, ad rationem A ad B C, eſt vt B C ad B. Item ratio B C ad A, ad rationem B ad A, eſt vt B C ad B. Igitur ratio A ad B, ad rationem A ad

AAA BC, ea-

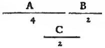
B C, eadem eſt cum ratione B C ad A, ad rationem B ad A. ſed ratio B C ad A, excedit rationem B ad A, ratione C ad A. Igitur etiam ratio A ad B excedit rationem A ad B C, ratione C ad A. Quod fuit demonſtrandum.

Scholion.

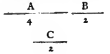
Videntur propoſitiones præmiſſæ quarta, quinta, & ſexta ſe inuicem omnino deſtruere, ac proinde vel altera vel vtraque non rectè ſubſiſtere. Verùm ſi rectè intelligantur prout poſtulat materia quæ ſpectat proportiones rationum, altera alterius videbitur eſſe confirmatio.



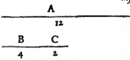
Ponantur itaque denuo duæ quantitates, vna A, altera diuiſa in duas ſcilicet B & C, aſſerit quinta propoſitio rationem A ad B, excedere rationem A ad B C, ratione C ad B, ſexta verò rationem A ad B, excedere rationem A ad B C, ratione C ad A; vnde neceſſariò videbitur inferri, quod ratio C ad B ſit eadem cum ratione C ad A, quod tamen elementis repugnat. Verùm ad ſoluendam hanc difficultatem ſciendum eſt, hos exceſſus non eſſe abſolutos, ſed reſpectiuos, cùm hic modus argumentandi ſit is, quo ſemper vti oportet in proportionalitatibus. Aſſerit itaque quinta propoſitio quod ratio A B excedat rationem A ad B C, ratione C ad B, non qualicumque ſed ratione C ad B relata ad rationem C cum B ad B, ratio enim exceſſus in materia rationum ſemper requirit aliam determinatam rationem cum qua conferatur, alioquin rationes exceſſuum inter omnes rationes ſemper eſſent æquales. Et ſic ſenſus eſt, rationem exceſſus quo ratio A B ſuperat rationem A ad B C, qui eſt ratio C ad B, debere conferri cum ſolâ ratione B C ad B; nam ratio B cum C ad B, illa eſt quæ ſuperat rationem B ad B, ratione C ad B. Similiter cùm dicitur propoſitione 6. rationem A ad B C æquari rationi A ad B, minùs ratione C ad A, ſubintelligi debet ratione C ad A, ad rationem B C ad A.



Vt hæc meliùs percipiantur, idem planè euenire oſtendemus in additione verâ, quando ſcilicet antecedens diuiſum eſt in duo, & conſequens eſt commune. Sit itaque A B antecedens & C conſequens: ſi petatur qualis ſit ratio A ad C, & B ad C, communis determinatio quidem eſt quã docuimus prop. 114. l. de proportional. quod ſit vt A B ad C: ſed hanc ipſam rationem aliter determinare iam placet, vt determinationem aliquam habeamus quæ communis ſit, & in hoc caſu, in quo antecedens diuiſum eſt, & in præcedenti in quo conſequens diuiſum eſt. Dico itaque in hoc caſu rationem A ad C, & B ad C, eſſe rationem A ad C, auctam ratione B ad C; non qualicumque, ſed rationis A B ad C. Itaq; ſit ratio A ad C, vt 4. ad 2. ſiue dupla, tota verò ratio A B ad C, vt 6 ad 2. ſiue tripla, itaque cùm rationi A ad C, addenda ſit ratio B ad C, rationis A B ad C, inquirendum eſt quam rationem habeat ratio B ad C, ad rationem B A ad C, illa autem per 2. lib. de proportional. eſt vt B ad A B. itaque cùm B ſit 2. & A B ſit 6. erit B vna tertia A B; itaq; rationi A ad C, quæ erat ratio dupla addatur vna tertia rationis A B ad C, quod fiet ſi ad A adiungas vnam tertiam A B, exurget ratio tripla qualem habet A B hoc eſt 6. ad C hoc eſt ad 2.



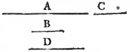
Eadem prorſus modo procedendum eſt cùm conſequens diuiſum: primâ enim determinatione vti non poſſumus cùm additio in hoc caſu nobis vſui eſſe non poſſit. Sit itaque A antecedens 12 & conſequens B C diuiſum in B 4, & C 2. Erit ratio A ad B, vt 12 ad 4 ſiue tripla, & ratio A ad B C, erit dupla: quæritur iam quæ ſit ratio A ad B, & A ad C, & ſecundùm ſenſum iam explicatum reſpondeo A ad B, & A ad C, eſſe rationem æqualem rationi A ad B, minus ſiue mutilata ratione C ad A; rationis B C ad A. Cùm itaq; ratio C ad A, ad rationem B C ad A, ſit vt C ad B C, per 2. lib. de proportional. & cùm C ad B C, ſit vt vnũ ad 3; itaque à ratione A ad B, hoc eſt à ratione tripla auferatur vna tertia rationis A ad B, remanebit ratio dupla qualem habet A ad B C, auferetur autem à ratione A ad B, vna tertia rationis A ad B, ſi ad B adiunxeris vnam tertiam totius B C.



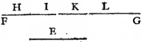
Sed

Sed hoc ipſum quod iam aſſumpſi explicandum eſt, quod ſcilicet auferatur aliqua ratio à ratiane A *ad* B*, ſi ad quantitatem* B *addatur quantitas* C*, vti & creſcere rationem* B *ad* A*, ſi ad* B *addatur aliqua quantitas* C*, quad ex Euclidais elementis ſatis quidem patet, tamen iuuerit claritatis causâ hanc materiam explicaſſe.*

Sciendum eſt igitur rationes augeri non tantùm per additiones rationum, & multiplicatianes, item minui non tantùm per ſubtractiones rationum, verùm etiam per ſolum incrementū vel decrementum quantitatis adiuncta vel dempta ab altero terminorum, antecedente ſcilicet vel conſequente altera etiam manente inuariato: Poſitâ enim ratione A *ad* B*, ſi ipſi* A *quantitati addatur quantitas* C*, exſurget ratio* A *cum* C *ad* B*, maior ratione eâ quam ſola quantitas* A *habet ad quantitatem* B*. pari pacto eueniet ſi ratio* B *ad* A *comparetur, & ipſi* A *eadem quantitas* C *addatur, tunc ratia* B *ad* A*, per augmentum quantitatis adueniens ipſi* A *reddetur diminuta, & quidem ſecundùm eam proportionem truncata, quæ reſultat ex variâ accretione factâ ipſi magnitudini* A *vt iam oſtensū eſt. Poſitâ verò alterâ* D *quantitate, reſultabit ratio* D *ad* A*, longè alia quàm fuerit ratio* B *ad* A*; & ratio* D *ad* A C *quantitatem longè alia quàm fuerit ratio* B *ad* A C *quantitatem; remanebit tamen ratio* D *ad* A*, ad rationem* D *ad* C*, eadem cum ratione* B *ad* A*, ad rationem* B *ad* C*, ſiue remanebit proportio rationis* D A *ad* D C *rationem, eadem cum proportione rationis* B A *ad* B C*, vt demonſtraui prop. 3. l. de proportional. eodem prorſus modo quo ratia* A *ad* B*, longè diuerſa eſt à ratione* A *ad* D*, & ſimiliter ratio* C *ad* B*, longè alia quàm ſit ratio* C *ad* D*: nihilaminus proportio rationis* A *ad* B*, ad rationem* C *ad* B*, eadem eſt cum proportione rationis* A *ad* D*, ad rationem* C *ad* D*, & quemadmodum rectè dicitur ratio* A *cum* C *quantitate ad magnitudinem* B*, æquatur rationi* A *ad* B*, &* C *ad* B *per accretionem rationis, ita quoque rectè loquemur ratianem* B *ad* A*, ſimul cum ratione* B *ad* C*, per mutilationem conſtituere rationem* B *ad* A C *mutilatam.*

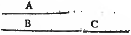


Quod autem de augmento C *dictum eſt aduentens ipſi* A*, intelligi debet de quouis augmento. Nam ratio* E *ad* F G*; diuiſam in partes* H, I, K, L*, nihil aliud eſt quàm ratio* E *ad* H*, &* E *ad* I*, &* E *ad* K*, &* E *ad* L*, ſecundùm intentianē propoſitionum quinta & ſexta. Nam ſicut in vera additiane ſecundùm ea qua docuimus prop. 114. l. de proport. rectè dicitur* F G *ad* E*, conflari ex rationibus* H *ad* E*,* I *ad* E*,* K *ad* E*,* L *ad* E*, ſibi adiunctis, ita diminuendo rationem rectè dicemus, rationem* E *ad* H G*, æquari rationi* E *ad* H*, diminuta per rationem* E *ad* I*,* E *ad* K*,* E *ad* L*, iuxta ſenſum antè datum ſcilicet augendo quantitatem* H *per additionem quantitatum* I, K *&* L*. Ex his itaque hoc modo intellectis ſequentem propoſitionem formabimus.*



PROPOSITIO VII.

SIt rationis A ad B C conſequens diuiſum in B & C.



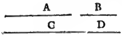
Dico rationem A ad totam B C, eandem eſſe cum ratione A ad B, & A ad C.

Demonſtratio.

ESt enim ratio A ad B C, æqualis rationi A ad B, mulctatæ ratione C ad A, per 6. huius. Sed ratio A ad B, & A ad C, etiam æqualis eſt rationi A ad B, diminutæ per rationem C ad A, iuxta iam dicta in Scholio præc. igitur ratio A ad totam B C, eſt eadem cum ratione A ad B, ſimul cum ratione A ad C.

Digitized by Google

PROPOSITIO VIII.



SInt iam rationes A B ad C D, termini tam antecedens quàm conſequens diuiſi, & antecedens quidem in A & B, conſequens verò in C & D.

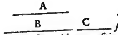
Dico rationem A B ad C D, eandem eſſe cum ratione A ad C, B ad C, item A ad D, B ad D.

Demonſtratio.

a Per 114. de proport.

RAtio A ad C, addita rationi B ad C, æqualis eſt rationi A B ad C. [a] Item ratio A ad D, addita rationi B ad D, æqualis eſt rationi A B ad D. Itaque cùm ratio A B ad C, vnà cum ratione A B ad D, æqualis ſit rationi A B ad C D per præc. patet rationem A B ad C D, æquari rationibus A ad C, B ad C, vnà cum rationibus A ad D, & B ad D.

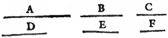
Scholion.



ATque hac propoſitio de quibuſuis ſubdiuiſionibus quantitatum A B, C D *intelligenda eſt, cùm planè vniuerſalis ſit propoſitio, vt conſideranti patet.*

Potuiſſem quidem propoſitionem ſeptimam tamquam veram aſſumere, cùm eius veritas ſatis patuerit ex ſenſu contrario additionis veræ; oſtenderam enim in 114. *lib. propoſt.* B *ad* A, *additam* C *ad* A, *facere rationem* B C *ad* A, *vnde facilè patebat* A *ad* B, *&* A *ad* C, *æquari rationi* A *ad* B C, *quamuis hîc per additionem quantitatis* C *ad* B, *fieret detractio & non additio; tamen hanc materiam fuſiùs deducendam putaui, adeoq; cum poſſet, etiam demonſtrãdam. Notandumq; hîc benè quod quando dicitur ratio* A *ad* B, *ſimul cum ratione* A *ad* C, *quod non intelligatur additio rationum, ſed tantùm intelligitur additio quantitatis* C *ad* B, *manente* A *inuariato, quod in gratiam eorum monendum duxi qui additione hac non benè intellectâ additionem rationum intelligerent, vbi nos additionem quantitatum volumus; clarum eſt enim, quòd ſi rationi* A *ad* B, *addas rationem* A *ad* C, *rationem* A *ad* B, *non minuendam ſed augendam, cùm tamen ſecundùm ſenſum noſtrum minui debeat, addita ſcilicet quantitate ad quantitatem termini conſequentis.*

PROPOSITIO IX.



SI proportionales fuerint quantitates A B C, D E F, æquales verò ſint C & F.

Dico rationem A ad D, duplicatam eſſe eius rationis quam habet B ad E.

Demonſtratio.

VIde lib. progreſſionum Geometricarum propoſitione vigeſimaſeptima.

PROPOSITIO X.

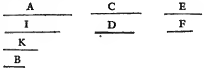
QVod ſi ratio A D duplicata fuerit rationis B ad E, & proportionales ſint ABC, DEF.

Dico C & F quantitates æquales eſſe.

ESt conuerſa præcedentis, eiuſque demonſtratio facilè elicitur ex hypotheſi.

PROPOSITIO XI.

SI ratio AB duplicata fuerit rationis eius quã continet ratio C ad D, ratio verò C ad D, duplicata ſit eius quam habet ratio E ad F;



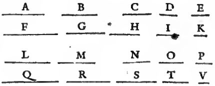
Dico rationem A ad B, quadruplicatam eſſe rationis E ad F.

Demonſtratio.

FIat vt C ad D, ita A ad I: vtque E ad F, ita I ad K: erit itaque ratio A ad B, duplicata rationis I ad B, vel A ad I: & ratio I ad B, vel A ad I, duplicata I ad K, vel K ad B. Compoſita autem eſt ratio A ad B, ex ratione A ad I, hoc eſt I ad B, hoc eſt duplicata K ad B, & ex ratione I ad K, & K ad B, quæ cùm æquales ſint inter ſe & ſimul æquales rationi A ad I, patet rationem A ad B, quadruplicatam eſſe K ad B, ſiue E ad F. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

SInt quatuor ordines quinque proportionalium ABCDE, & FGHIK: deinde LMNOP, & QRSTV, habentium vltimas quantitates E, K, P, V, æquales inter ſe.



Dico rationem quantitatum AF ad LQ, toties continere rationem quantitatum CH ad NS, quoties ratio quantitatum CH ad NS, continet rationem quantitatum DI ad OT.

Demonſtratio.

RAtio A cum F ad LQ, æquatur rationi AL, AQ & FL, FQ. [a] Similiter ratio quantitatum CH ad NS, æquatur rationi CN, CS, & HN, HS, quemadmodum etiam ratio D, cum I ad OT, æquatur rationi DO, DT, & IO, IT; [b] ergo quoties rationes AL, AQ, FL, FQ continent rationes CN, CS, HN, HS: & quoties hæ continent rationes DO, DT, IO, IT, toties continet etiam ratio AF ad LQ, rationem CH ad NS, & hæc ipſa rationem DI ad OT.

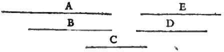
a Per 8. huius.

b Per eandem.

 Sed

a 117. Progr. Sed ratio a A L continet per multiplicationẽ bis C N, & ratio C N per multiplicationem continet bis rationem D O: Ratio quoque A Q bis continet rationem C S, & hæc bis continet rationem D T atque ita de reliquis: igitur quoties ratio quantitatum A F ad L Q, continet rationem quantitatum C H ad N S, toties hæc ipſa ratio quantitatum C H ad N S, continet rationem quantitatum D I ad O T. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.



Sint proportionales A B C, C D E extremum terminum C habentes communem.

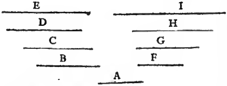
Dico rationem duplicatam rationis B ad C, additam rationi duplicatæ rationis D ad C, æquari rationi ipſius A cum E ad C.

Demonſtratio.

Ratio enim duplicata rationis B ad C, eſt ratio A ad C, & ratio duplicata rationis D ad C, eſt ratio E ad C. ſed ratio A ad C, addita rationi E ad C, b æquatur rationi A cum E ad C: Igitur etiam ratio duplicata B ad C, addita duplicatæ rationi D ad C exhibet rationem A cum E ad C. Quod fuit demonſtrandum.

b 114. Proportionalit.

PROPOSITIO XIV.



Sint proportionales quantitates A B C D E & A F G H I; quæ habeant communem terminum A.

Dico rationem E A additam rationi I A, æqualem illi conſtituere rationem, quam exhibet ratio C A ducta in ſe addita G A rationi in ſe ductæ.

Demonſtratio.

Quoniam A.B.C,D,E ſunt in continua, erunt etiam A,C,E in continua: pari modo quia A,F,G,H,I ſunt in continua, erunt & A,G,I in continua. ratio igitur E A duplicata eſt rationis C A, & ratio I A duplicata rationis G A. Ergo c ratio C A ducta in ſe producit rationem E A, & ratio G A ducta in ſe producit rationem I A. Sed ratio E ad A, addita rationi I ad A, producit c rationem E I ad A, d igitur ratio C A ducta in ſe addita rationi G A, ductæ in ſe producit etiam rationem E I ad A. conſtat itaque veritas propoſ.

c 81. Proportionalit.
d 114. Proport.

PROPOSITIO XV.

Iiſdem poſitis:

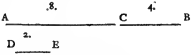
Dico rationem E A additam rationi I A, toties continere rationem C A, ductam in ſe additam rationi G A in ſe ductæ, quoties ratio C A ducta in ſe addita rationi G A in ſe ductę, continet B A quater in ſe ductam additam rationi F A ſimiliter quater in ſe ductæ.

Demon-

Demonſtratio.

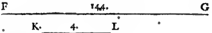
PRæcedenti eſt oſtenſum rationem C A in ſe ductam additam rationi G A, ductæ in ſe, exhibere rationem E cum I ad A: ſimili pacto inibi eſt demonſtratum rationẽ B A ductam in ſe additam rationi F A in ſe ductæ producere rationem C cum G ad A. ſed ratio B A in ſe quater ducta profert rationem E A, & ratio F A quater ducta dat rationem I ad A, quas rationes etiam producunt ratio C A in ſe ducta, & ratio G A ducta in ſe: cùm igitur ratio B A, quater ducta in ſe, addita F A rationi quater in ſe ductæ exhibeat rationem E cum I ad A, quam etiam producit ratio C A in ſe ductâ addita rationi G A ductæ in ſe; patet toties continere rationem E A additam rationi I A, rationem C A in ſe ductam additam rationi G A ductæ in ſe, quoties hæ continent rationem B A quater in ſe ductã, additam F A, rationi quater in ſe ductæ: nam vtraque bis in altera continetur in eodem genere continendi.

PROPOSITIO XVI.



LInea A B diuiſa ſit vtcunque in C, & data ſit quæuis alia D E. Dico rationem quadrati A B ad D E quadratum, æqualem eſſe rationi quadrati A C ad D E quadratum, & quadrati C B ad D E, quadratum ſimul cum ratione rectanguli A C B ad D E quadratum bis ſumptâ.

Demonſtratio.



F. 144. G.   K. 4. L.
M. 64. N.
O. 16. P.
Q. 32. R.
S. 32. T.
144.
V.

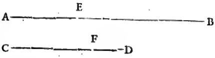
QVadratum enim A B æquatur quadratis A C, C B, & A C B rectangulo bis ſumpto. ſed ratio quadrati A C ad D E quadratum, addita rationi quadrati C B ad D E quadratum, æquatur rationi quadratorum A C, C B ad D E quadratum: [a] ſimiliter ratio quadratorum A C, C B ad D E quadratum, addita rationi rectanguli A C B bis ſumpti ad D E quadratum, efficit rationem quadrati A B ad D E quadratum; [b] igitur patet rationem quadrati A B, ad D E quadratum, æquari rationi quadrati A C ad D E quadratum, cum ratione quadrati C B ad D E, ſimul cum ratione rectanguli A C B bis ſumpti ad D E quadratum. Idem quoque patebit in numeris. Quadratum enim A B ponatur eſſe F G. & fiat vt quadratum A B ad D E quadratum, ita F G ad K L; ſitque A C quadrato æquale M N; quadrato verò C B æquale O P. denique rectangulo A C B æquale Q R vel S T. ergo M N, O P, Q R, S T æqualia ſunt F G. Oſtenſum verò eſt quod ratio F G ad K L, eadem ſit cum ratione M N ad K L, & O P ad K L, Q R ad K L, & S T ad K L: igitur collecta in vnam ſummam M N, O P, Q R, S T cùm exhibeant V æquale F G, patet quadratum F G ad K L, hoc eſt quadratum A B ad D E, eandem habere rationem, cum ratione quadrati A C ad D E, C B ad D E, & rectanguli A C B bis ſumpti ad D E quadratum. Quod erat demonſtrandum.

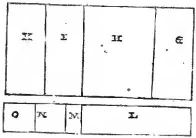
[a] *Per 114. propoſ.*

[b] *Per eand.*

PRO-

PROPOSITIO XVII.





Sint AB, CD diuiſæ vtcunque in E & F.

Dico rationẽ quadrati AB ad CD, eandem eſſe cum ratione AE quadrati ad CF, & FD quadrata, vnà cum ratione quadrati AE ad rectangulum CFD bis ſumptâ; inſuper cum ratione addita quadrati EB ad quadrata CF, FD, & rectangulum CFD bis ſumptum, ſimul cum ratione rectanguli AEB bis ſumpti ad quadrata CF, FD, & rectangulum CFD bis.

Demonſtratio.

Ponantur G, H, I, K æqualia eſſe quadratis AE, EB, & rectangulo AEB bis ſumpto. Similiter LMNO æqualia quadratis CF, FD & rectangulo CFD bis ſumpto. Igitur ratio G ad L, & M, & N, & O, eſt ratio quadrati AE ad quadrata CF, FD, & CFD rectangulum bis ſumptum, & ſimiliter ratio H ad L, M, N, O, eſt ratio quadrati EB ad quadrata CF, FD, & rectangulum CFD bis ſumptum, tandem etiam ratio I vel K ad L, M, N, O eſt ratio rectanguli AEB ad quadrata CF, FD & rectangulum CFD. ſed etiam ratio G ad L, M, N, O, addita rationi H ad eadem L, M, N, O, æqualis eſt rationi GH ad L, M, N, O,[a] & conſequenter ratio G cum H ad L, M, N, O, addita rationi I vel K ad L, M, N, O, æquatur GH I vel K ad eadem L, M, N, O, hoc eſt rationi totius GK ad totum LO. Igitur etiam ratio quadrati AE ad CF, FD quadrata vnà cum duobus rectangulis CFD, addita rationi quadrati EB ad eaſdem quantitates, ſimul cum additione rationis rectanguli AEB bis ſumpti, ad eaſdem, æquatur rationi quadrati AB ad CD. Quod erat demonſtrandum.

[a] Per 8. huius.

PROPOSITIO XVIII.



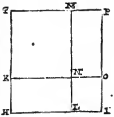
Sint AB & CD, vtcunque diuiſæ in E & F.

Dico AB ductum in CD æquari AE in CF, & AE in FD ſimul cum EB in CF, & EB ducto in FD.

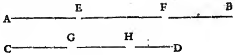
Demon-

Demonſtratio.

Flat rectangulũ G I, ex G H æquali A B, & H I æquali C D, quod ęquale erit A B ductę in C D: diuiſis deinde G H, H I in K & L, ſecundũ rationẽ quâ diuiſæ ſunt A B, C D in E & F; ponantur K O, L M quæ æquidiſtent G H, H I. erunt igitur rectangula K L, N I, G N, N P æqualia toti G H in H I, hoc eſt A B ducto in C D: eſt autem K L æquale A E in C F, & N I æquale A E in F D; & G N æquale E B in C F, & N P æquale E B in F D. Igitur etiam A B ductum in C D, æquale eſt A E in C F, & A E in F D ſimul cum E B in C F, & E B in F D. Quod fuit demonſtrandum.

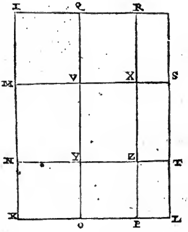


PROPOSITIO XIX.



QVod ſi A B, C D diuiſæ ſint vtcunque in E F & G H.

Dico A B ductum in C D, ęquari A E in C G; A E in G H; A E in H D; ſimul cum E F in C G, G H, H D; vnà cum F B in C G, G H, H D.



Demonſtratio.

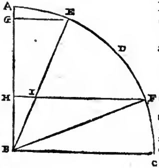
Flat rectangulum I L ex I K, æquali A B & K L, æquali C D. erit igitur I L æquale A B ducto in C D, diuiſis autem I K, K L in M, N & O, P, ſecundùm eandem rationem qua diuiſæ ſunt A B & C D in E, F, G, H; ponantur M S, N T, & O Q, P R quæ æquidiſtent I K, K C L. erũt igitur rectangula I V, Q X, R S, cum rectangulis M Y, V Z, X T, & rectangulis N O, Y P, Z L æqualia toti I L, hoc eſt A B ducto in C D: ſunt autem I V, Q X, R S, æqualia A E in C G, G H, H D: inſuper M Y, V Z, X T æqualia E F in C G, G H, H D: denique N O, Y P, Z L, æqualia F B, in C G, G H, H D. Igitur etiam A B dnctum in C D æquatur ijſdem A E ſcilicet in C G, G H, H D, ſimul cum E F in C G, G H, H D, & F B in eoſdem C G, G H, H D. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

Scholion.

Data opera hanc demonſtrationem conatus ſum iiſdem verbis demonſtrare, quibus in præcedenti vſus fueram; quo ſubterfugerem occaſionem plures formandi propoſitiones quæ materiam eandem concernunt, & ſolo differunt numero diuiſionum; vnde quod duabus præcedentibus oſtenſum eſt, vniuerſaliter aſſumi poterit de quouis numero partium reperto in diuiſionibus linearum.

PROPOSITIO XX.



Sit quadrantis A B C arcus A C biſectus in D, fiantque D E, D F æquales arcus; & ex E & F ponantur E G, F H quæ æquidiſtent C B, iunganturque B E, B F.

Dico ſectorem E B F figuræ E G H F æqualem eſſe.

Demonſtratio.

Quoniam arcus D A, D C æquales ſunt, & ſimiliter D E, D F ex conſtructione; igitur anguli E B A, C B F[a] æquales ſunt. Atqui angulus H F B, æqualis F B C, quoniam F H æquidiſtet C B: igitur anguli E B A, H F B æquales ſunt inter ſe. ſunt autem anguli E G B, F H B recti; ſimilia itaque ſunt triangula E G B, F H B: & quia latus E B lateri F B eſt æquale; etiam æqualia inter ſe ſunt eadem triangula: eſt autem I H B triangulum vtrique commune, ergo communi ablato I H B, reſidua E G H I, & F I B æqualia erunt. Additâ igitur communi quantitate F I E, erit ſector F B E æqualis figuræ E G H F. Quod erat demonſtrandum.

a Ex elementis.

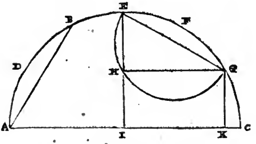
PROPOSITIO XXI.

In circulo A B C ſubtendat quædam recta A B arcum A D B.

Oporteat autem arcum alium commenſurabilem arcui A D B, exhibere in eodem circulo, à cuius extremis punctis perpendiculares ductæ ad diametrum intercipiant lineam datæ A B æqualem.

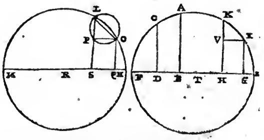
Conſtru-

Conſtructio & demonſtratio.



POnatur E F G commenſurabilis aliquis arcus arcui A D B, cuius ſubtenſa ſit E G maior A B, ſubtenſâ arcus A D B. deſcripto deinde circulo E H G ſuper diametro E G, ponatur G H æqualis A B; quod fieri poterit, cùm E G diameter maior ponatur recta A B, per centrum denique circuli A B C ponatur A C diameter, quæ æquidiſtet G H; & demittatur E H I, & huic æquidiſtet G K. Dico factum quod requiritur. angulus enim E H G rectus cùm ſit, etiam E I K rectus erit, vti & angulus G K I. vnde rectangulum eſt H K: & H G æqualis I K, hoc eſt A B, eſtque arcus E F G commenſurabilis A D B ex conſtructione. quare perfectum eſt quod requiſitum fuit.

PROPOSITIO XXII.



SInt A B, C D normaliter poſitæ ad diametrum E F. O porteat aliquem arcum I K conſtituere in eodem circulo commenſurabilem arcui A C, ex cuius extremis lineæ K H & I G, perpendiculariter demiſſæ ad diametrum intercipiant G H rectam æqualem B D.

Conſtructio & demonſtratio.

DEſcribatur centro R circulus M L N æqualis E A F, in quo aſſumatur aliquis arcus O L commenſurabilis arcui A C, cuius ſubtenſa O L, maior ſit quàm B D, & diametro O L ducatur circulus L P O, & ponatur O P æqualis B D, ductiſque L P S, O Q parallelis inter ſe per punctum R ducatur M R N parallela O P, & ex

centro T. fiat T H æqualis R S, & M Q æqualis E G,& erigantur H K, G I perpendiculariter ad EF diametrum.

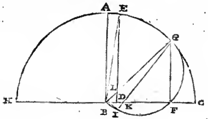
Dico arcum I K, eum eſſe qui petitur. Quoniam angulus O P L rectus eſt, eſtque M N parallela O P,etiam angulus B S Q rectus eſt, adeoque S L perpendicularis eſt diametro. ergo & O Q ipſi L S parallela, ad diametrum recta eſt, rectangulum igitur eſt O S, ac proinde Q S æquatur O P, hoc eſt B D. Deinde quia perpendiculares G I, H K per conſtr. ſecant ſemidiametrum E T, ſimiliter in G & H, vt perpendiculares Q O, S L ſecant ſemidiametrum M R æqualem E T ſemidiametro, patet arcum I K æquari arcui O L, & G H ipſi Q S. Sed arcus O L ex conſtr. commenſurabilis eſt arcui A C, & Q S æquatur B D; arcus igitur I K commenſurabilis eſt arcui A C, & perpendiculares ab eius extremis punctis dimiſſæ, intercipiunt ex diametro G H partem B D. Factum igitur eſt quod petebatur.

PROPOSITIO XXIII.

SIt A B C quadrans circuli: ponantur autem D E, F G ordinatim ad diametrum H C, ſitque E A arcus minor arcu G C, & iungantur E B, G B.

Dico ſegmentum E D F G maius eſſe ſectore E B G.

Demonſtratio.



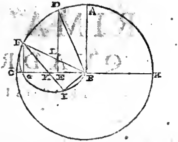
DEſcribatur circulus ſuper B G, ſcilicet B I G; in quo aptatâ B I quæ ſit æqualis B D, addatur G I: erunt igitur B I F G in eodem circulo: ponitur autem arcus A E minor arcu G C, angulus igitur A B E, hoc eſt B E D, hoc eſt B G I (ſunt enim triangula B E D, B G I æqualia ac ſimilia) minor eſt angulo G B F, latus igitur G K maius eſt latere K B, & conſequenter triangulum G K F maius B K I triangulo, cùm ſimilia ſint inter ſe. quare addito communi G B K triangulum G B I, hoc eſt E B D minus eſt triangulo G B F, ablato denique communi triangulo L B D, remanebit E B L minus quàm G L D F, addito igitur communi E L G, erit ſector E B G minor ſegmento E D F G. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV.

IN quadrante circuli A B C poſitæ ſint ordinatim rectæ D E, F G ad diametrum H C, & iungantur D B, F B. ſit verò arcus A D maior arcu F C. Dico ſegmentum circuli D E G F minus eſſe ſectore D B F.

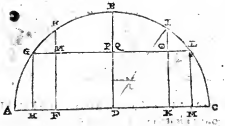
Demon-

Demonſtratio.



DEſcribatur circulus B I F ſuper diametro B F cui inſcribatur B I, æqualis B E, iungaturque F L erit igitur triangulum B F I æquale ac ſimile triangulo B D E, adeoque angulus B F I æqualis angulo B D E, & quia arcus A D maior eſt arcu F C, erit angulus A B D, hoc eſt B D E, hoc eſt B F I, maior angulo F B C, ac proinde latus B K maius latere K F, & conſequenter triangulum B K I maius ſibi ſimili triangulo F K G: addito igitur communi B F K, maius eſt triangulum B F I, hoc eſt B D E triangulo B F G, ablato communi triangulo B L E, remanebit trapezium L E G F minus triangulo D B L, ac proinde addita rurſus communi quantitate D L F erit ſegmentum D E G F minus ſectore D B F. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.



DIuidant circulum A B C diametri A C, B D ad angulos rectos conſtitutæ: diametro verò B D ponantur æquidiſtantes E F, G H & I K, L M, intercipientes H F & K M æquales lineas, ita vt arcus B I, L C ſint æquales vti & arcus E B, A G.

Dico etiam G E, I L æquales arcus eſſe.

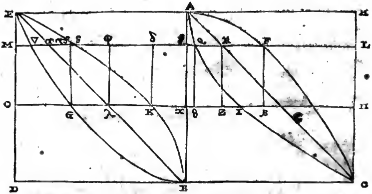
Demonſtratio.

DVcantur L Q, G P, quæ æquidiſtent A C. Quoniam I B arcus æqualis eſt arcui L C, igitur I K æqualis eſt rectæ L Q. ſimiliter E F æqualis erit ob eandem rationem rectæ G P; & conſequenter I O æqualis rectæ O L, id eſt K M. quemadmodum linea E N lineæ G N, id eſt H F. vnde cum recta H F ſit æqualis K M, ex ſuppoſitione, etiam E N rectę I O eſt æqualis. Quoniam igitur æquales ſunt G N, ipſi O L; & E N ipſi I O, etiam quadrata G N, E N æquantur quadratis O L, I O, eſt autem quadratum ſubtenſæ arcus G E ęquale quadratis G N, N E ſicut & quadratum ſubtenſę arcus I L ęquale quadratis I O, O L. ergo quadrata ſubtenſarum arcubus G E, I L, ac proinde etiam ſubtenſæ ipſę æquantur. Igitur etiam arcus G E, I L ſunt æquales. Quod fuit demonſtrandum.

PARS SECVNDA:

PRIMA CIRCVLI QVADRATVRA.

PROPOSITIO XXVI.



SVper recta AB, conſtituta ſint quadrata ABC, ABD quorum diagonales ſint AC, BE, ſitq́; eadem AB axis parabolarum ſubalternè conſtructarum AFC & BGE, quarum vertices ſint A & B, ſint denique rectæ AH & BD axes parabolarum AIC, BKE, quarum ſimiliter vertices ſint A & B, tandem ponatur quæuis LM, quę æquidiſtent CD, ſecetq́; parabolas in F, Q, S, V, diagonales in R & T, lineam verò AB in P.

Dico tam PQ, PR, PL quàm PS, PT, PM eſſe in proportione continua.

Demonſtratio.

VIde demonſtrationem in libro de parabola propoſitione 67.

PROPOSITIO XXVII.

IIſdem poſitis:

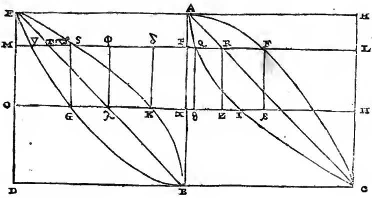
Dico tam lineas PR, PF, PL, quàm rectas PT, PV, PM eſſe proportionales.

Demonſtratio.

HOc pariter demonſtratum inuenies eodem libro de parabola propoſitione 42.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.



Iſdem manentibus:
Dico rectangula QPS, RPT, LPM eſſe proportionalia.

Demonſtratio.

Sunt enim,ᵃ PQ, PR, PL, in continua analogia: item PS, PT, PM per eandem ſunt in analogia continua. ergo per ea quę demonſtrauimus in libro progreſſionumᵇ etiam rectangula PQS, RPT, LPM eandem proportionem continuant. Quod erat demonſtrandum. a 16. huius. b 58. Progr.

PROPOSITIO XXIX.

Iſdem poſitis:
Dico rectangula RPT, FPV, LPM, eandem continuare analogiam.

Demonſtratio.

Oſtenſum eſt,ᶜ tam PR, PF, PL, quàm PT, PV, PM, eſſe in continua. ergoᵈ etiam rectangula RPT, FPV, LPM ſunt in continua analogia. Quod erat demonſtrandum. c 17. huius. d 58. Progr.

PROPOSITIO XXX.

Quod ſi eadem manente figura ponatur NO parallela rectę CD ſiue LM occurrens ſectionibus BKE, BGE in K & G, rectæ verò diagonali BE in λ, ex quibus punctis ponantur Kδ, λφ, Gϖ quæ æquidiſtent AB. Denique ex punctis Q, R, F, conſtituantur Qθ, RZ, Fβ quæ eidem rectæ AB ſint parallelæ.

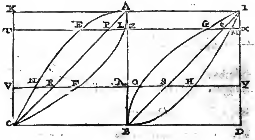
Dico parallelepipeda quę ſuper baſibus rectangulis QPδ, RPφ, LPM conſtruuntur habentia communem altitudinem PX, proportionalia eſſe inter ſe, quemadmodum ſimiliter ſunt parallelepipeda ſuper rectangulis RPφ, FPϖ, & LPM conſtituta, habentia communem quoque altitudinem PX.

Demon-

Demonſtratio.

a 28. *huius.* OStenſum[a] tam lineas P Q, P R, P L quàm X K, X λ, X O proportionales eſ-
b 58. *Progreſſ.* ſe, hoc eſt P δ, P φ, P M. vnde[b] rectangula quoque proportionalia ſunt Q P δ R P φ, L P M, ſunt autem parallelepipeda communem habentia altitudinem P X inter ſe vt baſes. quare cùm baſes perhibeantur eſſe proportionales, etiam parallelepipeda proportionalia ſunt, quorum illę baſes ſunt. Pari quoque modo oſtenditur parallelepipeda habentia baſes, rectangula R P φ, F P ϖ, L P M & communem altitudinem P X, proportionalia eſſe; cùm etiam baſes illorum proportionales ſint,
c Ex 29. *huius & 58. progreſſ.* quare[c] conſtat veritas propoſitionis.

PROPOSITIO XXXI.



SVper A B conſtructis quadratis A B C, A B D, deſcriptis prętеrea parabolis A E C, B H I quarum vertices ſint A & B, axes verò A B, B A; item parabolis A F C, B O I, quarum vertices etiam ſint A & B, axes verò A K, B D; poſitis inſuper E G, F H quę æquidiſtent C D, & ſectionibus occurrant in E, L, G, M & N, F, O, H, diagonalibus quoque A C, B I, in punctis P, Q, R, S.

Dico rectangulum L Z G ad F λ O, rectangulum duplicatam habere rationem eius, quam habet rectangulum P Z Q ad R λ S rectangulum.

Demonſtratio.

d 28. *huius.* OStenſum eſt ſuprà[d] tam rectangula L Z G, P Z Q, T Z X quàm rectangula F λ O, R λ S, V λ Y eandem continuare rationem. Quare cùm extrema rectangula
e 9. *huius.* T Z X, V λ Y ſunt æqualia, erit[e] ratio rectanguli L Z G, ad rectangulum F λ O duplicata rationis quam habet rectangulum P Z Q ad rectangulum R λ S. Quod erat demonſtrandum.

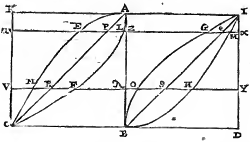
PROPOSITIO XXXII.

IIſdem manentibus:

Dico rectangulum P Z Q ad R λ S, duplicatam habere rectanguli E Z M ad N λ H rectangulum.

Demon-

Demonſtratio.



OStenſum eſt, a tã rectangula P Z Q, E Z M, T Z X quã rectangula R λ S, N λ H, a 29. huius.
V λ Y in continua eſſe analogia. Quare cùm extrema rectangula T Z X, V λ Y
æqualia ſint, erit b ratio rectanguli P Z Q ad rectangulum R λ S duplicata rationis b 9. huius.
rectanguli E Z M ad rectangulum N λ H. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

MAnentibus iiſdem:
Dico rectangulum L Z G ad rectangulum F λ O, quadruplicatam eius continere rationem, quam habet rectangulum E Z M ad N λ H rectangulum.

Demonſtratio.

REctangulum L Z G ad F λ O, rectangulum duplicatam c habet eius rationem c 31. huius.
quam habet rectangulum P Z Q ad R λ S rectangulum, rectangulum autem
P Z Q ad R λ S, habet duplicatam d eius quam rectangulum E Z M habet ad re- d 32. huius.
ctangulum N λ H. ergo rectangulum L Z G ad F λ O, quadruplicatam e habet eius e 11. huius.
rationem quam rectangulum E Z M habet ad rectangulum N λ H. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIV.

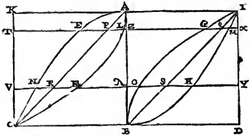
POſitis iiſdem:
Dico rationem rectanguli L Z G ad rectangulum F λ O, toties continere per multiplicationem rationem rectanguli P Z Q ad R λ S, quoties hæc eadem ratio P Z Q ad rectangulum R λ S, continet per multiplicationem rationem rectanguli E Z M ad rectangulum N λ H.

Demonſtratio.

EX præcedentibus eſt manifeſta. nam oſtenſum f eſt rationem rectanguli L Z G ad f 31. huius.
F λ O rectangulum, duplicatam eſſe eius, quam habet rectangulum P Z Q ad
R λ S, ac proinde prior ratio ſecundam bis continet in ſenſu multiplicationis. Simili-
ter eſt demonſtratum g rectangulum P Z Q ad R λ S rectangulum duplicatam ha- g 32. huius.
bere rationem eius quam habet rectangulum E Z M ad N λ H rectangulum; & con-
ſequenter etiam hæc prior ratio ſecundam bis continet in ſenſu multiplicationis.

Quate patet rationem rectanguli L Z G ad rectangulum F λ O, toties continere per multiplicationem rationem rectanguli P Z Q ad R λ S, quoties hæc continet per multiplicationem rationem rectanguli E Z M ad rectangulum N λ H.

PROPOSITIO XXXV.



Iſdem permanentibus:
Dico parallelepipedum ex baſi rectangula L Z G & altitudine Z λ, ad parallelepipedum ex baſi rectangula F λ O, & eadem altitudine Z λ quadruplicatam habere rationem eius quam continet patallelepipedum ex baſi rectangulâ E Z M & altitudine Z λ, ad parallelepipedum ſub baſi rectangulâ N λ H & communi altitudine Z λ.

Demonſtratio.

a 33.huius. Demonſtratum eſt a rectangulum L Z G ad F λ O rectangulum habere quadruplicatam eius rationem, quam continet reetangulum E Z M ad N λ H. ſunt autem parallelepipeda ſub hiſce baſibus & communi altitudine Z λ inter ſe vt ipſæmet baſes. Patet ergo veritas theorematis.

PROPOSITIO XXXVI.

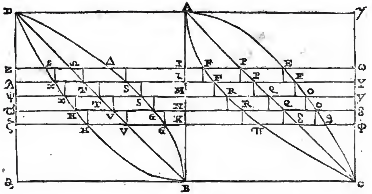
Eadem figura manente:
Dico rationem parallelepipedi quod fit ex baſi rectangula L Z G ad parallelepipedum quod fit ex baſi F λ O rectangula, toties continere per multiplicationem rationem parallelepipedi ſupet baſi rectangula P Z Q ad patallelepipedum ſuper baſi rectangula R λ S, quoties ratio hæc continet per multiplicationem rationem parallelepipedi ſuper baſi rectangula E Z M ad patallelepipedum quod fit ſuper baſi N λ H rectangula, modò pro omnibus parallelepipedis eadem ſumatut altitudo, Z λ.

Demonſtratio.

b 34.huius. Demonſtratum eſt b rationem rectanguli L Z G ad rectangulum F λ O toties cõtinere per multiplicationem rationem rectanguli P Z Q ad R λ S, quoties continet ratio rectanguli P Z Q ad R λ S rectangulum, rationem reetanguli E Z M ad N λ H rectangulum; parallelepipeda autem de quibus agimus talem ſortiuntur inter ſe rationem qualem baſes rectangulares ſuper quibus erecta ſunt, quoniam altitudine conueniunt ex hypotheſi. Patet igitur veritas aſſertionis.

P R O-

Schema *Commune.*



PROPOSITIO XXXVII.

SVper rectâ A B conſtituantur quadrata A B C, B A D, quorum diagonales ſint A C, B D: deſcriptiſq; parabolis A E C, A F C, & B G D, B H D quarum vertices ſint A & B, in linea A B aſſumantur quæcumque I L, N K, ponanturq; per I, L, N, K puncta parallelæ lateri A D occurrentes diagonalibus in punctis P, Q, T, V, parabolis autem in punctis F, R, E, O, S, G, X, H, compleantur deinde rectãgula F I L, R N K; I L S, N K G; item P I L, Q N K; I L T, N K V, denique E I L, I L X; O N K, N K H.

Dico parallelepipedum ſuper F I L & I L S, ad parallelepipedum ſuper R N K, N K G duplicatam habere rationem eius quam parallelepipedum ſuper P I L, I L T, habet ad parallelepipedum ſuper Q N K, N K V.

Demonſtratio.

CVm enim [a] parallelepipeda ſuper F I L, I L S, ſuper P I L, I L T, ſuper ω I L, I L λ ſint proportionalia; item cùm proportionalia ſint parallelepipeda ſuper R N K, N K G, ſuper Q N K, N K V, ſuper θ N K, N K ξ, & cùm hæ duæ ſeries vltima habeant æqualia, ſcilicet parallelepipedum ſuper ω I L, I L λ, & ſuper θ N K, N K ξ, patet [b] primum parallelepipedum vnius ſeriei ad primum alterius ſeriei eſſe in duplicata ratione ſecundi ad ſecundum. Quod erat demonſtrandum.

a Per 30. huius.

b Per 9. huius.

PROPOSITIO XXXVIII.

IIſdem poſitis:

Dico parallelepipedum ſuper P I L, I L T, ad parallelepipedum ſuper Q N K, N K V, duplicatam habere rationem eius quam parallelipipedum ſuper E I L, I L X habet ad parallelepipedum ſuper O N K, N K H.

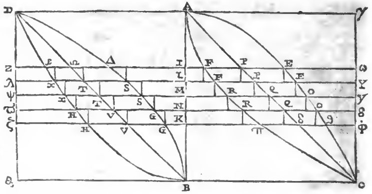
Demonſtratio.

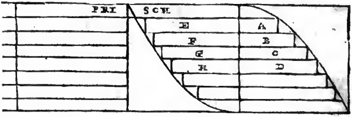
RVrſus enim [c] parallelepipeda ſuper F I L, I L T, ſuper E I L, I L X, ſuper ω I L, I L λ ſunt proportionalia, item proportionalia ſunt parallelepipeda ſuper Q N K, N K V, ſuper O N K, N K H, ſuper θ N K, N K ξ, & vltima vtriuſque ſeriei ſunt æqualia, igitur [d] iterum primum parallelepipedum primę ſeriei eſt ad primum ſecundę ſeriei, vt ſecundum ad ſecundum. Quod erat demonſtrandum.

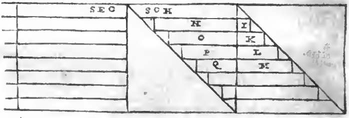
c Per 30. huius.

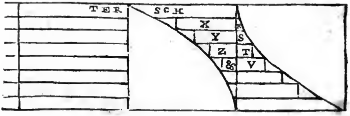
d Per 9. huius.

Schema *Commune.*









Corol-

Corollarium.

HInc patet rationem parallelepipedi ſuper FIL, ILS ad parallelepipedum ſuper RNK, NKG, toties per multiplicationem continere rationem parallelepipedi ſuper PIL, ILT, ad parallelepipedum ſuper QNK, NKV, quoties hæc ratio per multiplicationem continet rationem parallelepipedi ſuper EIL, ILX, ad parallelepipedum ſuper ONK, NKH.

PROPOSITIO XXXIX.

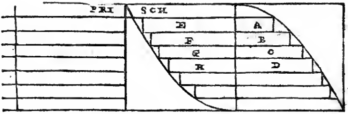
SVper recta AB conſtruantur quadrata ABC, BAD quorum diagonales ſint AC, BD: deſcriptiſque parabolis AEC, AFC, & BGD, BHD quarum vertices ſint A & B, aſſumatur quæuis IK, in recta AB; qua diuiſa in quatuor partes æquales in pũctis L, M, N, ponãtur per ea parallelæ lateri AD, occurrentes diagonalibus in punctis PP, QQ, & TT, VV; parabolis autem in punctis FF, RR, EE, OO, SS, GG, XX, HH: compleantur deinde rectangula FIL, FLM; RMN, RNK, & ILS, LMS, MNG, NKG; ſimiliter rectangula LIP, MLP, NMQ, KNQ: item rectangula ILT, LMT; MNV, NKV; quemadmodum & rectãgula LIE, MLE, NMO, KNO; & ILX, LMX; MNH, NKH.

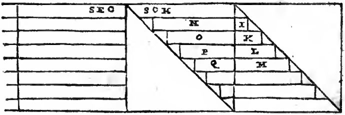
Dico rationem duorum parallelepipedorum quæ fiunt ex rectangulo FIL in ILS, & ex rectangulo FLM in LMS, ad duo parallelepipeda quæ oriuntur ex plano RMN in MNG, & ex plano RNK in NKG planum, toties continere rationem parallelepipedorum quæ gignuntur ex ductu ſuperficiei PIL in ILT, & ſuperficiei PLM in LMT, ad parallelepipeda producta ex baſi QMN in MNV, & ex baſi QNK in NKV, quoties hæc ipſa ratio continet rationem parallelepipedorum quæ fiunt ex ductu plani EIL in planum ILX, & ex ductu plani ELM in LMX, ad parallelepipeda facta ex ductu plani OMN in MNH, & plani ONK in NKH.

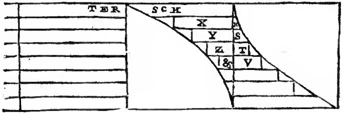
Demonſtratio.

AD confuſionem vitandam omnia hæc rectangula quæ in vnam figuram congeſta ſunt, in varias figuras ſegregabimus, & ſingulis rectangulis ſuam litteram inſcribemus qua ipſorum notitia habeatur, vt diſcurſus ratio nonnihil ſubleuetur: Primũ igitur ſchema particulare complectatur figuras in ſchemate vniuerſali conſtitutas quæ terminantur in parabolis conuexis EO & HX. Secundum verò contineat eas quarum termini in figura vniuerſali ſunt rectę PQ & VT. Tertium denique figuras repræſentet concauas parabolas FR, GS, figuræ vniuerſalis. ſint autem primo ſchemati inſcripta rectangula A, B, C, D; & E. F, G, H. ſecundo ſimiliter rectangula I, K, L, M & N, O, P, Q, tertio quoque rectangula R, S, T, V, X, Y, Z. & oſtendendum igitur eſt rationem parallelepipedorum ex R in X & S in Y, ad parallelepipeda ex T in Z, & V in &, toties continere per multiplicationem rationem parallelepipedorum quæ fiunt ex rectangulo I in N, & K in O, ad parallelepipeda ex L in P, & M in Q, quoties hæc ipſa ratio continet rationem parallelepipedorum ex A in E, & B in F, ad parallelepipeda ex plano C in G, & D in H, quod ſic oſtendo. Ratio parallelepipedorum ex R in X, & S in Y, ad parallelepipeda ex T in Z, & V in & eſt eadem cum ratione parallelepipedi ex R in X ad parallelepipedum ex T in Z, & ex R in X ad V in &, ſimul cum ratione parallelepipedi ex S in Y ad parallelepipeda ex T in Z, & ex V in &. [a] ſimiliter ratio parallelepipedorum ex I in N, & ex K in O, ad parallelepipeda ex L in P, & M in Q, eadem eſt cum ratione parallelepipedi [a] Per 8 huius.

 ex







ex I in N, ad parallelepipeda ex L in P, & M in Q ſimul cum ratione parallelepipedi ex ductu K in O, ad eadem parallelepipeda ex L in P, & M in Q [a]. Denique ratio parallelepipedorum ex A in E, & B in F, ad parallelepipeda quæ fiunt ex C in G, & D in H, eadem eſt cum ratione parallelepipedi quod oritur ex A in E, ad ea quæ fiunt ex C in G, & ex D in H, ſimul cum ratione quę reſultat ex ratione parallelepipedi quod fit ex ductu B in F ad parallelepipeda facta ex ductu C in G, & D in H. Sed [b] ratio parallelepipedi ex R in X, ad parallelepipedum ex T in Z, toties multiplicat rationem parallelepipedi ex I in N, ad parallelepipedum quod eſt ex L in P, quoties ratio parallelepipedi facti ex ductu I in N ad parallelepipedum ex L in P, cõtinet rationem parallelepipedi ex A in E, ad C in G parallelepipedum, & ita deinceps ratio parallelopipedi ex R X ad V &, toties continet rationem parallelepipedi I N ad M Q, quoties ratio parallelepipedi I N ad M Q, continet rationem parallelepipedi ex A E ad D H parallelepipedum; & ita conſequenter ratio parallelepipedi S Y ad T Z, toties continet rationem K O ad L P, quoties hæc ratio K O ad L P, cõtinet rationem parallelepipedi ex B in F ad C in G. Denique toties etiam continet ratio parallelepipedi S Y ad V &, rationem parallelepipedi K O ad M Q, quoties ratio parallelepipedi ex K O ad M Q, continet rationem parallelepipedi B F ad D H parallelepipedum. Igitur manifeſtum eſt quod ratio duorum parallelepipedorum ex R in X, & S in Y, ad rationem parallelepipedorum duorum quæ fiunt ex T in Z, & V in

[a] Per eandẽ

[b] Per Corollar. 38 huius.

V in &, toties contineat rationem parallelepipedorum ex I in N, & K in O, ad parallelepipeda quæ fiunt ex L in P, & M in Q, quoties hæc ipſa ratio continet rationem parallelepipedorum ex A in E, & B in F, ad parallelepipeda orta ex ductu plani C in G, & D in H. Quòd fuit demonſtrandum.

Corollarium.

NE multiplicentur moroſæ demonſtrationes, propoſitionem præſentem extendi volumus ad caſus omnes qui altitudines horum parallelepipedorum bifariam, vel quadrifariam, vel ſecundùm quamcunque rationem in partes æquales diuiderent, ad multiplicanda rectaugula quæ in aduerſæ figuræ rectangula ducta multiplicarent quemcunque numerum parallelepipedorum: nam diſcurſus demonſtrationis vnus & idem ſemper occurrit, vt in propoſitione 8. huius eſt demonſtratum.

PROPOSITIO XL.

POſitis iiſdem:

Dico rationem ſolidi ex ductu plani parabolici R S in planum parabolicum X Y, ad ſolidum ortum ex ductu plani parabolici concaui T V in concauum parabolicum Z &, toties continere rationem ſolidi quod naſcitur ex ductu trapezij I K in trapezium N O, ad ſolidum quod fit ex trapezio L M ducto in trapezium P Q, quoties hæc ipſa ratio continet rationem corporis ex ductu parabolæ conuexæ A B, in E F parabolā conuexam, ad corpus ortum ex ductu C D parabolici conuexi in G H conuexum parabolicum.

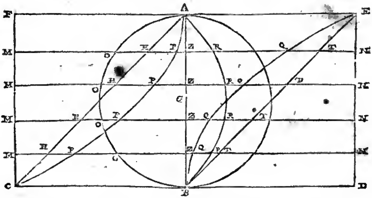
Demonſtratio.

OStenſum eſt propoſitione præcedenti & Corollario quod ratio medietatis figurarum inſcriptarū tertio ſchemati ad alteram medietatem figurarum inſcriptarum, toties cōtineat rationem medietatis figurarum ſecundo ſchemati inſcriptarum ad alteram ſuam medietatem, quoties hęc ipſa ratio continet rationem medietatis figurarum primo ſchemati inſcriptarum ad reſiduam medietatem, & quia hoc ipſum ſemper fieri poteſt; igitur cùm terminis iſtius progreſſionis qui in ſchemate vniuerſali ſunt ω I Z & φ K ξ rectangula, conueniat eadem proprietas, & ratio rectanguli F I Δ ad rationem π K G, a toties contineat rationem rectanguli P I Ω ad δ K V, quoties hæc ipſa ratio continet rationem rectanguli E I β ad ϑ K H, per propoſitionem vniuerſalem libri de ductibus quadrageſimam ſextam, etiam ratio ſolidi ex R S parabolico in X Y parabolicum, ad ſolidum ex parabolico concauo T V in Z &, toties cōtinet rationem ſolidi ex trapezio I K in N O, trapezium ad ſolidum ex trapezio L M in P Q, quoties hæc eadem ratio continebit rationem ſolidi ex ductu parabolici conuexi A B in E F, ad ſolidum ex ductu parabolici C D in conuexum parabolicum G H. Quod fuit demonſtrandum.

a per 14. huius.

PRO-

PROPOSITIO XLI.



SVper recta A B conſtituta ſint quadrata A B C, A B D, quorum diametri A C, B E: his inſcribantur parabolæ A P C, B Q E, quarum vertices ſint A & B, axes verò A F, B D. Deinde A B biſectâ in G, centro G ſpatio G A, circulus deſcribatur, ductiſque rectis infinitis M O H P Z R Q N, parallelis ad C B D, ac proinde orthogonis ad A B, fiant vt M Z ad O Z, ſic O Z ad Z R.

Dico puncta A R, R B eſſe ad parabolam.

DEmonſtratum eſt in libro de parabola propoſitione 299.

PROPOSITIO XLII.

IIſdem poſitis:

Dico ſolidum quod producitur ex plano mixtilineo A P C B, in mixtilineum A B Q E æquari ſolido quod fit ex parabola A R B ductâ in ſe.

Demonſtratio.

QVoniam M Z, O Z, Z R ſunt proportionales, etiam quadrata ipſarum M Z, O Z, Z R erunt proportionalia. Similiter, quia [a] tam M Z, H Z, P Z, quàm N Z, T Z, Q Z ſunt proportionalia, [b] etiam rectangula M Z N, H Z T, P Z Q erũt proportionalia: ſed quadratum M Z æquatur rectangulo M Z N; & quadratum O Z æquale eſt A Z B, hoc eſt rectangulo H Z T, cùm enim B A æqualis ſit tam A E quàm B C, etiam B Z ipſi Z T, & A Z ipſi H Z, ob triangulorum B A E, B Z T, A B C, A Z H ſimilitudinem, æquales erunt. cùm igitur binę habeantur ſeries quantitatum continuè proportionalium, quarum primi quatuor termini ſint æquales inter ſe, liquet etiam reliquos, quadratum nempe Z R & rectangulum P Z Q, æquari. pari argumento omnia quadrata alia Z R rectangulis alijs omnibus P Z Q æqualia ſunt. Ergo per 45. libri de duct. ſolidum quod fit ex plano A P C B ducto in planum A B Q E æquatur ſolido quod fit ex parabola A R B ductâ in ſeipſam. Quod erat propoſitum demonſtrare.

a 26. huius.
b 58. Progr.

Corol-

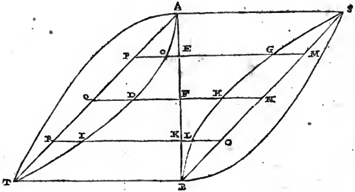
Corollarium primum.

EOdem diſcurſu oſtenditur ſolidum quod gignitur ex ſegmento mixtilineo P P Z Z in mixtilineum ſegmentum Z Z Q Q æquari ſolido quod fit ex parabolico ſegmento Z R R Z ducto in ſe.

Corollarium ſecundum.

FAcile iam nobis erit ſolidum quod fit ex mixtilineo A P P C B ducto in mixtilineum A Z B Q Q E, ad parallelepipedum reducere. Nam parabola in ſe ducta producit ſegmentum cylindri parabolici, quam libro præcedenti vngulam vocauimus parabolicam, & cubauimus propoſitione 99. eiuſdem libri. quare cùm corpus factum ex A P C B in A B Q E, æquale oſtenderimus corpori quod gignit A R B parabola in ſe ducta, hoc eſt vngulæ parabolicæ, huius quoque habebitur cubatura; ſiue reductio ad parallelepipedum: habitâ autem cubatura totius ſolidi ex A B Q E ducto in A P C B, eodem artificio obtinebitur cubatura ſolidi quod fit ex ſegmento P P Z Z ducto in ſegmentum Z R R Z.

PROPOSITIO XLIII.



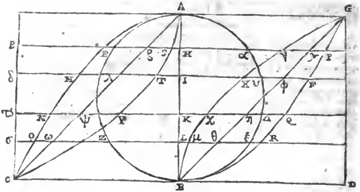
SInt parabolæ A C D, B L G æquales ſed ſubalternè poſitæ quas contingat A B æqualis lateri recto in A & B. Ponàtur inſuper P C E G M, Q D F H N, R I K L O normales ad A B, iungantur A T, B S, A S & B T.

Dico rationem corporis orti ex ductu plani C E F D in planũ E G H F, ad corpus ex ductu plani D F K I in F H L K notam eſſe, inſuper etiam rationem ſolidi quod fit ex plano P E F Q ducto in planum E M N F ad ſolidum quod fit ex Q F K R plano in planum F N O K.

Demonſtratio.

OStenſum eſt [a] cui parallelepipedo æquetur corpus ex ductu mutuo planorum C E F D & E G H F. Inſuper demonſtratũ eſt cui parallelepipedo æquetur ſoli- *a Corr. ſecundo 42.*
dum ex planis P E F Q, E M N F [b] inter ſe multiplicatis, quemadmodum etiam de *huius.*
ſolido ex ſuperficiebus Q F K R & F N O K, inter ſe ductis: quare ratio corporum *b Ex 5. de duct.*
de quibus agit propoſitio, quę illis æqualia ſunt etiam nota vel data eſt. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.



Sint denuo ſuper A B rectâ duo quadrata A B C, A B D conſtructa, & recta A B ſit æqualis lateri recto parabolarum A E C & B R G, ſubalternè collocatarum & communis vtriuſque axis A B, in quo ſumptis H I & K L, æqualibus inter ſe conſtituantur E H P, M I F, & N K Q, O L R ordinatim ad axem.

Dico ſolidum quod fit ex ductu plani E H I M in planum H P F I, notam habere rationem ad ſolidum quod exſurgit ex ductu ſuperficiei N K L O, in ſuperficiem K Q R L.

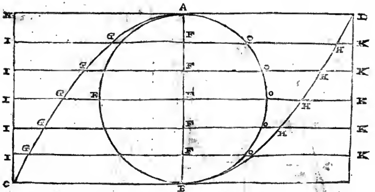
Demonſtratio.

Ponantur parabolæ A Y C, B X G æquales prioribus, quarum vertices ſint A &
a 43. *huius.* B, contingantque A B in A & B. oſtenſum eſt [a] notam eſſe rationem corporis quod fit ex ductu S H I T in Hν X I, ad corpus ex ductu ſuperficiei Y K L Z in
b *Per eand.* Kκμ L. Similiter demonſtratum eſt [b] notam eſſe rationē ſolidi ex ductu plani Hϱλ I in Hγφ I, ad ſolidum productum ex ductu ψ K L ω in planum Kηθ L. Demonſtra-
c 40. *huius.* tum autem eſt [c] rationem corporis orti ex ductu S H I T in Hν X I, ad corpus ortum ex ductu plani Y K L Z in Kκμ L, toties continere rationem corporis orti ex ductu plani Hϱλ I in Hγφ I, ad corpus ex ductu ψ K I L ω in Kηθ L, quoties hæc ratio continet rationem corporis orti ex ductu H E M I in H I F P, ad corpus ortum ex ductu plani K N O L in K L R Q. Igitur cùm notæ ſint prima, & ſecunda ratio, notum quoque eſt quoties prima ſecundam contineat, ac propterea notum quoque eſt quoties ſecunda contineat tertiam: itaque cùm ſecunda ratio ſcilicet corporis orti ex ductu plani Hϱλ I in Hγφ I, ad corpus ortum ex ductu ψ K L ω in Kηθ L nota ſit, etiam nota erit ratio corporis quod oritur ex ductu ſuperficiei E H I M in H P F I ad corpus ortum ex ductu ſuperficiei N K L O in K Q R L. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XLV.



POnantur ſuper A B duo quadrata A B C, B A D, quibus inſcriptæ duę ſemiparabolæ A G C, B H D ſitu ſubalterno circa communem axem A B, & ſuper A B diametro ſemicirculus deſcribatur A E B.

Dico corpus quod producit parabola A G C ducta in parabolã B H D, æquari ſemicylindro cuius baſis eſt ſemicirculus A E B, altitudo A B.

DEmonſtrationem dedimus libro de ductu plani in planum propoſitione 143. illic enim oſtenſum eſt parabolas ſubalternè poſitas, quarum communis axis eſt æqualis lateri recto axeos producere ſolidum æquale ſemicylindro cuius baſis eſt ſemicirculus axe tanquam diametro deſcriptus, altitudo verò ipſe axis; ſed parabolarum A G C, B H D quadratis inſcriptarum axis A B æquatur lateri recto axeos, ª quod ordinatim poſita A D ſit æqualis ipſi A B. ergo ſolidum quod producitur ex ductu mutuo parabolarum A G C, B H D æquatur ſemicylindro ſuper ſemicirculo A E B in altitudine A B. a 9. Parab.

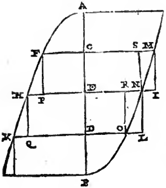
Verùm cùm hoc theorema ſit vnum ex primarijs huius operis, proximéque influat in circuli quadraturam: ſit autem demonſtratio propoſit. 143. libri ductuum allata fortaſſe ſtrictior quàm vt omnibus ſatisfaciat: pleniorem huius veritatis demonſtrationem exhibebo propoſitionibus aliquot ſequentibus.

PROPOSITIO XLVI.

SIt A B axis parabolarum ſubalternè poſitarum A K B, A B M, & axe biſecto in E, itemque A E, B E biſectis C & D, per diuiſionum puncta C, E, D ducantur rectæ ad axem normales, compleanturque rectangula tam C P, E Q inſcripta parabolæ A K B, quam C I, E L circumſcripta parabolæ A B M.

Dico ſolida quę oriuntur ex T P H in C E N M, & ex H Q K in E N O D, ſimul ſumpta maiorem molem exhibere quàm ſolida quę fiunt ex ductu plani M N I in F C E P, & plani N O L in P E D Q, ſimul ſumpta.

Demonſtratio.



DVcantur OR, NS parallelæ axi AB; ſegmeutum NOR maius eſt ſegmento ONL, vt manifeſtè patet ſi iungantur puncta ON: & EHKD maius eſt quam EHQD. ergo ſolidum ex NOR in EHKD, maius eſt ſolido ex ONL in EQ. ſed quia parabolæ ſubalternæ ſunt æquales & ſimiles, & puncta C & D, æqualiter diſtant ab E puncto medio ipſius AB, æqualia ſunt ſegmenta NOR, HFP, & EHKD, CMNE. Ergo ſolidum ex HFP in CMNE, maius eſt ſolido ex ONL in EQ. Prætereà MNS maius eſt quàm MNI (vt patet ſi iungantur puncta NM.) & CFHE maius eſt quàm CP. ergo ſolidum ex MNS in CFHE, maius eſt ſolido ex MNI in CP. ſed MNS, KHQ, & CFHE, ENOD ſunt inter ſe æqualia. ergo ſolidum ex KHQ in ENOD, maius eſt ſolido ex MNI in CP. Igitur ſolida ſimul ſumpta quę fiunt ex HFP, KHQ in CMNE, ENOD maiora ſunt ſolidis ſimul ſumptis quæ fiunt ex ONL, NMI in EQ, CP. Quod erat demonſtrandum.

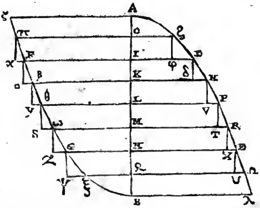
PROPOSITIO XLVII.

QVod ſi axe AB biſecto in L rectæ AL, BL diuidantur in quotcumque partes æquales, ductiſque per diuiſionum puncta C, I, K, L, M, H, Q lineis parallelis ad axem normalibus compleantur tam rectangula Cφ, Iδ, KV, LT, MX, EQ quæ cadunt intra parabolam APE, quam rectangula Cα, IO, KY, LS, MZ, Hψ quæ ſunt partim intra parabolam ABF, partim extra:

Dico ſolida ſimul ſumpta quæ fiunt ex ſegmentis ϱDφ, DNδ, NPV, RPT, & ERX, Eυω in parabolica ſegmenta CπFI, IFβK, KβθL, LθωM, MωGH, HGξQ maiora eſſe ſolidis ſimul ſumptis, quæ producuntur ex ſegmentis παF, FOβ, Yβθ, Sθω, ωGZ, Gψξ in rectangula Cφ, Iδ, KV, LT, MX, Hυ: atque ita licet in infinitum procedatur, ſemper idem eueniet.

Demon-

Demonſtratio.



PErficietur eodem planè diſcurſu quo præcedens, quemadmodum enim in præced. oſtendimus id quod fit ex ſegmentis P N V, R P T, æqualiter remotis à medio axis puncto L, ſiue à media parallelâ P L θ in K β θ L, & L θ ω M, maius eſſe eo quod fit ex Y β θ, S θ ω in K V, L T, ita planè oſtenditur diſcurſu eodem id, quod fit, ex ſegmentis in N D ϑ, E R X æqualiter etiam remotis à medio axis puncto L, ſiue à parallela media P L θ, ductis in I F β K, & M ω G H maius eſſe eo quod fit ex O F β, Z ω G in I ϑ, M X & quod gignitur ex D ϱ φ, & E υ Ω in C π F I, & H G ξ Q maius eſſe eo quod fit ex α π F & ψ G ξ in C φ & H υ. Ex quibus patet veritas theorematis propoſiti.

PROPOSITIO XLVIII.

REſumpta figura propoſitionis 46.

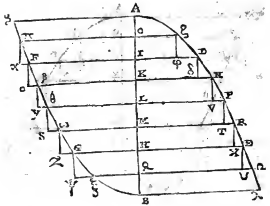
Dico ſolidum quod fit ex ſegmentis parabolicis C F H E, D K H E in ſegmenta ſubalterna C M N E, E N O D, hoc eſt ex ſegmento F C D K in ſegmentum C M O D, maius eſſe corpore quod producitur ex rectangulis C P, E Q ductis in rectangula C I, E L.

Demonſtratio.

OStenſum eſt ſolidum quod fit ex ſegmentis H F P, K H Q in ſegmenta C M N E, E N O D, maius eſſe ſolido quod fit ex ſegmentis I M N, L N O in C P, E Q rectangula. Quare ſi addatur vtriſque commune ſolidum quod fit ex rectangulis C P, E Q in ſegmenta C M N E, E N O D, erit ſolidum quod fit ex H F P, K H Q in C M N E, E N O D, vnà cum ſolido ex C P, E Q in C M N E, E N O D, maius ſolido quod fit ex C P, E Q in I M N, L N O, vnà cum ſolido ex C P, E Q in C M N E, E N O D. ſed ſolidum ex H F P, K H Q in C M N E, E N O D vnà cum ſolido ex C P, E Q in C M N E, E N O D æquatur [a] corpori quod fit ex F C E H in C M N E, & ex H E D K in E N O D, & ſolidum ex C P, E Q, in I M N, L N O, vnà cum ſolido ex C P, E Q in C M N E, E N O D æquatur ſolido quod fit ex C P in C I, & ex E Q in E L. ergo ſolidum quod fit ex F C E H in C M N E, & ex H E D K in E N O D, hoc eſt ex ſegmento F C D K in ſegmentum C M O D, maius eſt ſolido facto ex C P, E Q in C I, E L. Quod erat demonſtrandum.

a Demonſtratur ex primâ 2. ſimili diſcurſu quo 199. ductum ex quarta 2.

PROPOSITIO XLIX.



RESumptâ figura propoſitionis 47. ſi fuerint ſegmentorum axis A L, B L, ſubdiuiſiones factæ plures ac plures in infinitum iuxta mentem propoſitionis 47. ac proinde plura ſemper ac pluta rectangula inſcripta fuerint parabolæ A λ B, circumſcripta verò parabolæ A B ζ.

Dico, nihilominus ſolidum quod producitur ex mutuo ζ C Q Ω, C π ξ Q ſegmentorum ſubalternorum ductu, maius eſſe ſolido quod fit ex omnibus rectangulis inſcriptis parabolæ A λ B in omnia rectangula conſcripta parabolæ A B ζ.

Demonſtratio.

PErficietur eodem diſcurſu quo propoſitio 48. Nam quo diſcurſu illic ex 46. oſtendimus ſolidum ex ſegmentis P N K L, R P L M, quæ adiacent medio axis puncto L in ſegmenta K β θ L, L θ ω M maius eſſe ſolido quod fit ex rectangulis K V, L T in rectangula K Y, L S, eodem quoque demonſtrabimus ex 47. ſolidum quod fit ex ſegmentis N D I K, R M H E æqualiter à medio axis puncto L remotis, in ſegmenta I F β K, H G ω M, maius eſſe ſolido quod fit ex rectangulis, I δ, M X in rectangula I O, M Z: & ſolidum quod gignitur ex ſegmentis D ϱ C I, Ω E H Q in ſegmenta C π F I, H G ξ Q maius eſſe ſolido producto ex C φ, H υ in C α, H ψ. Totum igitur ſegmentum ϱ Ω Q C ductum in ſegmentum totum C π ξ Q maius ſolidum producit quàm omnia rectangula C φ, I δ, K V, L T, M X, H υ in omnia rectangula C α, I O, K Y, L S, M Z, H ψ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO L.

SInt parabolæ ſubalternæ æquales ac ſimiles A λ B, A B ζ, quarũ communi axe A B, biſecto in L, partes A L, B L, in plures ſemper ac plures in infinitum partes æquales & æque multas, diuidantur, ductiſq; per diuiſionum puncta parallelis lineis ϱ π, D F, &c. normalibus ad A B, inſcribantur parabolæ A λ B, parabolæ verò ζ B A circumſcribantur rectangula plura ſemper ac plura ſine termino.

Dico

Dico corpus genitum ex ductu mutuo parabolarum ſubalternarum maius eſſe ſolido ſiue aggregato parallelepipedorum quod producitur ex rectangulis omnibus Cφ, Iδ, &c. inſcriptis parabolæ AλB, ductis in rectangula omnia Cα, IO, &c. parabolæ ABζ circumſcripta.

Demonſtratio.

OStenſum eſt in præcedenti ſegmentum CϱΩQ in ſegmentum CπξQ, producere maius ſolidum quàm omnia rectangula CφIδ, &c. in omnia rectangula Cα, IO, &c. Atqui parabola tota AλB ducta in ſubalternam totam ζBA, maius corpus efficit quàm ſegmentum ϱCBλΩ in ſegmentum CπξB. Ergo parabola AλB in parabolam ζBA maius ſolidum gignit aggregato parallelepipedorum producto ex omnibus rectangulis Cφ, Iδ, &c. inſcriptis parabolæ AλB, in rectangula omnia Cα, IO, &c. parabolæ ζBA conſcripta. Quod erat propoſitum.

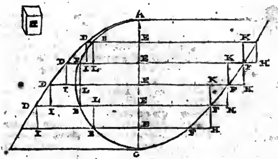
Venio tandem ad demonſtrationem Theorematis ſuprà propoſiti.

PROPOSITIO LI.

SInt parabolę ſubalternæ ADC, FCA binis inſcriptæ quadratis circa communem axem AC, ſiue (quod in idem recidit, vt in propoſ. 45. oſtenſum eſt) quarum axis AC lateri recto axeos ſit æqualis: & ſuper AC diametro deſcribatur ſemicirculus ABC, quem totum intra parabolas cadere patet ex 126. de parabola.

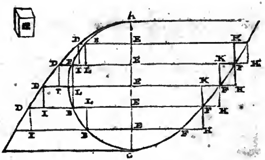
Dico corpus productum ex ductu parabolę ADC in ſubalternam parabolam FCA, æquari ſemicylindro, cuius baſis eſt ſemicirculus ABC, altitudo autem axis parabolarum AC.

Demonſtratio.



SI æqualia non ſunt illa corpora, erit cylindrus corpore parabolico maior aut minor. Ponatur primò cylindrus eſſe maior corpore parabolico quantitate aliqua G, ſecetur axis AC bifariam; & bina axeos ſegmenta in tot & æquè multas æquales partes ſubdiuidantur in punctis E, E, vt ductis per E parallelis rectis BE, normalibus ad AC, completiſque rectangulis EL, rectangula EBL ducta in altitudinem cylindri AC, cylindro[a] inſcribant aggregatum parallelepipedorum habentium rectangula BEAC, BEAC pro baſibus altitudines verò EE deficiens ab ipſo

[a] Patet ex Archimede.



ipſo cylindro quantitate minori quàm G, quo facto erit corpus cylindro inſcriptum etiam maius corpore quod fit ex ductu mutuo parabolarum. protrahantur deinde parallelæ E B vtrimque in D, & F, H, compleanturque rectangula tam E D I, inſcripta parabolæ A D C, quàm E H, conſcripta parabolę F C A : ac deinde rectangula E I, ducta in rectangula E H producant parallelepipeda quę corpori nato ex parabolis partim inſcripta erunt partim circumſcripta, baſes autem habebunt rectangula D E F, altitudines verò lineas E E. Demonſtrauimus in libro ductuum
a Propoſ. 143. [a] rectangula omnia D E F æquari rectangulis B E, A C. Quare cùm rectangula D E F baſes ſint parallelepipedorum adſcriptorum corpori parabolico quæ fiunt ex E D I in E H: rectangula verò B E A C, B E A C ſint baſes parallelepipedorum inſcriptorum cylindro & altitudines vtrobique ſint communes, lineolæ nimirum E E, manifeſtum eſt aggregatum parallelepipedorum adſcriptorum corpori parabolico æquari aggregato parallelepipedorum cylindro inſcriptorum, ſed aggregatum parallelepipedorum inſcriptorum cylindro maius ponitur corpore nato ex parabolis ergo & aggregatum parallelepipedorum adſcriptorũ corpori ex parabolis producto maius eſt eodem corpore; quod repugnat propoſitioni 50. in qua demonſtrauimus eſſe minus, non igitur minor eſt cylindrus corpore à parabolis producto.

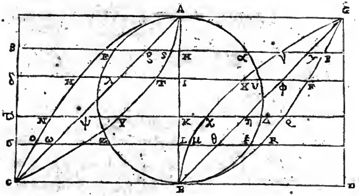
Supereſt vt oſtendamus eundem cylindrum non eſſe minorem corpore genito ex parabolis. Si enim cylindrus minor ſit, erit corpus parabolicum maius cylindro v.
b Propoſ. 43. g. quantitate G, oſtenſum eſt in libro ductuum [b] A C in tot poſſe æquales partes ſubdiuidi, ductiſque per diuiſionum puncta rectis D E F ad A C normalibus tot inſcribi parabolis ſubalternis poſſe rectangula E D I, E D I, E F K, E F K, vt omnia E D I ducta in omnia E F K inſcribant corpori ex parabolis ſubalternis genito aggregatum parallelepipedorum deficiens ab ipſo corpore nato è parabolis quantitate minori datâ G. Factum igitur hoc ſit: erit ergo aggregatum illud parallelepipedorum maius cylindro. Quare ſi productis lineis D F compleantur rectangula E H, E H parabolę F C A circumſcripta; & rectangula E D I, E D I ducta in rectangula E H, E H, producant aggregatum parallelepipedorum, erit hoc aggregatũ multo maius cylindro. ſed hoc aggregatum parallelepipedorum, quę nimirum fiunt ex E D I, E H, ſuprà oſtendi in prima parte demonſtrationis ęquari aggregato parallelepipedorum cylindro inſcriptorum. Ergo etiam hoc cylindro maius eſt, pars ſuo toto, quod fieri non poteſt. Non eſt ergo cylindrus minor corpore à parabolis producto. ſed neque maiorem eſſe oſtendimus. Eidem igitur æqualis eſt. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

EOdem diſcurſu demonſtratur ſegmenta ſubalterna parabolica D E E D, E F F E ducta in ſe mutuo æquale ſolidum producere ſegmento cylindrico cuius baſis eſt ſegmentum circulare B E E B, altitudo A C.

PRO-

PROPOSITIO LII.



SInt iam denuo ſuper rectâ A B duo quadrata A B C, A B D conſtructa, & recta A B ſit æqualis lateri recto parabolarum A E C & B R G ſubalternè collocatarum, & communis vtriuſque axis A B, in quo ſumptis H I & K L æqualibus inter ſe, conſtituantur E H P, M I F, & N K Q, O L R ordinatim ad axem: denique deſcribatur circulus A υ B ſuper diametro A B, qui lineas E P, M F, N Q, O R ſecet in α, υ, Δ, ξ.

Dico ſuperficiem H α υ I ad ſuperficiem K Δ ξ L, notam habere rationem.

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt [a] corpori ex ductu plani E H I M in planum H P F I, æqualem eſſe partem cylindri ſuper baſi H α υ I conſtitutam in altitudine A B. Similiter corpori ex ductu ſuperficiei N K L O in ſuperficiem K Q R L, æquari cylindri partem cuius baſis eſt K Δ ξ L & altitudo A B. ſed demonſtratum eſt [b] corpora, quæ illis cylindricis partibus æquantur inter ſe notam habere rationem. Igitur etiam partes cylindricę, notam inter ſe continent rationem, ſed partes cylindricæ, cùm altitudine non diſcrepent, eandem inter ſe rationem habet quam baſes H α υ I, K Δ ξ L. ergo etiam harum nota eſt ratio. Quod fuit demonſtrandum.

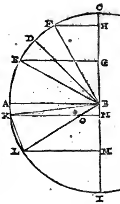
[a] 51. huius eiuſque Coroll.

[b] 45 huius.

PROPOSITIO LIII.

OPorteat tandem proportionem circuli ad figuram rectilineam exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



Sit quadrans circuli ABC diuiſus biſariam recta BD, & ſumptis DE, DF arcubus perimetro circuli commẽſurabilibus qui inter ſe ſint æquales, demiſſiſque perpendicularibus EG, FH ad diametrum IC, ponantur EB, FB. Inueniatur deinde arcus KL [a] commenſurabilis arcui EF, ex cuius extremis punctis demiſſæ KN, LM perpendiculares ad diametrum IC intercipiant rectam MN æqualem rectæ GH. vel igitur arcus KA æqualis erit arcui LI, vel maior, vel minor. quod ſi æqualis ſit, igitur arcus LK, non ſolùm eſt commenſurabilis arcui EF, ſed[b] æqualis: cùm MN ponatur æqualis GH, & arcus AK æqualis LI, ſicut & arcus AE, FC. vnde iteranda eſt conſtructio, donec vel AK arcus maior ſit arcu LI vel è cõtra arcus LI maior arcu AK. Sit igitur AK arcus minor LI & ducantur KB, LB. Quoniam ponitur arcus AK minor arcu LI, ergo [c] ſegmentum LMNK maius eſt ſectore LBK. nota autem eſt[d] proportio ſegmenti LMNK ad ſegmentum EGHF, hoc eſt [e] ad ſectorem EBF: nota eſt prætereà ratio ſectoris LBK ad ſectorem EBF, cùm arcus LK, EF ſint commenſurabiles ex constructione. Igitur nota eſt etiam ratio LMNK ad ſectorem LBK, quę cùm nota ſit, etiam exceſſus, quo LMNK ſuperat ſectorem LBK, notus eſt; ac proptereà nota eſt etiam ratio ſectoris EBF ad rectilineum exceſſum quo ſegmentum LMNK excedit ſectorem LBK, (exceſſum autem eum rectilineum eſſe poſſe patet, ſi iungãtur puncta LK, & triangulo LBK abſcindatur trapezium æquale ex trapezio LKNM, addito enim communi ſegmento LK, erit ſector, ſegmento & illi trapezio æqualis, quare reliquum ſegment (erit exceſſus & quidem rectilineus) & conſequenter nota eſt ratio totius circuli ad idem rectilineum, quoniam arcus EF commenſurabilis eſt perimetro circuli IAC ex conſtructione: quare peractum eſt, quod fuit requiſitum.

a 22. huius.

b Per 25. huius.

c Per 23. huius.

d 32. huius.

e 20. huius.

SECVN-

SECVNDA CIRCVLI QVADRATVRA.

PROPOSITIO LIV.

A I B E L F

C K D G M H

Rationum A B ad C D, E F ad G H, antecedentes & conſequentes termini diuidantur vtcunque in I, L, K, M.

Dico proportionem quæ eſt inter rationes A B, C D & rationem inter E F ad G H eandem eſſe, cum proportione quæ reperitur inter rationes A I ad C K, I B ad C K (hoc eſt inter A B ad C K) ſimul cum ratione A I ad K D, & I B ad K D (hoc eſt A B ad K D) & inter rationem E L ad G M, & L F ad G M, (hoc eſt E F ad G M) vnà cum ratione E L ad M H, & L F ad M H: (hoc eſt E F ad M H) & contra.

Demonſtratio.

Propoſitione octaua huius eſt demonſtratum rationem A B ad C D, eandem eſſe cum rationibus A I ad C K, I B ad C K, ſimul cum rationibus A I ad K D, & I B ad K D. ſimiliter eâdem propoſ. oſtenſum quod ratio E F ad G H, eadem exiſtat cum rationibus E L ad G M, & L F ad G M, ſimul cum rationibus E L ad M H, & L F ad M H, manifeſtum igitur eſt proportionem rationis A B ad C D, ad rationem E F ad G H, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationes A I ad C K, I B ad C K, A I ad K D, I B ad K D, ad rationes E L ad G M, L F ad G M, E L ad M H, L F ad M H, & contra. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

A I B E L F

C K D G M H

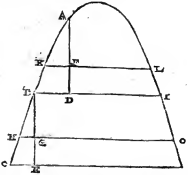
Hinc colligitur quoties comparantur inter ſe ratio quantitatum A B, C D & ratio quantitatum E F, G H, per rationes inuentas inter partes modo aſſumpto in contextu propoſitionis, ſi oſtendantur rationes inter partes vnius rationis eſſe eædẽ cum rationibus quæ inueniuntur eſſe inter partes alterius rationis, tunc neceſſariò etiam erit ſimilitudo inter rationem A B, C D & rationem E F, G H & contra.

N X O R Z S

P Y Q T & V

Quod ſi autem addantur duæ aliæ rationes N O ad P Q, & R S ad T V, rationes verò partium vnius proportionis conueniant cum rationibus partium alterius proportionis, tum ſimiliter vt priùs inferre licebit proportiones eſſe ſimiles, hoc eſt proportionem inter rationem A B ad C D, & rationem E F ad G H, eandem eſſe cum proportione inter rationem N O ad P Q, & rationem R S ad T V.

PROPOSITIO. LV.



PArabola L A B habeat æquales diametros A D, B E, quas in F & G, proportionaliter diuidant orthogonæ K F L, H G O.
Dico rectangula K F L, H G O eſſe æqualia.

DEmonſtratum reperies in libro de parabola propoſitione 45.

Obſerua pro propoſitionibus ſequentibus.

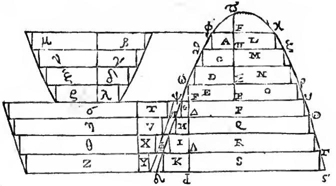
Breuitatis cauſa parallelepipeda quæ ex ductu vnius rectanguli in alterum producũtur, poſthac duabus litteris deſignabimus. Exempli gratia parallelepipedum quod gignitur ex rectangulo A *ducto in rectangulum* L, *vocabimus parallelepipedum ſiue ſolidum* A L.
Similiter breuitatis gratia ſolidum quod fit ex rectangulo aliquo ducto in ſeipſum vnica tantum littera deſignabitur; exempli gratia parallelepipedum quod producitur ex A *rectangulo in ſe ducto vocabimus ſolidum* A.

PROPOSITIO LVI.

INtra parabolam δω ϖ υ conſtitutę ſint binę æquales diametri ϖ B, ω d, quas in æquè multas partes æquales diuidant parallelę lineę φ κ, ϑ ζ, &c. ψ υ, π ϴ, &c. ductiſque lineolis ad diametros parallelis, formentur rectangula A, C, D, E : G, H, I, K : P, Q, R, S : L, M, N, O, ex quibus in ſeipſa ductis producantur ſolida parallelepipeda A, C, D, E, &c.
His ita conſtitutis ſi ſumantur ex ſolidis A, C, D, E; L, M, N, O, G, H, I, K, P, Q, R, S, quatuor ſolida quæcunque exempli gratiâ A, G, P, L, hac tamen lege vt bina A & L, G, & P conſiſtant circa rectas φ E κ, ψ B υ, quę diametros ϖ B, ω d proportionaliter ſecent in E & F.
Dico rationem ſolidi A ad ſolidum G eſſe eandem cum ratione ſolidi P ad ſolidum L.

Demon-

Demonſtratio.



OStenſum eſt [a] rectangula $\phi E\kappa$, $\psi F\upsilon$ æqualia eſſe. Ergo ϕE eſt ad ψF, vt reciprocè $F\upsilon$ eſt ad $E\kappa$. Ergo & quadratum ϕE eſt ad quadratum ψF, vt quadratum $F\upsilon$ eſt ad quadratum $E\kappa$, ſunt autem hæc quadrata baſes ſolidorum A, G, P, L. Quare cùm ſolida illa æquales habeant altitudines $E\pi$, $F\Delta$, erunt inter ſe vt quadrata, adeoque ſolidum A, erit ad ſolidum G, vt quadratum ϕE ad quadratum ψF, hoc eſt vt quadratum $F\upsilon$ ad quadratum $E\kappa$, hoc eſt vt ſolidum P ad ſolidum L. Eadem erit in cæteris demouſtratio. Patet ergo propoſitum. a 55 huius.

PROPOSITIO LVII.

EAdem manente figura aſſumantur quatuor quęcunque ſolida, exempli gratia ſolida A, G, P, L, quorum bina A & L, G & P, pro lateribus habeant rectas $\phi E\kappa$, $\psi F\upsilon$ quæ diametros ϖB, ω d proportionaliter ſecent in E, & F. Aſſumantur autem & alia quatuor ſolida quæcunque exemp. grat. ſolida D, I, R, N, modò etiam bina D & N, I & R, conſiſtant ſuper rectis diametros proportionaliter ſecantibus.

Dico proportionem quam habet ratio ſolidorum A & G, ad rationem ſolidorum P & L, eandem eſſe cum proportione quam habet ratio ſolidorum D & I ad rationem ſolidorum R & N.

Demonſtratio.

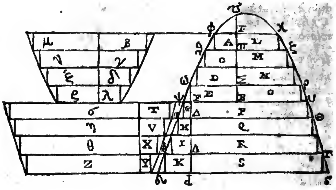
OStenſum eſt, [b] rationem ſolidorum A & G, eandem eſſe cum ratione ſolidorum P & L: oſtenſum quoque eſt [c] rationem ſolidorum D & I, eandem eſſe cum ratione ſolidorum R & N, ratio igitur ſolidorum A & G, eſt ad rationem ſolidorum P & L, vt ratio ſolidorum D & I, eſt ad rationem ſolidorum R & N: hoc eſt proportio quam habet ratio ſolidorum A & G, ad rationem ſolidorum P & L, eadem eſt cum b 56 huius. c Ibid.

proportione quam habet ratio ſolidorum D & I, ad rationem ſolidorum R & N. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Iiſdem poſitis quæ in propoſitione, per 58. libri progreſſionum erit quoque proportio rationis ſolidorum A & D, ad rationem ſolidorum G & I, eadem cum proportione rationis ſolidorum P & R ad rationem ſolidorum L & N.

PROPOSITIO LVIII.



Iiſdem poſitis quę 56. huius rectangula A,C,D,E item G, H, I, K, ducta in rectangula ſibi poſita ſubalternè β,γ,δ,λ,& T,V,X,Y, producant ſolida Aβ,Cγ,Dδ,Eλ, & ſolida GT, HV,IX,KY. ſimiliter rectangula L,M, N,O,item P,Q,R,S ducta in rectangula ſibi ſubalternè poſita μ,ν,ξ,ϱ,& ση, θ,Z, producant ſolida Lμ,Mν,Nξ,Oϱ, & ſolida Pσ,Qη,Rθ,SZ.

Deinde aſſumantur quatuor ſolida quæcunque exemp. gr. ſolida Aβ, GT,Pσ,Lμ,hac tamen lege vt bina Aβ & Lμ: GT & Pσ, conſiſtant circa rectas φκ,ψυ, quæ diametros ϖB,ωd proportionaliter ſecent in E & F.

Dico rationem ſolidi Aβ ad ſolidum GT eandem eſſe cum ratione ſolidi Pσ ad rationem ſolidi Lμ.

Demonſtratio.

Solidum ex A in β eſt idem cum ſolido ex A in E, æquales enim ex hypotheſi & ſimiles per omnia ſunt figuræ ambæ ſolâ nimirum ſubalterna poſitione differentes, ſed ſolidi ex A in E, baſis eſt rectangulum quod rectis φE, ωΣ continetur. Ergo idem rectangulum φε,ωΣ etiam baſis eſt ſolidi Aβ. Eodem modo oſtendam ſolidi GT baſim eſſe rectangulum rectis ψF, & ΦΛ contentum, ſolidi verò Pσ baſim eſſe rectangulum ſub Fυ & ΛΓ: ſolidi denique Lμ baſim eſſe rectangulum ſub Eκ & Σϱ.

a 55. huius. Iam verò quia rectangula φEκ, ψFυ [a] ſint æqualia, erit φE ad ψF, vt Fυ ad Eκ, hoc eſt

eſt ratio φE ad ψF æqualis erit rationi Fυ ad Eκ. Pari modo quia rectangula ωΣ, ρΦ ΛΓ [a] ſunt æqualia, erit recta ωΣ ad rectam ΦΛ, vt recta ΛΓ ad rectam Σρ, hoc eſt ratio ωΣ ad ΦΛ, par eſt rationi ΛΓ ad Σρ. Ergo ratio compoſita ex ratione φE ad ψF, & ratione ωΣ ad ΦΛ, æquatur rationi compoſitę ex ratione Fυ ad Eκ, & ratione ΛΓ ad Σρ: hoc eſt ratio rectanguli ſub φE & ωΣ ad rectangulum ſub ψF & ΦΛ æquatur rationi rectanguli ſub Fυ & ΛΓ ad rectangulum ſub Eκ & Σρ. Quare cùm ſolidorum Aβ, GT, Pσ, Lμ æquales ſint altitudines Eπ, FΔ, baſes verò, vt oſtendi ſuprà, ſint rectangula ſub φE, & ωΣ; ſub ψF & ΦΛ ſub Fυ & ΛΓ ſub Eκ & Σρ, manifeſtum eſt rationem quoque ſolidi Aβ ad ſolidum GT, æqualem eſſe rationi ſolidi Pσ ad ſolidum Lμ. Quod erat demonſtrandum. [a] Ibid.

PROPOSITIO LIX.

Iiſdem poſitis: hoc eſt aſſumptis quatuor ſolidis quibuſcunque, ex. gratia ſolidis Aβ, GT, Pσ, Lμ iuxta determinationem in præcedenti expreſſam; aſſumantur & alia quatuor ſolida quæcunque; exempli gratia ſolida Dδ, IX, Rθ, Nξ iuxta eandem determinationem, ea nimirum lege vt bina Dδ, & Nξ: IX, Rθ, & Nξ conſiſtant circa rectas quæ diametros πB, ωd proportionaliter diuidant.

Dico proportionem quam habet ratio ſolidorum Aβ & GT ad rationem ſolidorum Pσ & Lμ, eandem eſſe cum proportione quam habet ratio ſolidorum Dδ & IX ad rationem inter ſolida Rθ & Nξ.

Demonſtratio.

Oſtenſum eſt [b] rationem ſolidorum Aβ & GT, eandem eſſe cum ratione ſolidorum Pσ & Lμ. Oſtenſum [c] quoque eſt rationem ſolidorum Dδ & IX, eandem eſſe cum ratione ſolidorum Rθ & Nξ. Ergo ratio ſolidorum Aβ & GT, eſt ad rationem ſolidorum Pσ & Lμ, vt ratio ſolidorum Dδ & IX, eſt ad rationem ſolidorum Rθ & Nξ: hoc eſt proportio quam habet ratio ſolidorum Aβ & GT ad rationem ſolidorum Pσ & Lμ, eadem eſt cum proportione quam habet ratio ſolidorum Dδ & IX, ad rationem ſolidorum Rθ, & Nξ. Quod erat demonſtrandum. [b] 58 huius. [c] Ibid.

Corollarium.

Iiſdem poſitis quæ in propoſitione, ſequitur ex iam demonſtratis & ex 58. libri progreſſionum proportionem quoque quæ reperitur inter rationem ſolidorum Aβ & Dδ & rationem ſolidorum GT, & IX eandem eſſe cum proportione rationis ſolidorum Pσ & Rθ, ad rationem ſolidorum Lμ, & Nξ.

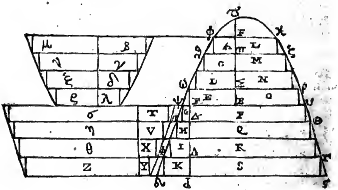
PROPOSITIO LX.

Eadem manente figurâ, aſſumantur octo ſolida, exempli gratia ſolida A, G, P, L, & Aβ, GT, Pσ, Lμ, hac lege vt quatuor prima A, G, P, L, & quatuor alia Aβ, GT, Pσ, Lμ conſiſtant circa rectas φκ, & ψυ, quæ diametros πB, ωd proportionaliter ſecent in E & F. Aſſumantur autem & alia octo ſolida quæcunque, iuxta eandem tamen determinationem, verbi gratia ſolida, D, I, R, N & Dδ, IX, Rθ, Nξ.

Dico proportionem quę eſt inter rationem ſolidorum A & G, & rationem ſolidorum P & L, eſſe ad proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum D & I, & rationem ſolidorum R & N, vt eſt proportio inter rationem ſolidorum Aβ & GT, & rationem ſolidorum Pσ & Lμ, ad proportionem

portionem inter rationem ſolidorum Dδ & I X & rationem ſolidorum Rθ & Nξ.

Demonſtratio.



a 57. huius. b 59. huius. OStenſum eſt [a] proportionem rationis inter ſolida A & G, ad rationem inter ſolida P & L, eandem eſſe cum proportione inter rationem ſolidorum D & I, & rationem ſolidorum R & N. ſimiliter oſtenſum eſt [b] proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum Aβ & GT, & rationem ſolidorum Pσ & Lμ, eandem eſſe cũ proportione quam habet ratio ſolidorum Dδ & I X, ad rationem ſolidorum Rθ & Nξ. Ergo proportio quæ eſt inter rationem ſolidorum A & G, & rationem ſolidorum P & L, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum D & I, & rationẽ ſolidorum R & N, vt eſt proportio inter rationem ſolidorum Aβ & G T, & rationem ſolidorum Pσ & Lμ, ad proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum Dδ & I X, & rationem ſolidorum Rθ & Nξ. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

IIſdem poſitis quæ in propoſitione: eodem planè diſcurſu demonſtrabimus ex Corollarijs 57. & 59. etiam proportionem quæ eſt inter rationes ſolidorum A & D, ac rationem ſolidorum G & I, eſſe ad proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum P & R, & rationem ſolidorum L & N, vt eſt proportio inter rationem ſolidorum Aβ & Dδ, & rationem ſolidorum G T & I X ad proportionem quæ eſt inter rationem ſolidorum Pσ & Rθ, & rationem ſolidorum Lμ & Nξ.

PROPOSITIO LXI.

IIſdem manentibus:

Dico quod ratio quæ eſt inter aggregatum ſolidorum A, C, D, E & aggregatum ſolidorum G, H, I, K, ſit ad rationem inter aggregatum corporum P, Q, R, S, ad aggregatum corporum L, M, N, O vt ratio aggregati corporum Aβ, Cγ, Dδ, Eλ ad aggregatum ſolidorum G T, H V, I X, K Y, eſt ad rationem inter aggregatum corporum Pσ, Qη, Rθ, S Z, & aggregatum corporum Lμ, Mν, Nξ, Oς.

Demon-

Demonſtratio.

A	G	P	L
C	H	Q	M
D	I	R	N
E	K	S	O
Aβ	GT	Pσ	Lμ
Cγ	HV	Qη	Mν
Dδ	IX	Rθ	Nξ
Eλ	KY	SZ	Oϱ

DVplici viâ hanc propoſitionem demonſtrabimus.

Prima eſt per propoſitionem ſecundam Archimedis de Conoid. applicando proportionibus rationum ea quæ ſolis rationibus quantitatum ſimplicium attribuit Archimedes.

Altera verò per propoſitionem 54. Lemmaticam huius libri.

Primã igitur viam ſic inire licebit, quam tamẽ poſteà maiori diſcurſu abſoluemus. Proportio quæ eſt inter rationes corporum A ad G, & C ad H, eadem [a] eſt cum proportione quę eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M. Item proportio quæ eſt inter rationes corporum C ad H, & D ad I, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum Q ad M, & R ad N: igitur proportio quæ eſt inter rationes corporum A ad G, & C ad H, ad proportionem quę eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, eſt vt proportio quę eſt inter rationes corporũ C ad H, & D ad I, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Q ad M, & R ad N. Igitur [b] permutando proportio quę eſt inter rationes corporom A ad G, & C ad H, ad proportionem quæ eſt inter rationes corpotum C ad H, & D ad I, eſt vt proportio quę eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, ad proportionem quæ eſt inter ratinnes corporum Q ad M, & R ad N. Simili modo oſtendetur quod proportio quæ eſt inter rationes corporum C ad H, & D ad I, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum D ad I, & E ad K, ſit vt proportio quę eſt inter rationes corporum Q ad M, & R ad N, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum R ad N, & S ad O.

a Patet ex 57 huius permutando.

b Colligitur ex 44. proportionalit.

Prætereà oſtenſum eſt [c] quod proportio quę eſt inter rationes corporum A ad G, & C ad H, ſit ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, vt proportio quæ eſt inter rationes corporum Aβ ad GT, & Cγ ad HV, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Pσ ad Lμ, & Qη ad Mν. Igitur [d] permutando proporrio quæ eſt inter rationes corporum A ad G, & C ad H, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Aβ, ad GT, & Cγ ad HV, eſt, vt proportio quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Pσ, ad Lμ, & Qη ad Mν.

c Patet ex 60. huius permutando.

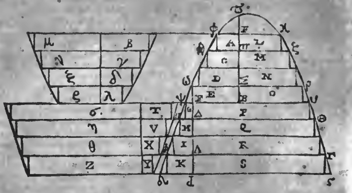
d Collige ex 44 proportionalit.

Simili prorſus ratione demonſtrabitur quod proportio quæ eſt inter rationes corporum C ad H, & D ad I, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Cγ ad HV, & Dδ ad IX, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporũ Q ad M, & R ad N, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Qη ad Mν, & Rθ ad Nξ: item quod proportio quæ eſt inter rationes corporum D ad I, & E ad K, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Dδ ad IX, & Eλ ad KY, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporum R ad N, & S ad O, eſt ad proportionem quę eſt inter rationes corporum Rθ ad Nξ, & SZ ad Oϱ.

Igitu[illegible]emadmodum infert Archimedes quod omnes quantitates primæ ſimul ſumpta[illegible]omnes quantitates ſecundas ſimul ſumptas, ſint vt omnes quantitates ter-

FFF tiæ

A	G	P	L
C	H	Q	M
D	I	R	N
E	K	S	O
Aβ	GT	Pσ	Lμ
Cγ	HV	Qη	Mν
Dδ	IX	Rθ	Nξ
Eλ	KY	SZ	Oρ



tiæ ſimul ſumptæ ad omnes quantitates quartas ſimul ſumptas, ita quoque eodem diſcurſu inferimus quod omnes proportiones aggregatæ quæ ſunt inter rationes corporum A ad G, & C ad H, item C ad H, & D ad I, item D ad I, & E ad K, ſint ad omnes proportiones aggregatas quæ ſunt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, item Q ad M, & R ad N, item R ad N, & S ad O, vt proportiones omnes aggregatæ quæ ſunt inter rationes corporũ Aβ ad GT, & Cγ ad HV, item Cγ ad HV, & Dδ ad IX, item Dδ ad IX, & Eλ ad KY, ſunt ad omnes proportiones aggregatas quæ ſunt inter rationes corporum Pσ ad Lμ, & Qη ad Mν, item Qη ad Mν, & Rθ ad Nξ, item Rθ ad Nξ, & SZ ad Oρ.

Cùm verò proportionem quæ eſt inter rationes corporum A ad G, & C ad H conſtituant binæ rationes corporum A ad G, & C ad H, item ſingulas alias proportiones binæ ſemper rationes conſtituant, etiam rectè infertur quod omnes rationes corporum quæ proportiones illas quantitatum conſtituunt, ſcilicet rationes corporum A ad G, C ad H, D ad I, E ad K ſimul ſumptæ, ſint ad rationes corporum P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O, ſimul ſumptas, vt omnes rationes corporum Aβ ad GT, Cγ ad HV, Dδ ad IX, Eλ ad KY ſimul ſumptæ, ſunt ad omnes rationes [illegible]orum Pσ ad

Pσ ad Lμ, Qη ad Mν, Rθ ad Nξ, S Z ad Oϱ ſimul ſumptas. Cùm verò rationes A ad G, C ad H, D ad I, E ad K, ſic ſint conſtitutæ vt omnia corpora A, C, D, E ſint termini antecedentes, corpora verò ſiue termini G, H, I, K ſint conſequentes; item in rationibus corporum P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O eodem modo corpora P Q, R, S, terminorum antecedentium locum obtinent, vti & corpora L, M, N, O vicem conſequentium; idemque in alijs aggregatis rationum inueniatur, & termini antecedentes ſint corpora Aβ, Cγ, Dδ, Eλ, termini verò conſequentes ſint corpora G T, H V, I X, K Y; item in quarto aggregaro rationum corpora Pσ, Qη, Rθ, S Z vices antecedentium obtinent, vti & corpora Lμ, Mν, Nξ, Oϱ conſequentium. Igitur ratio aggregati ſolidorum A, C, D, E, ad aggregarum ſolidorum G, H, I, K, eſt ad rationem aggregati ſolidorum P, Q, R, S, ad aggregatum ſolidorum L, M, N, O; vt ratio aggregati ſolidorum Aβ, Cγ, Dδ, Eλ ad aggregatum ſolidorum G T, H V, I X, K Y, eſt ad rationem aggregati ſolidorum Pσ, Qη, Rθ, S Z, ad aggregatum ſolidorum Lμ, Mν, Nξ, Oϱ. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratio facilior.

QVod iam per propoſitiones proportionum abſoluimus, facilius fortaſſe per proportiones nudas declarabitur, faciliuſque patebit Archimedis diſcurſum ad vnguem fuiſſe obſeruatum; vti enim ipſe ex rationibus quæ ſemper duas quantitates pro terminis habent, terminorum ſiue quantitatum combinationem inuenit; ita & nos ex proportionibus quæ ſemper duas rationes continent, ipſas rationes combinabimus, ſicque combinatas cum alijs combinatis ſiue aggregatis quantitatom rationibus comparabimus.

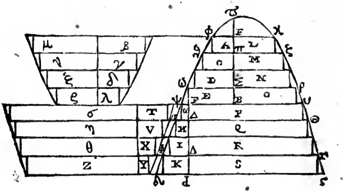
Ratio corporis A ad G,[a] eadem eſt cum ratione corporis P ad L. item ratio corporis C ad H, eadem cum ratione corporis Q ad M. Igitur proportio quę eſt inter rationes corporum A ad G, & C ad H, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, ſiue ratio corporis A ad G, eſt ad rationem corporis C ad H, vt ratio corporis P ad L, eſt ad rationem corporis Q ad M. Similiter oſtendetur quod ratio corporis C ad H, ad rationem corporis D ad I ſit vt ratio corporis Q ad M ad rationem corporis R ad N. Denique oſtendetur quod ratio corporis D ad I, ad rationem corporis E ad K ſit vt ratio corporis R ad N, eſt ad rationem corporis S ad O. Atque ſic primam partem habemus conſtructionis Archimedeæ. Itaque ad ſecundam ſic procedemus. — a Per 46. huius.

Ratio corporum Aβ ad G T, eadem[b] eſt cum ratione corporum Pσ ad Lμ; & ratio corporum A ad G, etiam eadem erat cum ratione corporis P ad L. Itaque ratio corporum A ad G, eſt ad rationem corporum P ad L, vt ratio corporum Aβ ad G T, eſt ad rationem corporum Pσ ad Lμ. igitur[c] permutando ratio corporum A ad G, eſt ad rationem corporis Aβ ad G T vt ratio corporis P ad L, ad rationem corporis Pσ ad Lμ. eodem modo oſtendetur ratio corporis C ad H, eſſe ad rationem corporis Cγ ad H V, vt ratio corporis Q ad M, eſt ad rationem corporis Qη ad Mν. Item ratio corporis D ad I, ad rationẽ corporis Dδ ad I X, eſt vt ratio corporis R ad N, ad rationem corporis Rθ ad Nξ. Denique ratio corporis E ad K, eſt ad rationem corporis Eλ ad K Y, vt ratio corporis S ad O, eſt ad rationẽ corporis S Z ad Oϱ. — b 18. huius. — c Collige ex 44 proportionaliter.

Igitur vti Archimedes de quantitatibus, ita & nos de rationibus quantitatum inferimus, nempè quod omnes rationes quantitatum A ad G, C ad H, D ad I, E ad K, ſint ad omnes rationes quantitatum P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O: vti omnes rationes quantitatum Aβ ad G T, Cγ ad H V, Dδ ad I X, Eλ ad K Y, ſunt ad omnes rationes quantitatum Pσ ad Lμ, Qη ad Mν, Rθ ad Nξ, S Z ad Oϱ.

Cùm verò rationes corporum A ad G, C ad H, D ad I, E ad K ſic ſint conſtitutæ vt omnia corpora A, C, D, E ſint termini antecedentes, corpora verò G, H, I, K ſint termini conſequentes; idemque in reliquis rationibus obſeruatum ſit: igitur ratio aggregati ſolidorum A, C, D, E ad aggregatum ſolidorum G, H, I, K eſt ad rationem aggregati ſolidorum P, Q, R, S, ad aggregatum ſolidorum L, M, N, O: vt ratio aggregati ſolidorum Aβ, Cγ, Dδ, Eλ, ad aggregatum ſolidorum G T, H V, I X, K Y eſt ad rationem aggregati ſolidorum Pσ, Qη, Rθ, S Z, ad aggregatum ſolidorum Lμ, Mν, Nξ, Oϱ. Quod erat demonſtrandum.

Aliter.



ADdemus & alteram ex Lemmatica propoſitione 54. huius libri hac methodo qua ſimiliter inferemus eandem concluſionem quam priore diſcurſu intulimus.

Proportio rationis inter ſollda A & G, ad rationem inter ſolida P & L, eadem eſt [a] cum proportione rationis inter ſolida C & H, ad rationem inter ſolida Q & M, prætereà proportio rationis inter A & G ſolida ad rationem ſolidorum P & L, eadem [b] eſt cum proportione rationis quæ eſt inter ſolida D & I, ad rationem inter ſolida R & N. Vlteriùs proportio rationis inter ſolida A & G, ad rationem inter ſolida P & L, eſt eadem [c] cum proportione rationis ſolidorum E & K, ad rationem ſolidorum S & O, atque hucvſque proportio rationis inter ſolida A & G, ad rationem ſolidorum P & L, comparata eſt cum omnibus alijs cum quibus conferri poteſt, ita vt ſemper antecedentis rationem obtineat; vt igitur diſcurſum proſequamur, aſſumemus proximè ſequentes rationes quæ vicem antecedentis obtineant, dicendo: proportio rationis inter ſolida C & H, ad rationem ſolidorum Q & M, eadem eſt cum proportione inter ſolida D & I, ad rationem ſolidorum R & N, & proportio iterum rationis ſolidorum C & H, ad rationem ſolidorum Q & M, eadem eſt cum proportione rationis ſolidorum E & K, ad rationem ſolidorum S & O. Denuo proportio rationis ſolidorum C & H, ad rationem ſolidorum Q & M, eadem eſt cum proportione rationis ſolidorum A, G, ad P, L ſolidorum rationem: atque hoc modo contulimus proportionem rationis ſolidorum C & H, ad rationem ſolidorum Q & M, cum reliquis rationibus concedendo illi ſemper locum antecedentis, reſtat igitur idipſum præſtemus de alijs quæ remanent, dicendo iterum: proportio rationis ſolidorum D, I ad rationem ſolidorum R, N eadem eſt cum proportione rationis ſolidorum E, K ad S, O ſolidorum rationem; item proportio rationis inter ſolida D & I, ad rationem inter ſolida R & N, eadem eſt cum proportione rationis inter ſolida A, G, ad rationem ſolidorum P & L, & eadem cum proportione rationis inter ſolida C & H, ad rationem inter ſolida Q & M. Tandem vt hanc partem expediamus dicemus proportionem rationis inter ſolida E, K ad rationem inter ſolida S, & O, eandem eſſe cum proportione rationis ſolidorum A, G ad rationem P, L, & cum proportione rationis C, H ad rationem Q, M; & cum proportione rationis D, I, ad rationem R, N.

[a] 57. huius.
[b] Ibid.
[c] Ibid.

Hoc

Hoc autem poſito infero ex vi Lemmaticæ propoſitionis priùs citatæ huius libri quod proportio rationis inter aggregatum omnium ſolidorum A,C,D,E & aggregatum ſolidorum G,H,I,K ad rationes inter aggregatum omnium ſolidorum P,Q, R,S, & aggregatum ſolidorum L,M,N,O, eadem ſit cum proportione inter rationes partium iam numeratarum quæ antecedentium loca obtinebant & rationem partium quæ conſequentis vices ſupplebant.

Eadem diſcurrendi methodo, ſed per 59. huius erit proportio rationis ſolidorum Aβ, & G T, ad rationem ſolidorum Pσ, & Lμ eadem cum proportione rationis ſolidorum Cγ & H V ad rationem ſolidorum Qη & Mν, item cum proportione rationis ſolidorum Dδ, & I X ad rationem ſolidorum Rθ, & Nξ; item cum proportione rationis ſolidorum Eλ & K Y, ad rationem ſolidorum S Z & Oϱ. ſimiliter ſi proportio rationum quæ ſunt inter ſolida Cγ & H V: Qη & Mν comparetur cum omnibus reliquis, idemq; fiat circa proportionẽ rationũ inter ſolida Dδ & I X, Rθ & Nξ exiſtentiũ, vti & circa proportionẽ rationũ inter ſolida Eλ & K Y: S Z & Oϱ: ſemper reperietur æqualitas ſiue identitas inter rationum proportiones in quacunque comparatione. Quare licebit inferre idem quod priùs concluſum eſt, nimirum quod proportio inter rationes aggregati primi ad ſecundum aggregatum, & rationes aggregati tertij ad quartum eadem ſit cũ proportione inter rationes, quæ ſunt inter partes aggregatorum obtinentes vices antecedentium terminorum & rationes quę ſunt inter partes aggregatorum quæ loca conſequentium continebant.

Quia verò demonſtratum eſt [a] quod proportio inter rationem ſolidorum A & G, & rationem ſolidorum P & L, ſit ad proportionem inter rationem ſolidorum C & H, & rationem ſolidorum Q & M, vt eſt proportio inter rationem ſolidorum Aβ & G T, & rationem ſolidorum Pσ & Lμ ad proportionem inter rationem ſolidorum Cγ & H V, & rationem ſolidorum Qη & Mν, atque ita conſequenter de reliquis, & hoc quidem in omni ſubdiuiſione diametrorum parabolæ, infero ſecundũ mentem propoſitionis quadrageſimæ ſextę libri de ductibus quod proportio rationis quæ eſt inter aggregata ſolidorum A,C,D,E & ſolidorum G,H,I,K ad rationem aggregatorum P,Q,R,S & L,M,N,O, eadem ſit cum proportione rationis quæ eſt inter aggregatum ſolidorum Aβ, Cγ, Dδ, Eλ, & aggregatum ſolidorum G T, H V, I X, K Y ad rationem inter aggregatum ſolidorum Pσ, Qη, Rθ, S Z & aggregatum ſolidorum Lμ, Mν, Nξ, Oϱ. Quod fuit demonſtrandum. [a] 60. huius.

PROPOSITIO LXII.

EAdem figura manente:

Dico rationem quæ eſt inter ſegmenta parabolica φEBψ & ψFdω ducta in ſe ipſa, eſſe ad rationem quę reperitur inter parabolica ſegmenta dFυσ & BEκυ, etiam ducta in ſeipſa, vt ratio inter ſegmenta parabolica φEBψ & ψFdω, ducta in ſeipſa ſubalternè, eſt ad rationem inter ſegmenta parabolica dFυσ & BEκυ ducta in ſeipſa ſubalternè.

Demonſtratio.

OStenſum eſt præcedenti demonſtratione rationem inter parallelepipeda A, C, D, E & parallelepipeda G,H,I,K, eſſe ad rationem inter parallelepipeda P,Q, R,S & parallelepipeda L,M,N,O, vt ratio inter parallelepipeda Aβ, Cγ, Dδ, Eλ, & parallelepipeda G T, H V, I X, K Z eſt ad rationẽ inter parallelepipeda Pσ, Qη, Rθ, S Z, ad parallelepipeda Lμ, Mν, Nξ, Oϱ. atque hoc de quauis ſubdiuiſione rectarum E B, F d intelligendum eſt ex vi diſcurſus in demonſtratione poſiti: cum igitur continuatis ſubdiuiſionibus auferatur ſemper plus dimidio reſidui corporum eorum quibus parallelepipeda inſcribuntur, vt demonſtratum libro de ductibus, [b] liquet ex diſcurſu propoſitionis 45. eodem libro demonſtratæ rationem quoque inter EφψB in ſe ductum & Fψωd, ductum in ſe eſſe ad rationem inter dFυσ in ſe [b] Propoſ. 42. & 43.

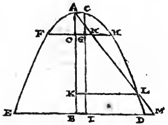
ductũ & E κ υ B, ductum in ſe vt ratio eorundẽ ſegmentorum φ E B ψ & ψ F d ∂, ſubalterne in ſe ductorum eſt ad rationem eorundem rurſus ſegmentorum d F υ σ & E B υ κ, in ſe ductorum ſubalternè: Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXIII.

SIt parabolę axis A B, ad quem poſitæ ſint ordinatim D E, H F, axi verò ſit æquidiſtans C G I, occurrens ordinatim poſitis in G & I.

Oporteat autem figuræ ex plano H G I D, in ſe ductæ æquale parallelepipedum exhibere.

Conſtructio & demonſtratio.



Fiat recta A K æqualis lateri recto quod axi A B inſeruit: poſita deinde K L ordinatim ad axem ducatur A L quæ ſecet H F, D E in punctis N & M, erit igitur a priſma baſim habens triangulum A M B & altitudinem A K, æquale corpori quod fit ex A H D B parabola in ſe ducta, & conſequenter figura ſolida habens baſim N O B M & altitudinem A K, æqualis eſt corpori quod fit ex ductu H O B D in ſeipſum ducto. ſed H O B D in ſe ductum (hoc eſt, b vt iam oſtendi O N M B ductum in altitudinem A K) æquale eſt c H G I D, ducto in ſe, ſimul cum G O B I in ſe ducto, & ſimul cum H G I D, bis ducto in G O B I. Igitur cùm G O B I in ſe ductum parallelepipedum exhibeat, & cùm H G I D, ductum in G O B I, corpus producat quod notam habet baſim & altitudinem; ſi ex ſolido cuius eſt baſis O N M B, & altitudo A K, auferantur partes quæ ſint æquales corporibus quæ fiunt ex G O B I, in ſe ducto & ex H G I D in ipſum G O B I bis, reſiduum ex corpore habente baſim N O B M, & altitudinem A K, erit æquale ſolido quod fit ex H G I D in ſe ducto. igitur figurę ex plano H G I D in ſe ductæ æquale parallelepipedum exhibuimus. quod præſtare oportuit.

a 161. duct.

b Similiter oſtenditur vt 199. ductu.

c Colligitur ex 239 parab.

PROPOSITIO LXIV.

IDem oporteat præſtare de parte parabolæ G F E I.

Conſtructio & demonſtratio.

QVoniam figura O F E B æqualis eſt figurę O H D B, & cùm ſit demonſtratum d figuram H O B D ductam in ſe æqualem eſſe priſmari habẽti baſim N O B M, & altitudinem A K, etiam figura O F E B in ſe ducta eidem priſmari ſub baſi N O B M, & altitudine A K æqualis erit: eſt verò figura G F E I, in ſe ducta æqualis e G O B I in ſe ducto ſimul cum O F E B, ducto in ſe vnà cum G O B I, bis ducto in ſuperficiem O F E B. Igitur cùm G O B I, ductum in ſe parallelepipedum ſit, & O F E B

d Ex 161. duct.

e Similiter oſtenditur vt 199. duct.

OFEB ductũ in ſe æquetur priſmati ſub baſi NOBM, & altitudine AK, & OFEB ductum in GOBI, æquale ſit corpori habenti triangulum æquale figuræ OFEB, (quam ad rectilineam reduximus [a]) & altitudine GO, manifeſtum eſt totum corpus ex ductu plani GFEI in ſeipſum reductum eſſe ad ſolidum baſeos figuræ rectilineæ & altitudinis notæ, quod præſtare oportuit. a Part. 5. parab.

PROPOSITIO LXV.

RESumpta figura propoſitionis 56.

Dico proportionem quæ eſt inter rationẽ ſolidi ex plano φ E B ψ parabolico in ſe ducto ad ſolidum ex plano parabolico F ψ δ d ducto in ſe, & inter rationem ſolidi ex ductu plani F d σ υ in ſe ducti ad ſolidum ex ductu plani parabolici E κ υ B in ſe ipſum notam eſſe. Vide figurã pag. 1144.

Demonſtratio.

PRæcedenti enim propoſitione reducta ſunt ſingula ea corpora ad priſmata quæ baſim habent rectilineam & altitudinem notam. ſed inter quatuor talia corpora proportionalitas nota eſt per ea quæ docuimus libro de proportionalitatibus [b]. igitur etiam proportionalitas inter corpora illis æqualia nota erit. Quod fuit demonſtrandũ. b Prop 13.

PROPOSITIO LXVI.

REſumptâ eadem figura.

Dico proportionem quæ eſt inter rationem ſolidi ex plano φ E B ψ ducto in ſeipſum ſubalternè ad ſolidum quod fit ex ſuperficie ψ F d δ in ſe ſubalternè ductâ, & inter rationem ſolidi geniti ex ductu ſubalterno in ſe plani F d σ υ ad ſolidum quod oritur ex ductu plani B E κ υ ſubalternè in ſe, notam eſſe.

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt propoſit. 61. huius quadraturæ eandem eſſe proportionalitatẽ inter corpora quæ oriuntur ex planis φ E B ψ, F ψ δ d, F d ς υ, & B E κ υ in ſe ductis & inter ſolida, quæ fiunt ex ijſdem planis ductis in ſe ſubalternè. ſed propoſitione præcedenti oſtenſum eſt, notam eſſe proportionalitatem inter corpora quæ oriuntur ex planis φ E B ψ, F ψ δ d, F d ς υ, & B E κ υ in ſe ductis. Igitur nota erit proportionalitas quæ reſultat in corporibus quæ fiunt ex ductu earumdem ſuperficierum in ſe ſubalternè. Quod fuit demonſtrandum.

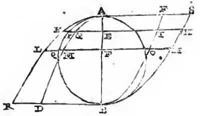
PROPOSITIO LXVII.

SInt A & B vertices parabolarum ſubalternè poſitarum æqualium, eductiſque ordinatim BD, AF ad axem AB, ſuper AB deſcribatur circulus ACB, & conſtituantur ordinatim GI, MO.

Dico rectangulum GEI ad MFO, eandem habere rationem quam habet linea PE ad QF.

Demon-

Demonſtratio.

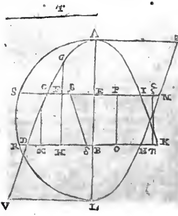


Flant B R, A S æquales A B, quibus ordinatim poſitis ad axes A B, B A, deſcribantur parabolæ A K R, B N S habentes axem A B, erit rectangulo A B, P E æquale a rectangulum K E H, & rectangulo A B, Q F æquale rectangulũ L F N. ſed vt P E, ad Q F, ita rectangulum A B, P E, ad rectangulum A B, Q F. ergo vt P E ad Q F, ſic rectangulum K E H ad rectangulum L F N. Iam verò vt G E ad M F, ita eſt K E ad L F, & vt eſt E I ad F O, ita E H eſt ad F N. Igitur eſt rectangulum K E H ad L F N, vt rectangulum G E I ad M F O, cùm ſit horum rectangulorum ratio compoſita ex iiſdem rationibus. Igitur eſt rectangulum G E I ad M F O, vt linea P E ad Q F lineam. Quod fuit demonſtrandum.

a *Oſtenſum in demonſt. prop 143. duct.*

PROPOSITIO LXVIII.

Sit A L axis parabolarum æqualium ſubalternè poſitarum A C D, & L M N, & applicatis ad axem ordinatim rectis C E N, D B M, ſuper A L fiat ſemicirculus A S L, ſecans ordinatim poſitas productas in S & R. Fiat demum rectangulo C E N æquale rectangulum ſuper S E & T.



Dico ſegmentum circulare ductum in altitudinem T, æquari ſegmento parabolico C D B E ducto in ſegmentum E B M N: imò totus ſemicirculus ductus in altitudinem T, æquatur toti parabolæ A V L in ſe ductæ ſubalternè.

Demonſtratio.

Qvoniam vt S E ad R B, b ita eſt rectangulum C E N ad D B M, & vt S E ad R B, ita rectangulum S E T ad rectangulum R B T, erit rectangulum S E T ad rectangulũ R B T, vt rectangulum C E N ad rectangulum D B M. Quare cùm rectangulum S E T ex conſtr. æquetur rectangulo C E N, etiam rectangulum R B T æquatur rectangulo D B M. Quod quia ſemper contingit, circa omnia re-

b *Per præcedent.*

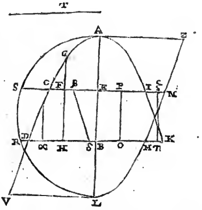
nia rectangula alia quotcunque tandem ducantur parallelæ, eodem planè diſcurſu, quo vſi ſumus in quadratura prima propoſit. 51. & aliquot eam præcedentibus demonſtrabimus C E B D, ductum in E N M B æquale corpus efficere ſolido quod fit ex S E B R, ducto in altitudinem T: imò totam parabolam A V L ductam in parabolam totam A L Z, æquale corpus producere cylindro qui fit ex ſemicirculo A S R L in altitudinem T. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXIX.

Sit parabola A C V axem habens A L, quam ſecent ordinatim poſitæ C E I, D B K: ponaturque F H parallela axi.

Oporteat ſolido quod fit ex ſegmento parabolico C F H D in ſe ſubalternè ducto, exhibere æquale ſolidum cylindricum cuius baſis ſit ſegmentum aliquod circulare.

Conſtructio & demonſtratio.



Fiat E L, æqualis A B, & rectis E I, B K, æquales B M, E N: tum factâ N P æquali R H, ponatur P O parallela axi. erunt igitur puncta L M N ad parabolam, ſegmentumque parabolicum P N M O æquale erit ac ſimile ſegmento D C F H, & poſitum ſubalternè. Deinde ſuper A L deſcribe circulum, cui occurrant E C, B D in S & R: & ſuper recta S E, & quadam aliâ T, fiat rectangulum æquale ei quod rectis C E, E N continetur, erit igitur per præced. ſegmentum parabolicum C E B D in ſe ductum ſubalternè, hoc eſt in E N M B, ſegmentum æquale ſegmento circulari S E B R, ducto in altitudinem T. Atqui ſegmentum parabolicum C E B D ductum in E N M B, æquatur [a] ſegmento F E B H, ducto in E N M B, & ſegmento D C F H, ducto in E P O B, vnà cum D C F H ducto in P N M O. ergo hæc tria ſolida quæ nimirum fiunt ex F E B H ducto in E N M B, ex D C F H in E P O B; ex D C F H in P N M O, ſimul ſumpta æquantur ſolido quod fit ex S E B R ducto in altitudinē T. Iā verò quoniam parabolicum ſegmentum C E B D,[b] reduximus ad rectilineum, etiam ſolidum ex F E B H in E N M B, reductum eſt ad parallelepipedum. Fiat igitur parallelepipedum altitudinem habens T, æquale ſolido ex F E B H in E N M B; quod quia iam oſtendi minus eſſe ſolido ex S E B R, ducto in altitudinem T, etiam parallelepipedū ipſi æquale in T altitudine minus eſt ſolido ex S E B R in altitudine T, ac proinde eius baſis erit minor plano S E B R. ſit igitur baſis illa ſegmentum β E B δ. Præterea quoniam ſegmentum D C F H redegi [c] ad rectilineum, etiam ſolidum ex D C F H in E P O B, ad parallelepipedū redactum eſt Fiat ergo parallelepipedum in altitudine T, æquale ſolido ex D C F H in E P O B. Quoniam autem oſtendi ſuprà S E B R in T, æquari F E B H in E N M B, & D C F H in E P O B, vnà cum D C F H in P N M O; eſtque β E B δ in T, æquale ſolido ex F E B H in E N M B, manifeſtum eſt ſolidum ex S β δ R in T, ęquari ſolido ex C F H D in E P O B, vnà cum D C F H in P N M O. ergo parallelepipedum quod paulò ante in altitudine

a Demonſtratur ex prima 2. ſimiliter ac 199. ex quarta 2.

b Parte 5. parab.

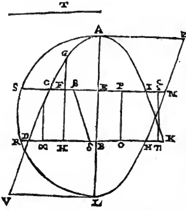
c Ibid.

dine T, factum eſt æquale ſolido ex DCFH in EPOB, minus eſt ſolido ex Sβ δR in T, ac proinde & baſis eius minor eſt plano Sβ δR. ſit igitur baſis illa rectilineum β δX C. Quoniam igitur totum SEBR ductũ in T, æquatur FEBH in ENMB, & DCFH in EPOB, vnà cum DCFH in PNMO, ſuntque ſolidi ex SEBR in T, partes duę, nimirum βEBδ in T, & β δX C in T, æquales ſolidis FEBH in ENMB, & DCFH in EPOB. Erit quoque ſolidi ex SEBR in T reſiduum, nempe quod fit ex SCXR in altitudinem T, æquale ei quod fit ex DCFH in PNMO, hoc eſt ſolido quod fit ex DCFH in ſe ducto ſubalternè. Fecimus ergo quod erat poſtulatum.

PROPOSITIO LXX.

Iiſdem poſitis: Oporteat ſolido quod fit ex ſegmento parabolico FIKH in ſe ducto ſubalternè, hoc eſt ducto in ſegmentum FNMH, exhibere æquale ſolidum cylindricum cuius baſis ſit ſegmentum aliquod circulare, altitudo verò T, eadem nempe quę ſuperiori propoſitione reperta fuit.

Conſtructio & demonſtratio.



PLanũ CFHD, hoc eſt PIKO, ductũ in PNMO, æquatur plano SCXR ducto in altitudinem T, per præcedent. & quia ſegmentum PIKO reduximus [a] ad rectilineũ, etiam ſolidum quod fit ex PIKO in FPOH redactum eſt ad parallelepipedum. Fiat igitur ipſi æquale parallelepipedum cuius altitudo ſit T, baſis verò rectilineum, exempli gratia Cβ δX. Rurſum quia [b] reduximus ad rectilineum portionem parabolicam FIKH, ſolidum quoque natum ex FPOH in FIKH, redactum eſt ad parallelepipedum. Fiat igitur ipſi æquale parallelepipedum cuius altitudo ſit T, baſis verò rectilineum βξπδ. Tria igitur ſolida, quæ nimirũ fiunt ex SCXR in T, ex Cβ δX in T, ex βξπδ in T; hoc eſt ſolidum quod producitur ex ſegmento circulari toto SRπξ in altitudinem T, æquatur tribus ſolidis quę fiunt ex PIKO in PNMO, ex PIKO in FPOH, ex FPOH in FNMH. Atqui ſolidum ex PIKO in PNMO, cum ſolido PIKO in FPOH (hoc eſt ſolidum ex PIKO in FNMH) vnà cum ſolido ex FPOH in FNMH, æquantur [c] ſolido quod producitur ex FIKH, in ſe ducto ſubalternè ſiue in planum FNMH. ergo ſegmentum cylindriforme quod fit ex SRπξ in altitudinem T ducto, æquatur ſolido quod fit ex ſegmento parabolico FIKH in ſe ducto ſubalternè. exhibuimus ergo quod petebatur.

[a] Parte 5. parab.

[b] Ibid.

[c] Demonſtratur ex prima 2. vt 99 ex quarta.

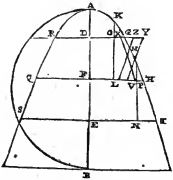
PRO-

PROPOSITIO LXXI.

SIt A B axis parabolæ A G I, & rectâ D E bifariam diuiſâ in F, ponantur ordinatim D G, F H, E I quæ intercipiant æquales diametri partes F D, F E. Denique conſtituantur K L, M N axi æquidiſtantes æquales inter ſe.

Dico figuram O G H L maiorem eſſe figura P H I N, & ſimiliter corpus ex ductu O G H L, in ſe maius eſſe ſolido quod fit ex ductu P H I N in ſe.

Demonſtratio.



QVoniam D F, F E ex hypotheſi æquales ſunt, etiam O L, P N æquales erũt. ſunt autem & toræ K L, M N ex hypotheſi æquales, ergo etiam K O, M P æquales erunt. rectangula igitur G O R, H P Q [a] ſunt æqualia. ergo vt H P ad G O, ſic O R ad P Q. quare cùm O R minor ſit quàm P Q, erit & P H minor quàm G O. Deinde oſtenſum eſt [b] rectangulum G O R eſſe ad rectangulum H L Q, vt K O eſt ad K L, hoc eſt vt M P ad M N, hoc eſt [c] vt rectangulum H P Q ad rectangulum I N S. igitur permutando vt rectangulum G O R eſt ad rectangulum H P Q, ſic rectangulum H L Q ad rectangulnm I N S. ſed G O R, & H P Q æquantur. Ergo & H L Q, I N S æqualia ſunt. Ergo N I eſt ad H L, vt L Q ad N S. ſed L Q minor eſt quàm N S. ergo N I minor quoque eſt quàm H L. Quoniam igitur oſtenſum eſt H P minorem eſſe quàm G O, & N I minorem quàm H L, fiat O X par ipſi H P, & L V par ipſi N I, inſcriptaq; figurâ O X V L, quę ſit æqualis P H I N, erit O G H L maior figura O X V L adeoq; etiam figura P H I N, quod erat primũ. Secundum quoque ſic conſtabit: quoniam O G H L in ſe ductum maius eſt O X V L, ducto in ſe, etiam O G H L, in ſe ductum erit maius P H I N in ſe ducto. Quod erat ſecundum.

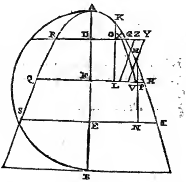
[a] 55. huius.
[b] 44. parab.
[c] Per cond.

PROPOSITIO LXXII.

IIſdem poſitis:

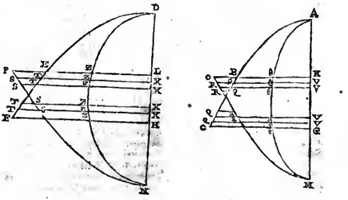
Dico quod O G H L ductum in ſe ſubalternè maius exiſtat ſolido quod reſultat ex P H I N in ſe ſubalternè ducto.

Demonſtratio.



POnantur L O Z & L O Y, ſubalternè figuris L O X V, L O G H. Tunc L O G H ductum in L O Y maius eſt quàm L O G H, ductum in L O Z. ſed L O G H ductum in L O Z, maius eſt quàm L O X V ductum in L O Z. ergo L O G H ductum in L O Y, hoc eſt L O G H ductum in ſe ſubalternè multò maius eſt quàm L O X V, ductum in L O Z, hoc eſt vt patet ex præced. quàm N P H I ductum in ſe ſubalternè. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXIII.



SInt duæ parabolę A B C, D E F, quarum axes A G, D H diuiſi ſint in K, & L proportionaliter, & K B, V Q, G C ordinatim poſitæ ſint, vti & L E, X T, H F; productis deinde A G in M & D H in N, vt ſint æquales

quales A K, G M, item D L, H N, fiat K O linea æqualis G C, & L P æqualis H F lineæ; & per M & O, item per N & P parabolæ deſcriptæ ſint, quarum vertices M & N. Denique fiant rectangulis R V Q æqualia rectangula ſub A M & θ V; ſimiliter rectangulis S X T æqualia fiant rectangula ſub D N; X Z; A, θ, M puncta; item puncta D, Z, N erunt ad [a] circulum vel [b] ellipſin.

Dico partem ſectionis θ K G θ eandem habere rationem ad ſectionem A θ M cuius eſt pars, quam pars ſectionis Z L H Z habet ad ſectionem D Z N cuius eſt pars.

[a] Si axis æqualis ſit lateri recto, & habetur ex demonſtratis prop. 143. huius.

[b] Si axis ſit lateri recto inæqualis, & patet ex conuerſa 110. parab.

Demonſtratio.

CVm enim ſectio A θ M, item D Z N ſit ellipſis aut circulus cuius axes A M, D N: item cùm θ K, Z L ordinatim applicatæ ad ſuas diametros eas proportionaliter diuidant, [c] erit θ A K ſegmentum ad ſuam ſectionem vt ſegmentum Z D L eſt ad ſuam. Eodem modo oſtendetur ſegmentum θ A G ad ſuam ſectionem eſſe vt ſegmentum Z D H eſt ad ſuam, rurſus enim θ G, Z H ordinatim applicatæ ad ſuas diametros, eas diuidunt proportionaliter. Igitur permutando erit ſegmentum θ A K ad ſegmentum Z D L, vt ſectio ad ſectionem. eodem modo permutando ſegmentum θ A G ad ſegmentum Z D H, erit vt ſectio ad ſectionem, hoc eſt vt ſegmentũ θ A K ad Z D L ſegmentum. ergo diuidendo ſegmentum θ K G θ, eſt ad ſegmentum Z L H Z vt ſegmentum θ A K ad ſegmentum Z D L, hoc eſt vt ſectio ad ſectionem, & permutando ſegmentum θ K G θ eſt ad ſuam ſectionem A θ M, vt ſegmentum Z L H Z eſt ad ſuam ſectionem nempè D Z N. Quod erat demonſtrandum.

[c] Per 187. de ellipſ.

PROPOSITIO LXXIV.

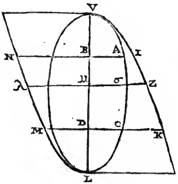
QVod ſi rurſus parabolæ ſubalternę ponantur vt ſuprà, & ordinatim applicatę B K, C G, æqualiter diſtent à verticibus A & M, item in ſecundis parabolis ſubalternè poſitis ordinatim applicatæ Z X, Z X æqualiter etiam diſtent à verticibus D & N, ſed ratio A M ad A K, non ſit eadem cum ratione D N ad D X, ſed ratio A M ad A K, ſit maior quàm ratio D N ad D X.

Dico quod ſegmentum inter ordinatim ductas interceptum, nempe θ K G θ ad ſuam ſectionem nempe A θ M, maiorem habeat rationem, quàm ſegmentum Z X X Z habeat ad ſuam ſectionem nempe D Z N.

Demonſtratio.

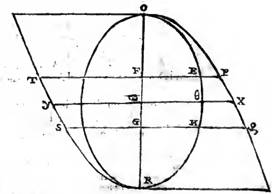
CVm poſita ſit ratio A M ad A K, maiorem habere rationem quàm D N ad D X; fiat vt A M ad A K, ita D N ad D L; erit igitur D L linea minor quàm linea D X, & per præced. ſegmentum θ A K erit ad ſuam ſectionem A θ M, vt ſegmentum Z D L eſt ad ſectionem D Z N. Sed Z D L ſegmentum ad ſectionem D Z N, minorem rationem habet, quàm ſegmentum Z D X habeat ad eandem ſectionem D Z N (cùm linea D L minor ſit lineâ D X, ac propterea ſegmentum Z D L minus ſegmẽto Z D X) Igitur & ſegmentum θ A K ad ſectionem A θ M, minorem rationem habet, quàm ſegmentum Z D X habeat ad ſectionem D Z N, adeoque ſegmentum θ K G θ ad ſuam ſectionem A θ M, maiorem habet rationem, quàm Z X X Z ſegmentum ad ſectionem D Z N. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXV.



POnantur in duobus circulis aut ellipſibus ordinatim ad axem binæ lineæ AB, CD, EF, GH æqualiter à centris diſtantes.

Oporteat binas parabolas ſubalternè conſtituere, ſcilicet VIK, LMN, & OPQ & RST, vt ſegmẽtum IBDK, ductum in ſegmentum BNMD, & ſimiliter ſegmentum PFGQ, ductum in ſegmentum FTSG, æqualia ſolida producant cum partibus cylindricis quarũ baſes ſint ABDC, & EFGH, & altitudines VL & OR.



Conſtructio & demonſtratio.

FIat rectangulo ſub VL & AB æquale rectangulum IBN. Deinde fiat vt recta VB ad VD, ita quadratum IB ad KD quadratum. Denique fiat vt linea LB ad LD lineam, ita quadratum BN ad DM quadratum. erunt [a] puncta V, I, K, LMN ad parabolas. Similiter fiat in altera ellipſi vel circulo OER, nimirum fiat rectangulo ſuper OR & EF, æquale rectangulum PFT, & ſit vt OF linea ad lineam OG, ita quadratum PF ad QG quadratum. Tandem fiat vt linea RF ad RG, ita quadratum FT ad GS quadratum. erunt puncta O, P, Q, R, S, T ad parabolas

[a] *Primâ parab.*

rabolas. Dico factum quod requiritur. ductâ enim quauis Zλ vel XY, quæ æquidiſtet AB vel EF, oſtenſum eſt, [a] rectangula Zμλ & XϖY, æqualia eſſe rectangulis ſub VL & σμ, & OR & ϖθ. Quare eodem diſcurſu quo demonſtrata eſt 51. huius oſtēdemus corpora quæ fiunt ex ductu partium parabolarum inter ſe æquari partibus cylindricis quarum baſes ſunt ABDC & EFGH, & altitudines VL & OR, igitur perfecimus, quod fuerat imperatum.

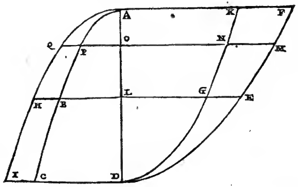
[a] In circulo patet ex demonſtratis 143. ductuum; in ellipſi ex conuerſâ 210. parab.

PROPOSITIO LXXVI.

Datis duabus parabolis ABC, DEF inæqualibus ſubalternè conſtitutis ad communem axem AD.

Oporteat alteram inuenire quæ ducta in ſe ſubalternè idem producat ſeu æquale illi ſolido, quod efficitur per ductum ABC in DEF.

Conſtructio & demonſtratio.



Diuidatur axis AD bifariam in L, & poſitâ ordinatim EH, fiat LG media inter duas EL, LB: denique fiat vt DL linea ad DA lineam, ita LG quadratum ad quadratum AK, fiatque LG æqualis LH & AK, æqualis DI, & per DGK & AHI, parabolæ deſcribantur æquales & ſimiles, vt patet ex ipſa conſtructione; & parabola DGK ducta in AHI, æquale ſolidum exhibebit illi quod exhibet ductus parabolæ DEF in parabolam ABC: quod patebit ſi quæuis MQ ducatur ordinatim ad communem axem AD: nam rectangulum MOP æquale erit rectangulo NOQ, quod ita demonſtrabitur. Ratio rectanguli GLH ad rectangulum ELB, componitur ex iiſdem rationibus, ex quibus eſt compoſita ratio rectanguli NOQ ad rectangulum MOP; nam eſt GL ad LE, vt ON ad OM; & LB ad LH, vt OP ad OQ. ergo cùm rectangulum ELB, æquale ſit rectangulo GLH; etiam rectangulum MOP, æquale erit NOQ rectangulo. quare ſolidum ex ductu DGK, in ſe ſubalternè productum æquatur [b] magnitudini quæ fit ex ductu parabolarum DEF, ABC inter ſe. Igitur perfecimus quod poſtulatum fuit.

[b] 45. Duct.

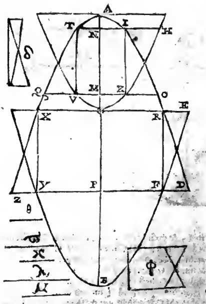
PRO-

PROPOSITIO LXXVII.

SIt axis A B parabolarum A C D, B F E & A I C, H K O ſubalternè conſtitutarum: ſumptis deinde A N, O M inter ſe æqualibus & ſimiliter A O, B P, ita vt N M ſit æqualis O P, ponantur ordinatim N I H, M K C & O E, P D.

Oporteat autem rationem exhibere quæ eſt inter corpora quæ oriuntur ex ſubalterno ductu I C K in H I K & ex ductu R D F in E R F, vel inter ſolida quæ fiunt ex ductu ſubalterno planorum I T Q K in H T V K, & R X Z F in E F Y X.

Conſtructio & demonſtratio.



a Per 62. huius.

DEmonſtratum eſt a quod proportio quę eſt inter rationes ſolidorum quæ fiunt ex ductu I C K in ſe, & ex ductu R D F in ſeipſum, & ex ductu plani R F Z X in ſe, & I K Q T in ſeipſum, eadem ſit eum proportione quæ reperitur inter rationes corporum quæ fiunt ex ductu ſubalterno eorundem planorum. Igitur permutando etiam proportio quæ eſt inter rationem ſolidi ex ductu I C K in ſe ad ſolidū ex ductu R D F in ſe, & rationem ſolidi quod naſcitur ex ductu ſubalterno plani I C K in I K H, ad ſolidum quod fit ex ductu ſubalterno plani R D F in E R F, eadem eſt eum proportione quę exiſtit inter rationes corporum quæ naſcuntur ex ductu F R X Z in ſe, & I T Q K in ſe, & rationem ſolidorum quę fiunt ſub iiſdem planis ſubalternè ductis in ſe. Igitur ſi proportio rationis inter I C K in ſe ductum, & R D F in ſe ductum ad rationem inter R F Z X, in ſe ductum, & I T Q K, ductum in ſe eſt vt proportio rationum λ μ & ϖ κ, etiam proportio quæ eſt inter rationes corporum quæ oriuntur ex iiſdem planis in ſe ſubalternè ductis eadem erit eum proportione λμ & ϖ κ, quare etiam proportio inter rationes corporum ex ductu I C K in ſe, & D R F in ſe ad rationem ſolidorum ex ductu ſubalterno eorundem ortorum, eadem erit eum proportione quæ eſt inter rationes corporum quæ gignuntur ex ductu R X Z in ſe, & I T Q in ſe ad rationem corporum quæ oriuntur ex ductu ſubalterno eorundem. Ac proinde vt eſt proportio rationis inter I K C, ductum in ſe ſubalternè & R F D ſubalternè ductum ad rationem I K C in ſe ducti ad R F D ductum in ſe: ita eſt proportio rationis inter F R X Z ductum in ſe ſubalternè, & K I T Q ſubalternè in ſe ductum ad rationē

F R X Z,

FRXZ, ducris in ſe ad ITQ ductum in ſe. Fiat igitur vt RFD ductum in ſe ad IKC, ductum in ſe, ita RFD ductũ in ſe ſubalternè ad δ, & fiat vt ITQ, ductum in ſe ad FRXZ ductum in ſe, ita ITQ, in ſe ſubalternè ductum ad ſolidum ϕ. erit itaque vt ſolidum ex ductu CIK, in ſe ſubalternè ad δ, ita ſolidum ex ductu ſubalterno FRXZ ad ϕ ac proinde cùm hæ magnitudines priùs ſint reductæ ad cylindricas quantitates illis æquales, etiam proportionem rationum exhibuimus, quæ ſunt in illas ipſas magnitudines cylindricas, quod ſufficit vt ex communis Geometriæ pri[...]pijs eædem partes cylindricæ ad parallelepipeda illis æqualia reduci poſſint, præmiſimus enim omnia quæ ad hoc ipſum neceſſaria ſunt, vt pleniùs in quartâ Quadraturâ cognoſci poterit.

TERTIA CIRCVLI QVADRATVRA.

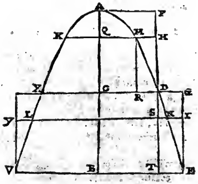
PROPOSITIO LXXVIII.

Sit parabolę axis AB bifariam diuiſus in C, erectiſq; ad eundem ordinatim CD, BE, compleantur rectangula DFA, EGC: diuiſis deinde FD, GE proportionaliter in H & I, ponantur HK, & IL quæ æquidiſtent ordinatim conſtitutis ad axem.

Dico primò, vt AQ ad QC lineam ita eſſe quadratum MQ ad rectangulum MHK.

Dico ſecundò, vt eſt linea DS ad ST, ita eſſe rectangulum NSL ad NIL rectangulum.

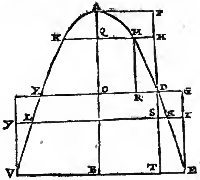
Demonſtratio.



VT eſt AQ ad AC, ita eſt [a] quadratum MQ ad DC, hoc eſt HQ quadratum, eſt autem HQ. quadratum ęquale quadrato MQ. vnà cum rectangulo MHK; igitur MQ quadratum ad quadratum MQ vnà cum rectangulo MHK eſt vt AQ ad AC, & diuidendo vt AQ linea ad QC lineam, ita eſt quadratum MQ ad rectangulum MHK, quod erat primum.

[a] *Per prima[m] parabol.*

Secundum quoque ſic expedietur: ex E ducatur EV ordinatim ad axem, erigaturque



que ex V, linea VY parallela EG, occurrens IL productæ in Y. Vt DS ad DT, ita rectangulum NSL ad ETV, hoc eſt ISY per ea quæ de parabola[a] præmiſimus. rectangulum LIN æquatur rectangulis LSNI, & SINI addatur commune LSN, erit LIN cum LSN æquale his tribus LSNI, SINI, LSN. ſed SINI æquatur YLSI, ergo LIN cum LSN, æquatur LSNI, YLSI, LSN. ſed hæc tria conficiunt rectangulum YSI ſiue ISY, nam duo LSNI, LSN faciunt rectangulum LSI, cui ſi addis YLSI, conflatur rectangulum YSI. ergo YSI æquatur LSN, cum LIN. rurſus igitur diuidendo vt DS ad ST, ita rectangulum LSN ad rectangulum LIN. Quod erat propoſitum.

[a] Per 44. parab.

PROPOSITIO LXXIX.

Iſdem poſitis:
Dico rectangula MHK, NIL eſſe inter ſe æqualia.

Demonſtratio habetur lib. de Parabola propoſ. 45.

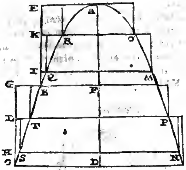
PROPOSITIO LXXX.

Parabolam ABC cuius axis AD, contingat AE in vertice A: ſitque BF ordinatim ad axem poſita diuidens axem AD bifariam in F, eductâque DC quæ æquidiſtet FB, ponantur diametris parallelæ CG, BE, formantes cum AE, FG, rectangula GFD, EAF. factis deinde CH, BI inter ſe æqualibus reſiduiſque HG, IE bifariam in L & K diuiſis, poſitis quoque HN, LP, & IM, KO quæ æquidiſtent ordinatim conſtitutis ad axem, formentur rectangula ER, KQ, GT, LS & EO, KM, GP, LN.

Dico rectangulum ER ad GT rectangulum, eandem habere proportionem quam GP rectangulum ad rectangulum EO.

Demon-

Demonſtratio.



QVonlam EB, GC ſunt æquales lineæ axi æquidiſtantes ex conſtructione, ſicut etiam EL & GH; igitur [a] rectangulo RKO æquatur TLP rectangulum. [a 45 de parab.] vnde vt eſt KR ad LT, ita eſt LP ad KO. ſed rectangulum ER eſt ad rectangulum GT, & rectangulum GP ad EO, vt ſunt eorum baſes, cùm altitudines communes vel æquales ſint ex conſtructione: Igitur manifeſtum eſt rectangulum ER ad GT, eam habere proportionem quam habet GP rectangulum ad rectangulum EO. Quod fuit demonſtrandum.

Corollarium.

HInc liquidò conſtat etiam rectangulum KQ ad LS rectangulum, eam obtinere proportionem quam rectangulum LN ad KM rectangulum, diſcurſus enim idem eſt cum priore quo hoc demonſtrari debet: quod ſimiliter intelligendum eſt de quauis ſubdiuiſione linearum EB, GC, modò reliqua ſeruentur quę in conſtructione ſunt adhibita.

PROPOSITIO LXXXI.

IIſdem manentibus:

Dico parallelepipedum quod oritur ex rectangulo ER in ſe ducto, ad illud quod gignitur ex GT ducto in ſe, eandem habere rationem, quā habet ſolidum ex ductu plani GP in ſe, ad illud quod fit ex ductu ſuperficiei EO in ſeipſam.

Demonſtratio.

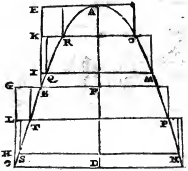
PArallelepipedum ex ductu ER rectanguli in ſeipſum, ad parallelepipedum ex ductu rectanguli GT in ſe, eam habet rationem quę inter baſes reperitur, cùm altitudines ex conſtr. ſint æquales. Sed eadem quoque reperitur proportio inter baſes parallelepipedorum quę fiunt ex ductu plani GP in ſe, & ex ductu plani [a] EO in ſeipſum. Igitur patet parallelepipedum ex plano ER, ducto in ſe ad ſolidum ex GT [a Per 80. huius.] in ſe ducto emergens, eandem habere proportionem, quam ſolidum ex ductu plani GP in ſe, ad ſolidum ex EO in ſeipſum ducto reſultans.

PROPOSITIO LXXXII.

Iiſdem remanentibus:

Dico proportionem quæ eſt inter rationem corporis ex ductu E R in ſe, ad corpus ex ductu G T in ſe, & rationem corporis ex ductu G P in ſe, ad corpus quod fit ex E O in ſe ducto, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationem corporis ex ductu plani K Q in ſe, ad corpus ex ducta L S in ſe, & rationem corporis orti ex ductu plani L N in ſe ad corpus ortum ex plano K M in ſe ducto.

Demonſtratio.



a Prop. 81. huius.

OStenſum eſt [a] quod ratio quæ eſt inter corpora orta ex ductu E R in ſe, & G T in ſe, eadem ſit cum ratione quæ eſt inter corpora orta ex ductu G P in ſe & plani E O in ſeipſum. Item quod ratio quæ eſt inter corpora nata ex ductu K Q in ſe, & L S in ſe, eadem ſit cum ratione quæ eſt inter corpora orta ex ductu plani L N in ſe, & K M plani in ſe ducti, igitur cùm vtrobique ſit ratio æqualitatis, manifeſtum eſt [b] quod in propoſitione fuerat aſſertum.

b Per 58. de proport.

PROPOSITIO LXXXIII.

Iiſdem poſitis:

Dico proportionem quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu E R in ſe, ad corpus ortum ex ductu K Q in ſe, & rationem corporis orti ex ductu plani G T in ſe ad L S in ſe ductum, eandem eſſe cum proportione quę eſt inter rationem corporis orti ex ductu G P in ſe, ad corpus ortum ex ductu plani L N in ſe, & rationem corporis orti ex ductu plani E O in ſe, ad corpus quod fit ex ductu plani K M in ſeipſum.

Demonſtratio.

c Prop. 82. huius.

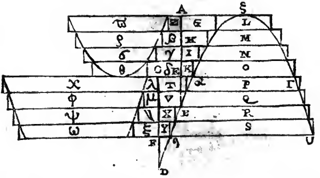
DOcuimus [c] proportionem quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu E R in ſe, ad corpus ex ductu G T in ſe, & rationem corporis ex ductu G P in ſe, ad corpus quod fit ex E O in ſe ducto, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationem corporis ex ductu plani K Q in ſe, ad corpus ex ductu L S in ſe, & rationem corporis

poris orti ex ductu plani L N in ſe ad corpus ortum ex plano K M in ſe ducto. ergo permutando a proportio quæ eſt inter rationem corporis ex ductu E R in ſe ad G T in ſe, & rationem corporis orti ex ductu K Q in ſe ad L S in ſe, eadem eſt eum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu G P in ſe ad E O in ſe, & rationem corporis L N in ſe ad K M in ſe. quare b etiam proportio quę eſt inter rationem corporis orti ex ductu E R in ſe, ad corpus ortum ex ductu Q K in ſe, & rationē corporis orti ex ductu plani G T in ſe, & L S in ſeipſum, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu G P in ſe, ad corpus ortum ex ductu plani L N in ſe, & rationem corporis orti ex ductu plani E O in ſe, ad corpus quod fit ex ductu plani K M in ſeipſum. Quod erat demonſtrandum.

a Per 44. de propor.

b Per 59. de proporti.

Figura vniuerſalis pro ſequentibus propoſitionibus.



SInt A B, C D axi parabolæ æquidiſtantes, inter ſe æquales, à quibus demptæ æquales A E, C F; diuiſæ ſint quadrifariam; & per diuiſionum puncta poſitæ ſint ordinatim ad axem; perficiantur denique rectangula G, H, I, K, & L, M, N, O. Deinde rectangula T, V, X, Y, & P, Q, R, S. His ita peractis, ponantur hæ figuræ ſubalternè, ſcilicet figurę A E Γ ζ, fiat ſimilis & æqualis A E θ ϖ, & ſubalternè conſtituta. Idemque fiat de figurâ C F ω κ, quæ ſubalternè poſita ſit cum figura C F υ Γ, formenturque productis parallelis rectangula Z, β, γ, δ; ϖ, ρ, σ, θ, & λ, μ, ν, ξ; κ, φ, ψ, ω.

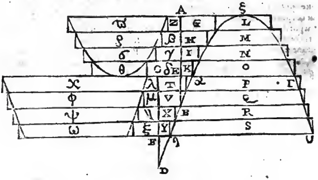
Figuræ particulares.

VT clarius in ſequentibus procedamus, transferantur rectangula quæ in ſchemate vniuerſali ſunt inter parabolam D B α ζ, & parabolas ſubalternè poſitas in ſchema particulare primum, & corpora orta ex ductu rectanguli G in ſe, H in ſe, I in ſe, K in ſe, item corpora nata ex ductu rectangulorum T, V, X, Y, in ſeipſa, vocentur corpora G, H, I, K: item T, V, X, Y. Item corpora quæ naſcentur ex ductu rectanguli G in Z rectangulum, rectanguli H in β, rectanguli I in γ, & K in δ; item ea quæ exſurgunt ex ductu rectanguli T in λ, rectanguli V in μ, rectanguli X in ν, & rectanguli Y in ξ, vocentur ſine addito corpora G Z, H β, I γ, K δ & ſic de cæteris.

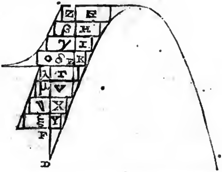
Vide particulares figuras paginæ ſequentis.

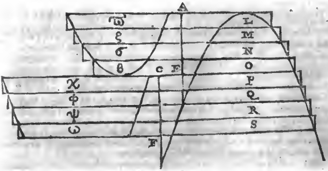
In ſecūdum verò ſchema referantur rectangula L G, M H, N I, O K, item P T, Q V, R X, S Y: ac rectangulo quidem L G in ſchemate vniuerſali, æquale ſit rectangulum L in ſecundo particulari; rectangulo verò M H, N I, &c. æqualia ſint in ſecundo ſchemate rectangula M, N, O, item P, Q, R, S rectangulis, P T, Q V, &c. in primo ſchemate. Denique rectangulis ϖ Z, ρ β, σ γ, θ δ, κ λ, φ μ, ψ ν, ω ξ, æqualia ponantur in ſecundo ſchemate rectangula ϖ, ρ, σ, θ, & κ, φ, ψ, ω. Ac corpora quidem quæ naſcentur ex ductu rectanguli L in ſe, M in ſe, N in ſe, O in ſe, item ex ductu rectanguli P in ſe, Q in ſe,

Figura vniuerſalis pro ſequentibus propoſitionibus.



Figuræ particulares.





R in ſc, S in ſe, vocentur corpora L,M,N,O, &c. Item ea quæ naſcentur in eodem ſchemate ex ductu rectanguli L in ϖ; item ex M in ϱ, & N in σ, ex O in θ; Item ea quę exſurgent ex ductu P in κ, Q in φ, &c. vocentur ſine addito corpora L ϖ, M ϱ, N σ, O θ; P κ, Q φ, R ψ, S ω.

PROPOSITIO LXXXIV.

Illis poſitis:

Dico quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad T λ, & P κ ad L ϖ; eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes corporum H β ad V μ, & Q φ ad M ϱ.

Demonſtratiò.

Nam ratio corporis G Z ad T λ, compoſita eſt ex ratione rectanguli G ad T, & rectanguli Z ad λ; item ratio corporis P κ ad L ϖ, compoſita eſt ex ijſdem rationibus: componitur enim ex ratione rectanguli P ad L, hoc eſt [a] ratione rectanguli G ad T; & ex ratione rectanguli κ ad ϖ, hoc eſt ratione [b] rectanguli Z ad λ. Eadem igitur eſt ratio corporis G Z ad T λ, & ratio corporis P κ ad L ϖ. Eodem diſcurſu patet rationem quæ eſt inter corpora H β, & V μ, eandem eſſe cum ratione quæ eſt inter corpora Q φ & M ϱ. Nam rurſus ratio corporis H β ad V μ, compoſita eſt ex ratione rectanguli H ad V, & rectanguli β ad μ: ex ijſdem autem etiam componitur ratio corporis Q φ, ad M ϱ: componitur enim ex ratione rectanguli Q ad M, hoc eſt [c] ratione rectanguli H ad V, & ex ratione rectanguli φ ad ϱ, hoc eſt β ad μ. Quare cùm rationes vtrobique eædem ſint, patet quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad T λ, & P κ ad L ϖ; eadem ſit cum proportione quę eſt inter rationes corporum H β ad V μ, & Q φ ad M ϱ. Quod erat demonſtrandum.

a per 10. huius.
b per eand.
c per eand.

Corollarium.

Quod de proportionibus harum rationum dictum eſt, Id etiam de quibuſuis proportionibus corporum hîc diuiſorum intelligi volumus, modò corpora ſumantur prout hîc ſumpta ſunt: nimirum aſſerimus quod proportio quę eſt inter rationes corporum H β ad V μ, & Q φ ad M ϱ, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes corporum I γ ad X ν, & R ψ ad N σ, item eadem cum proportione quæ eſt inter rationes corporum K δ ad Y ξ, & S ω ad O θ, cùm in his ſit eadem demonſtratio. Idemq; in ſequenti obſeruandum.

PROPOSITIO LXXXV.

Iiſdem poſitis:

Dico quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β ad V μ, eadem ſit cum proportione quę eſt inter rationes corporum P κ ad L ϖ, & Q φ ad M ϱ.

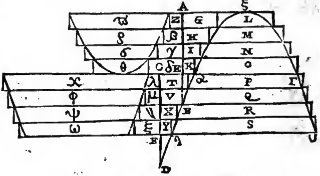
Demonſtratiò.

Demonſtratum enim eſt præcedenti propoſitione quod ratio corporum G Z & T λ, ſit ad rationem corporum P κ & L ϖ, vt ratio corporum H β & V μ, eſt ad rationem corporum Q φ & M ϱ. igitur [d] permutando ratio corporum G Z & T λ, ad rationem corporum H β & V μ, eſt vt ratio corporum P κ & L ϖ ad rationem corporum Q φ ad M ϱ, hoc eſt proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β ad V μ; eadem erit cum proportione quę inuenitur inter rationes corporum P κ ad L ϖ, & Q φ ad M ϱ. Quod erat demonſtrandum.

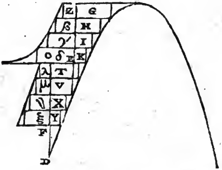
d per 16. propor.

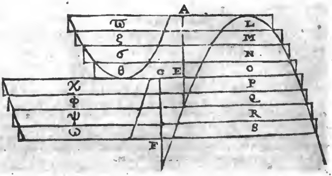
Corol-

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.





Digitized by Google

Corollarium.

HInc collige [a] quod proportio quę eſt inter rationes corporum G Z ad H β, & T λ ad V μ, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes corporum P κ ad Q ϕ & L ϖ ad M ϱ. a Per 19. de proporti.

PROPOSITIO LXXXVI.

IIſdem poſitis:

Dico quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & H ad V, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β ad V μ, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum P κ ad L ϖ, & Q ϕ ad M ϱ.

Demonſtratio.

OStenſum eſt [b] quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & H ad V, eadem ſit cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M. Similiter demonſtratum eſt [c] quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β ad V μ, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes corporũ P κ & L ϖ, ad Q ϕ ad M ϱ. Igitur cùm proportiones quæ comparantur inter ſe æquales ſint, conſtat quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & H ad V, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β. ad V μ, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum P κ ad L ϖ, & Q ϕ ad M ϱ. Quod erat demonſtrandum.

b Per demonſtrata 85 huius. c Per 85. huius.

Corollarium primum.

SIc rectè etiam inferes, quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad H, T ad V, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum P ad Q & L ad M, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad H β, & T λ ad V μ, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporũ P κ ad Q ϕ & L ϖ ad M ϱ. nam [d] rurſus proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad H, & T ad V eadem eſt cum proportione quę eſt inter rationes corporum P ad Q & L ad M. Ex altera verò parte cùm oſtenſum ſit, [e] quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad H β, & T λ ad V μ, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes corporum P κ ad Q ϕ, & L ϖ ad M ϱ, conſtat igitur ſicut priùs veritas propoſitionis, quam etiam ad duas ſequentes extendi volumus.

d Per 85. huius. e Per cor. 85. huius.

Corollarium ſecundum.

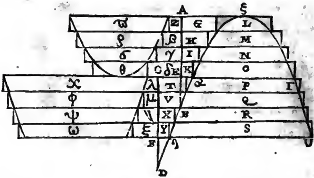
EOdem modo oſtendetur quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & P ad L, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & Q ad M, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes, corporum G Z ad T λ, & P κ, ad L ϖ ad proportionem quæ eſt inter rationes H β ad V μ, & Q ϕ ad M ϱ. ſcilicet per propoſitionem iam poſitam, rationeſque permutando per 44. de proport.

PROPOSITIO LXXXVII.

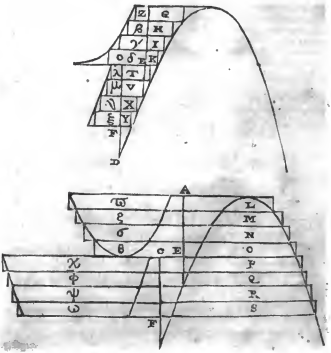
IIſdem poſitis:

Rurſus dico quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & I ad X ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & R ad N, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporum G Z ad T λ,

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.



Digitized by Google

& Iγ ad Xν, eſt ad proportionem quę eſt inter rationes corporum Pκ ad Lϖ, & Rψ ad Nσ.

Demonſtratio.

Demonſtratum enim eſt [a] quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & I ad X, ſit eadem cũ proportione quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & R ad N. Item demonſtratum [b] eſt quod proportio quæ eſt inter rationes corporum GZ ad Tλ, & Iγ ad Xν, ſit eadem cum proportione quæ eſt inter rationes corporum Pκ ad Lϖ, & Rψ ad Nσ. Igitur cùm proportiones quæ inter ſe comparantur eædem ſint, [c] conſtat veritas propoſitionis. [a] 85. huius. [b] 85. huius. [c] 43. Prop.

PROPOSITIO LXXXVIII.

Iiſdem poſitis:

Iterum dico quod proportio quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & I ad X, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Q ad M, & R ad N, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporum Hβ ad Vμ, & Iγ ad Xν, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Qφ ad Mϱ, & Rψ ad Nσ.

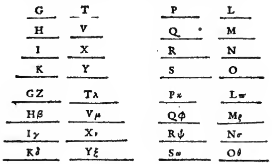
Demonſtratio.

Rurſus enim [d] proportio quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & I ad X, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum Q ad M, & R ad N. Item [e] proportio quæ eſt inter rationes corporum Hβ ad Vμ, & Iγ ad Xν, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum Qφ ad Mϱ, & Rψ ad Nσ. Itaque cùm iterum proportiones quę inter ſe comparantur eædem ſint, [f] conſtat veritas propoſitionis. [d] Per demonſtrata 85 huius. [e] 85. huius. [f] 41. Propoſit.

Scholion.

Ne longior ſim in iiſdem demonſtrationibus ſemper repetendis, idem intelligi volumus de quibuſuis aliis ſubdiuiſionibus, modò corpora eo modo ſumantur prout hic ſumpta ſunt.

PROPOSITIO LXXXIX.

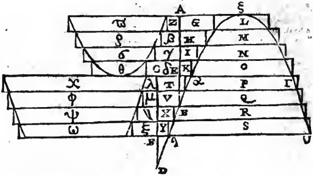


Iiſdem poſitis:

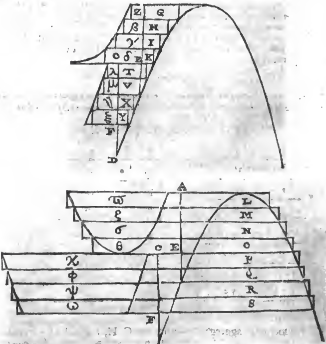
Dico quod ratio aggregati quantitatum G, H, I, K ad aggregatum

 quanti-

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.



quantitatum T,V,X,Y ſit ad rationem aggregati quantitatum P,Q,R,S, ad aggregatum quantitatũ L,M,N,O, vt ratio aggregati corporum GZ, Hβ, Iγ, Kδ ad aggregatum corporum Tλ, Vμ, Xν, Yξ eſt ad rationem aggregati corporum Pϰ, Qφ, Rψ, Sω ad aggregatum corporum Lϖ, Mϱ, Nσ, Oθ.

G	T	P	L
H	V	Q	M
I	X	R	N
K	Y	S	O
GZ	Tλ	Pϰ	Lϖ
Hβ	Vμ	Qφ	Mϱ
Iγ	Xν	Rψ	Nσ
Kδ	Yξ	Sω	Oθ

Demonſtratio.

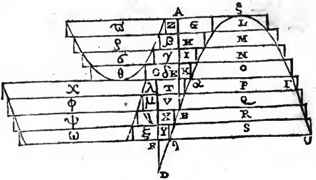
DVplici rurſus viâ propoſitionem hanc demonſtrabimus, vti & in quadraturâ ſecundâ factum. Primum viâ Archimedeâ, per prop. 2. de Conoid. Deinde per propoſitionem noſtram 54. Lemmaticam huius lib.

Primâ igitur viâ ſic demonſtro. Proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & H ad V, eadem a eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum P ad L, (a Per 84. huius.) & Q ad M. Item proportio quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & I ad X, eadem b eſt cum proportione quę eſt inter rationes corporũ Q ad M & R ad N. Igitur (b Per eand.) proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & H ad V, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, vt proportio quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & I ad X, eſt ad proportionem quę eſt inter rationes corporum Q ad M, & R ad N, cùm vtrobique ſit proportio æqualitatis ad proportionẽ æqualitatis. Igitur c permutando proportio quę eſt inter rationes corporum G ad T, & H ad V, eſt ad proportionem quę eſt inter rationes corporum H ad V, & I ad X, (c 44. De proport.) vt proportio quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, eſt ad proportionẽ quæ eſt inter rationes corporum Q ad M, & R ad N. Similimodo proportio quę eſt inter rationes corporum H ad V, & I ad X, oſtendetur eſſe ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum I ad X, & K ad Y, vt proportio quę eſt inter rationes corporum Q ad M & R ad N, eſt ad proportionem quę eſt inter rationes corporũ R ad N, & S ad O. Atque hoc modo primã Archimedeę conſtructionis partem abſoluimus.

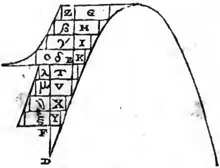
Prętereà oſtenſum eſt d quod proportio, quæ eſt inter rationes corporum G ad T, (d Per 86. huius.) & H ad V, ſit ad proportionem, quæ eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, vt proportio, quæ eſt inter rationes corporum GZ ad Tλ, & Hβ, ad Vμ, eſt ad proportionem, quæ eſt inter rationes corporum Pϰ ad Lϖ & Qφ ad Mϱ. Igitur e permutando proportio, quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & H ad V, eſt ad (e Per 44. proportion.) proportionem, quæ eſt inter rationes corporum GZ ad Tλ & Hβ ad Vμ, vt proportio quę eſt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Pϰ ad Lϖ, & Qφ ad Mϱ.

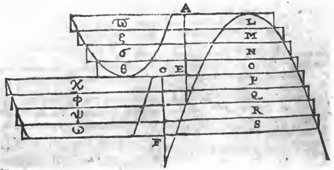
Eodem prorſus modo oſtenderur quod proportio, quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & I ad X, ſit ad proportionem, quæ eſt inter rationes corporum Hβ ad Vμ, & Iγ ad Xν, vt proportio, quæ eſt inter rationes corporum Q ad M, & R ad N, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Qφ ad Mϱ, & Rψ ad Nσ. Denique proportio, quæ eſt inter rationes corporum I ad X, & K ad Y, oſten-

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.





G	T	P	L
H	V	Q	M
I	X	R	N
K	Y	S	O
GZ	Tλ	Pκ	Lϖ
Hβ	Vμ	QΦ	Mϱ
Iγ	Xν	Rψ	Nσ
Kδ	Yξ	Sω	Oθ

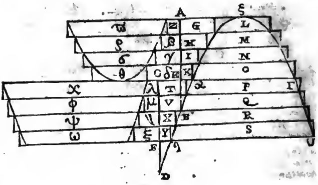
detur eſſe ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Iγ ad Xν, & Kδ ad Yξ, vt proportio, quę eſt inter rationes corporum R ad N, & S ad O, eſt ad proportionem, quæ eſt inter rationes corporum Rψ ad Nσ, & Sω ad Oθ.

Itaque quemadmodum Archimedes infert de quantitatibus eo modo diſpoſitis, quo nos proportiones rationum diſpoſitas oſtendimus, ita & nos de proportionibus inferimus, nempe quod proportiones omnes ſimul ſumptæ, quæ ſunt inter rationes corporum G ad T, & H ad V, item rationes corporum H ad V, & I ad X, item I ad X, & K ad Y, ſint ad proportiones omnes ſimul ſumptas quæ ſunt inter rationes corporum P ad L, & Q ad M, item inter rationes corporum Q ad M, & R ad N, item R ad N, & S ad O, vt proportiones omnes ſimul ſumptæ quæ ſunt inter rationes corporum GZ ad Tλ, & Hβ ad Vμ, item Hβ ad Vμ, & Iγ ad Xν, item Iγ ad Xν, & Kδ ad Yξ, ſunt ad proportiones omnes ſimul ſumptas, quæ ſunt inter rationes corporum Pκ ad Lϖ, & QΦ ad Mϱ, item QΦ ad Mϱ, & Rψ ad Nσ, item Rψ ad Nσ, & Sω ad Oθ. Et cùm mediæ proportiones ſingulorum aggregatorum ſint etiam inter ſe proportionales, ſi eæ omiſſæ intelligantur, manebit aggregatum duarum proportionum vt ad ſecundum aggregatum duarum proportionum, tertium aggregatum duarum proportionum eſt ad aggregatum quartum duarum itidem proportionum. Sed proportiones ſingulas binę rationes conſtituunt, nempe proportionem inter rationes G ad T, & H ad V, conſtituunt rationes corporum G ad T, & H ad V, & ita de reliquis: itaque quod de proportionibus intulimus, illud ipſum de rationibus inferre licebit, ſcilicet rationes omnes G ad T, H ad V, I ad X, K ad Y, eſſe ad rationes omnes corporum P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O, vt rationes corporũ GZ ad Tλ, Hβ ad Vμ, Iγ ad Xν, Kδ ad Yξ, ſunt ad omnes rationes corporũ Pκ ad Lϖ, QΦ ad Mϱ, Rψ ad Nσ, Sω ad Oθ. Sed omnes rationes corporũ G ad T, H ad V, I ad X, K ad Y, ita ſunt conſtitutæ vt corpora G, H, I, K ſint termini antecedentes, corpora vero T, V, X, Y ſint termini conſequentes, item rationes P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O, ita ſunt conſtitutæ vt corpora P, Q, R, S ſint antecedentes termini, corpora verò L, M, N, O termini conſequentes. Idem autem in alijs rationibus obſeruatum eſt vt ſemper corpora GZ, Hβ, Iγ, Kδ antecedentium vices, corpora autem Tλ, Vμ, Xν, Yξ conſequentium locum obtineant, vti & in vltimo aggregato rationum obſeruatum eſt, vt corpora Pκ, QΦ, Rψ, Sω antecedentes ſint termini, corpora autem Lϖ, Mϱ, Nσ, Oθ ſint termini conſequentes. Itaque ratio aggregati corporum G, H, I, K, ad aggregatum corporum T, V, X, Y, eſt ad rationem aggregati corporum P, Q, R, S ad aggregata corpora L, M, N, O, vt ratio aggregatorum corporum GZ, Hβ, Iγ, Kδ, ad aggregata corpora Tλ, Vμ, Xν, Yξ eſt ad rationem aggregatorum corporum Pκ, QΦ, Rψ, Sω, ad aggregata corpora Lϖ, Mϱ, Nσ, Oθ. Quod erat demonſtrandum.

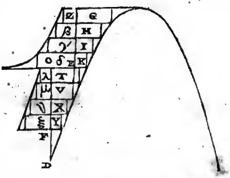
Faciliori

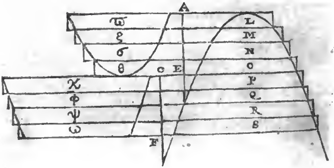
Digitized by Google

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.





G	T	P	L
H	V	Q	M
I	X	R	N
K	Y	S	O
GZ	Tλ	Pκ	Lϖ
Hβ	Vμ	Qφ	Mϱ
Iγ	Xν	Rψ	Nσ
Kδ	Yξ	Sω	Oθ

Facilıori diſcurſu idem demonſtratur.

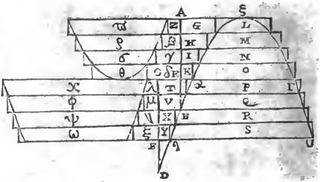
RAtio corporis G ad T, cadem[a] eſt cum ratione corporis P ad L. item ratio corporis H ad V, eadem eſt cum rattooe corporis Q ad M : igitur[b] permutaodo ratio corporum G ad T, eſt ad rationem corporum H ad V, vt eſt ratio corporum P ad L, ad rationem corporum Q ad M. eodem modo oſteodetur quod ratio corporum H ad V, ſit ad rationem corporum I ad X, vti ratio corporum Q ad M, eſt ad rationem corporum R ad N. denique ratio corporum I ad X, eſſe oſtendetur ad rationem corporum K ad Y, vti ratiò corporum R ad N, eſt ad rationem corporum S ad O. Atque ſic primam conſtructionis Archimedeæ partem abſoluimus. a Per 81. huius. b Per 44. propert.

Iam verò cum oitenſum ſit[c] quod ratio corporis G Z ad T λ eadem ſit cum ratione corporum P κ ad L ϖ, etat autem ratio corpotum G ad T, eadem cum ratione corporum P ad L. ergo[d] permutando iterum erit ratio corporum G ad T, ad rationem cqrporum G Z ad T λ, vt ratio corporum P ad L, eſt ad rationem corporum P κ ad L ϖ. Eodem modo demonſtrabitur quod ratio corporum H ad V, ſit ad rationem corporum H β ad V μ, vt ratio corporum Q ad M, eſt ad rationem corporum Q φ ad M ϱ; item quod ratio corporum I ad X, ſit ad rationem corporum I γ ad X ν, vt ratio corporum R ad N, eſt ad rationem corporum R ψ ad N σ. Denique inferetur eodem diſcurſu quod ratio corporum K ad Y, ſit ad ratiooem corpotum K δ ad Y ξ, vt ratio corporum S ad O, eſt ad ratiooem corporum S ω ad O θ. c Per demonſtrata prop. 84. huius. d Per 44. propert.

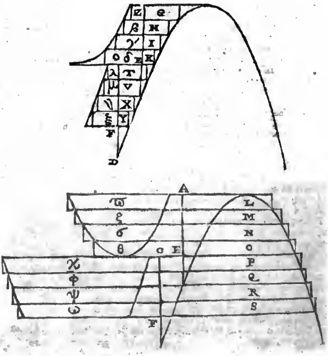
Igitur cùm rationes hæ omnes eo modo diſpoſitæ ſint vti quantitates apud Archimedem, vti ipſe rectè infert omnes quantitates aggregati primi ad omnes ſecundi eſſe, vt omnes tertij aggregati ſunt ad omnes quarti; ita & nos inferimus omnes rationes corporis G ad T, H ad V, I ad X, K ad Y, quæ primum aggregatum rationum conſtiruunt, eſſe ad omnes rationes corporum P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O, quæ ſecundùm aggregatum faciunt, vt omnes rationes corporum G Z ad T λ, H β ad V μ, I γ ad X ν, K δ ad Y ξ, quæ tertium aggregatum faciunt ad eas omnes quæ quartum, nempe ad omnes rationes P κ ad L ϖ, Q φ ad M ϱ, R ψ ad N σ, S ω ad O θ. Itaque cùm ruſus omnes rationes G ad T, H ad V, I ad X, K ad Y, ita conſtitutæ ſint vt corpora G, H, I, K ſint termini antecedentes, corpora verò T, V, X, Y ſiot termini cooſequentes; item rationes P ad L, Q ad M, R ad N, S ad O, ita ſint conſtitutæ vt corpora P, Q, R, S ſint antecedentes termini, corpora verò L, M, N, O ſint termini conſequentes, & ita de reliquis ergo ratio aggregati antecedentium terminorum, hoc eſt corporum G, H, I, K, ad aggregatum termiuorum conſequentium, hoc eſt corporum T, V, X, Y, eſt ad rationem aggregati corporum P, Q, R, L, ad aggregarum corpotum L, M, N, O, vt ratio aggregati corporum G Z, H β, I γ, K δ ad aggregatum corporum T λ, V μ, X ν, Y ξ, eſt ad rationem aggregati corporum P κ, Q φ, R ψ, S ω, ad aggregatum corporum L ϖ, M ϱ, N σ, O θ. Quod erat demonſtrandum.

KKK Aliter

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.



G	T	P	L
H	V	Q	M
I	X	R	N
K	Y	S	O
GZ	Tλ	Pκ	Lϖ
Hβ	Vμ	Qφ	Mϱ
Iγ	Xν	Rψ	Nσ
Kδ	Yξ	Sω	Oθ

Aliter demonſtratur viâ ſecundâ.

ADdemus & alteram ex Lemmatica propoſitione 54. huius quâ ſimiliter inferemus eandem concluſionem quam priore diſcurſu intulimus.

Proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & P ad L, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & Q ad M, ſunt enim[a] eædem rationes. Præterea proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & P ad L, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum I ad X, & R ad N; vlterius proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & P ad L, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum K ad Y, & S ad O: atque huc vſque proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & P ad L, comparata eſt cum omnibus alijs cum quibus conferri poteſt, ita vt ſemper antecedentis rationem obtineat. Vt igitur diſcurſum proſequamur, aſſumemus proximè ſequentes terminos, qui vicem antecedentis obtineant. Proportio itaque quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & Q ad M, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum I ad X, & R ad N, item eadem cum proportione quæ eſt inter rationes K ad Y, & S ad O, denique eadem cum proportione quæ eſt inter rationes G ad T, & P ad L, per ea quę antè diximus, atque ita contulimus proportionem quę eſt inter rationes corporum H ad V, & Q ad M, cum reliquis proportionibus, dando illi ſemper locum antecedentis. Reſtat igitur vt idipſum præſtemus de alijs quæ remanent.

[a] Per 82. huius.

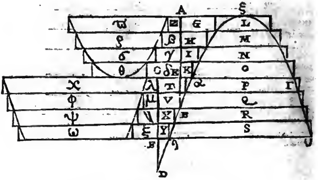
Iterum igitur proportio, quæ eſt inter rationes corporum I ad X, & R ad N, eadem eſt cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum K ad Y, & S ad O: item eadem cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & P ad L, denique eadem cum proportione quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & Q ad M.

Tandem vt hanc partem concludamus, iterum proportio quæ eſt inter rationes corporum K ad Y, & S ad O, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & P ad L: ſimiliter eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum H ad V, & Q ad M: tandem eadem cum proportione quæ eſt inter rationes corporum I ad X, & R ad N.

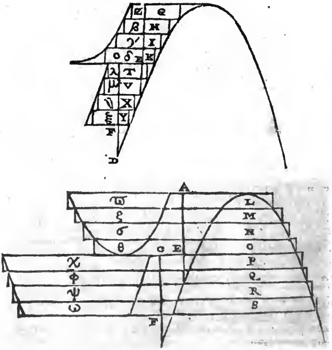
His ita concluſis, infero ex vi Lemmaticæ propoſitionis, quod proportio quæ eſt inter rationes aggregatorum omnium corporum G, H, I, K, ad T, V, X, Y, & rationes aggregatorum omnium P, Q, R, S, ad L, M, N, O eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes partium iam enumeratarum, quæ antecedentium vices obtinebant, & rationes partium quę conſequentium loca ſupplebant.

Quia verò per eundem diſcurſum circa quatuor alia aggregata quorum primum complectitur corpora GZ, Hβ, Iγ, Kδ, ſecundum corpora Tλ, Vμ, Xν, Yξ, tertium Pκ, Qφ, Rψ, Sω; quartum denique corpora Lϖ, Mϱ, Nσ, Oθ, eodem modo argumentari poſſumus, licebit etiam inferre quod proportio quę eſt inter rationes aggre-

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.



Digitized by Google

gati primi ad ſecundum aggregatum, ad rationes aggregati tettij ad aggregatum quartum, ſit eadem cum proportione, quæ eſt inter rationes partium aggregatorum quæ antecedentes conſtituebant, & rationes partium aggregarorum quę conſequentium vices ſupplebant.

Quia verò demonſtratum eſt a quod proportio quæ eſt inter rationes corporum G ad T, & H ad V, ad proportionem quæ eſt inter rationes corpotum P ad L, & Q ad M, ſit vt proportio, quæ eſt inter rationes corporum G Z ad T λ, & H β ad V μ, ad proportionem quę eſt inter rationes corporum, P κ ad L ϖ, & Q φ ad M ϱ, atque ita conſequenter b de reliquis, & hoc quidem in omni ſubdiuiſione diametrorum parabolæ; infero per Corr. Prop. Lemmaticæ ſuprà citatæ, quod proportio quæ eſt inter rationem aggregati corporum G, H, I, K, ad aggregatum corporum T, V, X, Y, & inter rationem aggregati corporum P, Q, R, S, ad aggregatum corporum L, M, N, O, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationem aggregati corporum G Z, H β, I γ, K δ, ad aggregatum corporum T λ, V μ, X ν, Y ξ, & inter rationem aggregati corporum P κ, Q φ, R ψ, S ω, ad aggregarum corporum L ϖ, M ϱ, N σ, O θ. Quod fuit demonſtrandum.

a 86. huius.
b Per 87. & 88. huius.

PROPOSITIO XC.

EAdem manente figurâ vniuerſali propoſitionis 84. huius cum particularibus,

Dico quod rario corpotis orti ex figurâ parabolicâ A E α ζ in ſe ductâ, ad corpus ortũ ex figura parabolica C F η α in ſe ducta ſit ad rationem corporis orri ex figurâ parabolicâ C F υ Γ in ſe ductâ, ad corpus quod exſurgit ex figurâ parabolicâ A E Γ ζ in ſe ductâ, vt ratio corporis ex ductu figuræ A E α ζ in ſe ſubalternè, ad corpus orrum ex ductu figuræ C F η α in ſe ſubalternè, eſt ad rationem corporis orri ex ductu figuræ C F υ Γ in ſe ſubalternè poſitæ, ad corpus ortum ex ductu figuræ A E Γ ζ in ſe ſubalternè.

Demonſtratio.

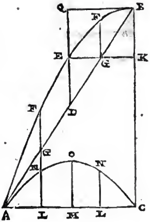
PRæcedenti demonſtratione oſtenſum eſt quod ratio omnium parallelepipedorum G, H, I, K, ad parallelepipeda T, V, X, Y, ſit ad rationem corporum P, Q, R, S, ad corpora L, M, N, O, vt ratio corporum G Z, H β, I γ, K δ ad corpora T λ, V μ, X ν, Y ξ, eſt ad rationem corporum P κ, Q φ, R ψ, S ω, ad corpora L ϖ, M ϱ, N σ, O θ. Er hoc quidem in quauis inſcriptione figurarum per ſubdiuiſionem linearum A E, C F intelligendum eſt ex vi diſcurſus in demonſtratione poſiti. Cùm ergo continuatis ſubdiuiſionibus, auferatur ſemper plus dimidio reſidui corporum illorum, quibus parallelepipeda inſcribuntur, vt demonſtratum eſt d in libro de ductibus: ac proptereà omnia ſimul ſumpta exhauriant corpora quibus inſcribuntur, manifeſtum eſt rationem plani parabolici A E α ζ in ſe ducti, ad planum parabolicum C F η α in ſe ductum, eſſe ad rationem plani parabolici C F υ Γ in ſe ducti, ad corpus ex plano parabolico A E Γ ζ in ſe ducto, vt ratio corporis orti ex ductu plani A E α ζ in ſe ſubalternè, ad corpus ex ductu plani C F η α in ſe ſubalternè ducti, eſt ad rationem plani C F υ Γ in ſe ducti ſubalternè ad planum A E Γ ζ in ſe ſubalternè ductum, cùm hæc ipſa corpora ſint quibus parallelepipeda fuerant inſcripta.

d 41. De duct.

PROPOSITIO XCI.

PArabolæ A E B axis ſit B C, diamerri verò E D, F G, quas ſecet linea B A ducta ex vertice B.

Dico ſegmentum B E A ductum in ſe ſecundùm lineas E D, F G eſſe vngulam parabolicam quæ ad corpus rectilineum ei æquale reducta ſit.



Demonſtratio.

DVcta enim A C ordinatim ad axem, fiant lineis E D, F G æquales lineæ OM, NL ſic vt ſint ad angulos rectos ad A C, erit itaque A N O C [a] parabola, & quidem æqualis parabolę A E B, cùm omnia quadrata OM, N L æqualia ſint quadratis E D, F G, &c. Igitur parabola A E B ducta in ſe per diametros E D, F G æqualis eſt parabolę A O C, ductę in ſe per diametros OM, N L. Intelligatur igitur diameter EDM biſariam diuidere lineas A B, A C: productaque D E ad tangenrem B Q, erit [b] E D æqualis E Q: igitur ſi ex E ducatur ordinatim E K ad axem B C, erit B K æqualis Q E, hoc eſt E D, hoc eſt O M: ſed & linea E K æqualis eſt M C, vel M A, igitur E B K parabola eadem eſt cum parabola A O C; ſed parabola E B K in ſe ducta, [c] reducta eſt ad corpus rectilineum ei æquale, igitur & corpus ortum ex ſuperficie A E B ducta in diametros E D, FG reductum eſt ad corpus rectilineum ei æquale. Quod erat demonſtrandum.

[a] Per 330. de parab.

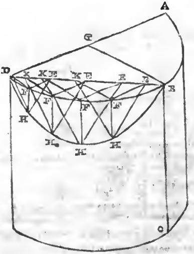
[b] Per 17. parab.

[c] Per 99. in cylind.

PROPOSITIO XCII.

CYlindri parabolici A B C D, baſi inſcribatur maximum triangulum A B D, cuius diameter B G, ad quam ordinatim ponantur F E. Fiant verò rectis F E æquales F H in cylindri ſuperficie & iungantur E H.

Dico puncta B H D eſſe in eodem plano cum rectâ B E D.



Demonſtratio.

QVoniam E F ordinatim poſitæ ſunt ad B G, igitur inter ſe parallelę ſunt: vlterius quoniam F H in ſuperficie cylindri ductę ſunt, igitur etiam inter ſe æquidiſtant. ergo cùm E F, F H ęquales ſint inter ſe, triangula E F H ſimilia ſunt. vnde vt E F ad E F, ita eſt E H ad E H. quare anguli F H E inter ſe æquales ſunt: vnde lineę E H, ſunt in vno eodemque plano cum recta B E D, ac proinde & puncta B, H, H, D. Quod erat propoſitum.

PRO-

PROPOSITIO XCIII.

Iſdem poſitis ducantur diametro B G parallelę F K & iungantur H K. Dico ſimiliter puncta B, H, D in eodem plano exiſtere cum linea BKD.

Demonſtratio.

Qvoniam æquidiſtant lineę K F inter ſe, igitur anguli E K F inter ſe ſunt æquales. Vnde ſimilia ſunt triangula E F K inter ſe, & conſequenter eſt E F ad E F, vt F K ad F K, ſed vt E F ad E F, ita ex conſtructione ſunt F H ad F H. igitur vt F K ad F K, ita F H ad F H; ſimilia igitur ſunt triangula K F H: ac proinde anguli F H K ſunt æquales. Igitur puncta B, H, D in plano eodem exiſtunt cum rectâ B K D, hoc eſt B E D. Quod oportuit demonſtrare.

PROPOSITIO XCIV.

Iſdem poſitis:

Dico parabolæ ſegmentum B F D ductum in ſe per lineas E F producere vngulam parabolicam quæ reducta eſt ad rectilineum ei æquale.

Demonſtratio.

Lineæ F K ductæ in ſeipſas producunt [a] vngulam parabolicam quæ reducta eſt ad corpus rectilineum; ſed lineæ F H ad F H, ſunt [b] vt F K ad F K: igitur F K, F K lineæ ductæ in F H producunt etiam vngulam parabolicam, & quidem quæ ad vngulam ortam ex ductu F K in ſeipſam, [c] rationem habeat quam F H ad F K, ac proinde reducta ſit ad rectilineum. Sed E F, E F, lineæ ductæ in ſe producunt idem corpus quod F K lineæ ductæ in F H, cùm lineæ E H [d] oſtenſæ ſint eſſe in eodem plano cum H K lineis; igitur & E F lineæ ductæ in F H, ſiue ſuperficies E F D ducta in ſe ſecundùm lineas E F, producit vngulam parabolicam, quę reducta ſit ad rectilineum ei æquale. Quod erat demonſtrandum.

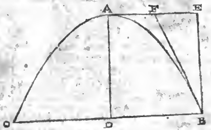
a Per 91. huius.
b Per demonſtrata 93. huius.
c Per demonſtrata prop. 7. de cylindro circul.
d Per 92. & 93. huius.

PROPOSITIO. XCV.

Sit parabolæ A B C axis A D, & contingens in vertice A E, denique axi æquidiſtans E B.

Oporteat ſolido ex ductu plani A E B A in ſeipſum, æquale ſolidum exhibere quod baſim habeat & altitudinem notam.

Conſtructio & demonſtratio.



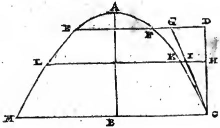
Ex puncto B ponatur B D, ordinatim ad axem A D; & ex eodem B puncto ducatur B F cõtingens ſectionem in B. Dico figuram A E B A, in ſe ductam æqualem molem producere ſolido habenti baſim ſuperficiei A F B A, æqualem altitudinem verò B C. huius conſtructionis demõſtrationem inuenies libro de de ductu plani in planum propoſitione 169.

PROPOSITIO XCVI.

PArabolæ axem AB ſecent orthogonaliter duæ rectæ CB, DE: & ſit DC axi parallela.

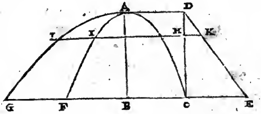
Oporteat denuo figuræ FKCD in ſe ductæ, æquale ſolidum exhibere quod præter baſim certam habeat notam altitudinem.

Conſtructio & demonſtratio.



POnatur iterum, ſecundùm praxim præcedentis propoſitionis, CG contingens ſectionem in C occurrens DE in puncto G. Dico corpus ortum ex ductu plani FDC in ſe, æquari ſolido quod habet baſim FGC, & altitudinem duplam rectæ CM. Demonſtratio eadem eſt cum præcedenti ex 169. duct.

PROPOSITIO XCVII.



PArabolæ axem AB, ſecet orthogonaliter recta CF, parabolamque tangat in A linea AD, ex C verò ducta ſit CD parallela axi.

Oporteat figuræ DAFC in ſe ductæ, ſolidum æquale proferre, quod præter baſim notam, conſtet determinatâ altitudine.

Conſtructio & demonſtratio.

FIat CE æqualis rectæ BC, & ducatur ED. Denique ſit BG dupla rectæ BF, & deſcribatur parabola ALG, habens axem AB & ordinatim ad illum poſitam rectam BG. Dico corpus genitum ex ductu ſuperficiei DCFA, in ſeipſam æquale

eſſe

eſſe ſolidæ magnitudiui quæ conſtat baſi E D A G E, & altitudine D A. Eſt enim planum D C F A, in ſe ductum æquale corpori ex A B F in ſe ducto (quod æquatur ſolido ſuper baſi triangulari D E C, & altitudine D A, vt demonſtratum [a] eſt libro a Per 161. de duct. de ductibus plani in planum) ſimul cum rectangulo D A B C ducto in ſe quod æquatur ſolido habenti baſim D A B C, & altitudinem D A, vnà inſuper cum ſolido quod generatur ex D A B C ducto in A B F bis, hoc eſt ſolido habenti baſim A B G, quę dupla eſt ipſius B A F, vt patet ex libro de parabola, [b] & altitudinem D A. Igitur cùm figura E D A G E æqualis ſit baſibus omnium figurarum quæ cum altitudine D A æquatur ſolido quod oritur ex ductu plani D C F A in ſeipſum, expediuimus ſolutionem problematis propoſiti quoad partem hanc. b Per Coroll. 240. parab.

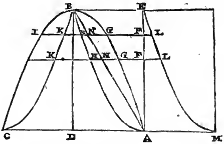
Quod ſi verò poſtuletur ſolui problema in caſu H I F C, quo requiritur ſolidum exhiberi vt priùs quod æquetur figuræ H I F C in ſeipſam ductæ, ponatur A D quæ æquidiſtet H I, & producta C H in D, repetatur præcedens conſtructio & habebitur vt priùs ſolida magnitudo æqualis figuræ H I F C in ſeipſam ductæ. nam ſolidum habens baſim E K L G, & altitudinem D A æquatur H I F C ducto in ſe ſecundùm tenorem propoſitionis vniuerſalis [c] quam libro de ductu plani in planum demonſtrauimus. c Per 46. de duct.

PROPOSITIO XCVIII.

SIt A G B I C parabola cuius axis B D & contingens B E, axi parallela E A; & figura A E M ſubalternè poſita cum figura B E A G.

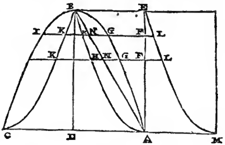
Oporteat igitur figuræ A E M ductæ in figuram B E A G, æquale ſolidum exhibere, quod determinata conſtet baſi & notâ altitudine.

Conſtructio & demonſtratio.



OStenſum eſt [d] quod corpus ortum ex ductu M A E in B E A G, ſiue ex ductu figuræ B E A G, in ſe ſubalternè dimidium ſit corporis orti ex ductu B G A H in ſe. d Prop. 111. de duct. Sed corpus ortum ex ductu ſuperficiei B G A H ductę in ſe; ſi diuidatur per lineam A B bifariam, æquale eſt ſuperficiei B G A N ductæ in ſe, B N A H ductæ in ſe, hoc eſt ſuperficiei B G A N bis in ſe ductæ vnà cum ſuperficie B G A N bis ducta in planum B N A H. igitur cùm corpus ex ductu ſuperficiei B E A G in ſe ſubalternè ductâ dimidium ſit corporis ex ductu ſuperficiei B G A H in ſe, etiam æquale eſt corpori quod oritur ex ſuperficie B G A N in ſe, ſimul cum plano B G A N ducto in B N A H. igitur cùm corpus quod oritur ex ductu B G A N in ſe, [e] reductum ſit ad corpus habens certam baſim & notam altitudinem, reſtat vt corpus ortum ex ductu ſuperficiei B G A N in B N A H reducamus ad corpus quod baſim determinatam habeat & altitudinem. Sit igitur. e Per 95. huius.

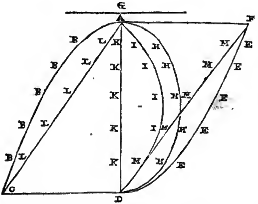
PROPOSITIO XCIX.



ASſumptâ eadem figurâ.

Oporteat figuræ parabolicę B G A N ductæ in figuram B N A H, ſolidum æquale exhibere, quod præter baſim determinatam, habeat altitudinem notam.

Conſtructio & demonſtratio.

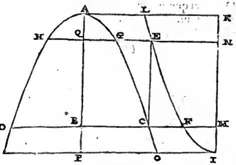


ASſumantur aliç duæ ſemiparabolæ ſubalternè poſitæ A B C, D E F, quæ in ſe ductæ proferant ſolidam magnitudinem æqualem illi quam exhiber cylindrus ex baſi ſemiellipticea K H & altitudine G, quod poſſe fieri patet per conuerſam 210. de parab. & per 45. de duct. item ex propoſitione 75. huius. quoniam igitur B K ductum in K E, æquatur moli corporeæ ex baſi K H, & altitudine G; & quoniam triangulum K M ductum in parabolam K B. ad parallelepipedum eſt reductum, ſicut enim propol. 27. de duct. oſtenſum eſt ex tali ductu ſegmenti circularis in triangulum hoc modo diſpoſitum produci vngulam circularem, ita quoque manifeſtum eſt per hunc ductum produci vngulam parabolicam quam prop. 99. de cylindr. ad corpus rectilineum reduximus. Et quoniam K M ductum in K B, ſiue L K in K E, æquale eſt L K

ducto

ducto in KM, & LK in ME; & rurſus quoniam cubatum eſt corpus ex ductu LK in KM per 5. de duct. etiam corpus ex ductu LK in ME, reductum eſt ad corpus rectilineum. ponantur itaque illa duo corpora ſcilicet ex MK in KB, & ex ME in KL, æqualia ſolido habenti baſim parabolicam KI & altitudinem G. MK in KB, vnà cum EM in KB, (hoc eſt vnà cum EM in KL, & EM in LB,) æquatur EK in KB, hoc eſt HK in altitudinem G. ſed MK in KB, cum EM in KL æquatur IK in altitudinem G. Ergo reliquum EM in LB, æquatur reliquo IH in altitudinem G. Quod oportuit præſtare.

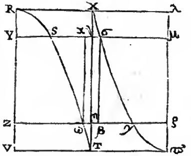
PROPOSITIO C.



Sit parabolæ axis AB; ad quem ordinatim ponatur GH, CD: & CE, axi æquidiſtet; figuræ verò GEC ponatur ſubalternè ECF æqualis & ſimilis.

Oporteat autem corpori ex ductu EGC in figuram parabolicam ECF producto proferre ſolidam magnitudinem æqualem quæ determinatam quidem habeat baſim, & notam aliquam altitudinem.

Conſtructio & demonſtratio.



Perficiatur parabola EF, eiuſque vertex ſit punctum I; recta verò IK illius axis, & IP contingens in I: quemadmodum AK parabolam AGC contingit in A. erit itaque parabola AOP parabolæ LIK ſubalternè poſita; & quoniam FEC æqualis ac ſimilis eſt figuræ GEC, patet BA eſſe æqualem NI & AQ æqualem IM hoc eſt BP. Fiat itaque parabolæ AOP æqualis RST, cuius axi RV conſtituatur parallela XT; & RY, ZV inter ſe quidem æquales ſint, ſed & æquales QA vel BP. poſitis deinde $Y\mu$, $Z\varsigma$ ordinatim ad axem, collocetur parabola $X\gamma\varpi$ ſubalternè cum RST, & ducantur $\omega\kappa$, $\sigma\beta$ quæ æquidiſtent XT. erunt igitur $\kappa\omega$, $\sigma\beta$ æquales ZY, hoc eſt in alio ſcemate rectę CE. eſt autem prop. 98. & 99. huius oſtenſum, cui ſolidæ magnitudini habenti baſim determinatam & notam altitudinem, ęquale ſit corpus quod oritur ex ductu plani $\nu S\omega\eta$ in $\sigma\nu\eta\gamma$. ergo etiam ſcitur cui ſolido determinatæ baſis & altitudinis æquale ſit $\kappa S\omega$ in $\sigma\nu\eta\gamma$, vnà cum $\nu\kappa\omega\eta$ in $\sigma\nu\eta\gamma$, cùm hæc ſimul ſumpta æquentur $\nu S\omega\eta$ in $\sigma\nu\eta\gamma$. ſed $\kappa S\omega$ in $\sigma\nu\eta\gamma$ æquatur $\kappa S\omega$ in $\sigma\gamma\beta$, & $\kappa S\omega$ in $\sigma\nu\eta\beta$. Ergo ſumma corporum quę ſit ex $\kappa S\omega$ in $\sigma\gamma\beta$, & ex $\kappa S\omega$ in $\sigma\nu\eta\beta$, & ex $\nu\kappa\omega\eta$ in $\sigma\nu\eta\gamma$, reducta eſt ad ſolidum determinatæ baſis & altitudinis, ſunt autem ex ſumma horum trium cor-

porum,

porum, duo reducta nimirum κSω in σνηβ, cùm quadrata a ſit figura κSω & νκωη in σνηγ, cùm quadrata ſimiliter ſit figura σνηγ. Ergo & reliquum quod fit ex κSω in σγβ, reductum eſt ad ſolidum determinatam habens baſim ac altitudinem. Quod erat propoſitum.

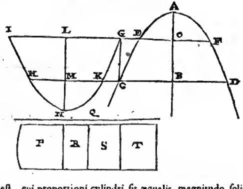
a Parte 5. parab.

PROPOSITIO CI.

SIt denuo A B axis parabolæ ad quem ſint ordinatim poſitę E F, C D, & C G axi æquidiſtans. Deinde conſtituatur æqualis & ſimilis figura G C H I ſubalternè cum figura G F D C.

Oporteat quoque ſuperficiei G F D C in G I H C ductæ exhibere æqualem magnitudinem habentem præter baſim determinatam, etiam notam altitudinem.

Conſtructio & demonſtratio.



OStenſum eſt a, cui proportioni cylindri ſit æqualis magnitudo ſolida quæ fit ex ductu plani O F D B in ſe ſubalternè, hoc eſt in planum L M H I, ponatur itaque portio illa cylindri æqualis corpori quod habet baſim circularem P, & altitudinem Q. hoc facto addatur huic baſi P rectangulum R, quod ductum in altitudinem Q producat parallelepipedum æquale ſolido quod fit ex ductu plani O F D B in planum G C M L. Quod fieri poterit, cùm b figura O F D B quadrata ſit. Quia autem corpus ex ductu O B C G in planum L M H I, æquale eſt eidem corpori orto ex O F D B in G C M L, adiungatur rectangulum S æquale R rectangulo, quod ductum in altitudinem Q æquetur R ducto in Q. Tandem adiungatur rectangulum T, quod etiam ductum in eandem altitudinem Q, æquetur parallelepipedo quod gignitur ex ductu plani G O B C in ſeipſum ſeu in planum G C M L. erit itaque tota ſuperficies P R S T ducta in altitudinem Q producens ſolidam magnitudinem deſideratam, æqualem illi ſcilicet corpori quod oritur ex ductu G F D C, ducto in ſe ſubalternè. nam G F D C ductum in G C H I, æquatur F O B D in I H M L, (hoc eſt P in Q) ſimul cum F O D B in G C M L, (hoc eſt R in Q) ſimul cum O G C B in I L M H, (hoc eſt S in Q) vnà denique cum rectangulo O G C B in L G C M ducto, ſcilicet T in altitudinem Q. quare perfecimus quod requirebatur.

b Prop. 68. huius.

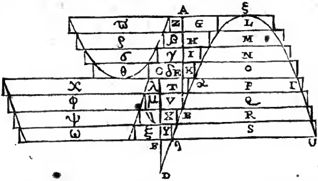
c Parte 5. parab.

PROPOSITIO CII.

OMnibus itaque his ſuppoſitis propoſitum ſit proportionem circuli ad figuram rectilineam notam facere.

Conſtructio

Conſtructio & demonſtratio.



Reſumamus itaque ad hoc pręſtandum figuram vniuerſalem propoſition.84.quod eſt fundamentum cui ſpeculationis huius cardo innititur. exhibita itaque eſt ratio corporis ex AEαζ plano in ſe ducto ad corpus ex plano CFηα in ſe ducto reſultans; cùm [a] vtraque ad corpus quod altitudinem certam habet & baſes notas reducta ſint: prætereà exhibita eſt proportio inter corpora producta ex ſuperficie CFυΓ in ſe ducta, & ſolidum ex ductu ſuperficiei AEΓζ in ſeipſam, cùm hæc etiam ad corpora reducta ſint [b] quę pręter altitudinem baſes habent notas. Igitur exhibita eſt proportio inter has duas rationes, hoc eſt inter rationem corporis quod fit ex ductu plani AEαζ in ſe, ad corpus quod oritur ex ductu plani CFηα in ſe, & inter rationem quam habet ſolidum ex ductu plani CFυΓ in ſe, ad ſolidum ex ductu plani AEΓζ in ſeipſum. Verum etiam [c] demonſtratum eſt eandem eſſe proportionem inter rationes corporum quæ gignuntur ex ductu ſubalterno earundem figurarum, hoc eſt inter rationem corporis ex ductu plani AEαζ in planum AEθ, ad corpus ex plano parabolico CFηα in planum parabolicum CFξ, & rationem corporis quod oritur ex ductu plani CFυΓ in planum CFω, ad corpus quod fit ex ductu ſuperficiei AEΓζ in AEθϖ cum proportione quæ eſt inter rationes corporum quæ fiunt ex iiſdem figuris ductis in ſe. quare cùm proportio quæ eſt inter rationes corporum genitorum ex figuris illis in ſe ductis, nota quoque erit proportio quam inter ſe habent rationes corporum quæ fiunt ex ſubalterno earundem figurarum ductu. Igitur cùm [d] hæc vltima corpora reducta quoque ſint ad ſolidas magnitudines, quarum baſes habent circulares figuras, & vnam eandemque communem omnibus altitudinem, eadem reperietur ratio inter hæc corpora quæ inter baſes eorum exiſtet, atque ita ratio circuli ad rectilineum reducta erit, prout pleniùs ex quadratura quarta adhuc intelligetur.

[a] Per 95. huius.
[b] Per 96. huius.
[c] Per 90. huius.
[d] Per 98. 100. 101. huius.

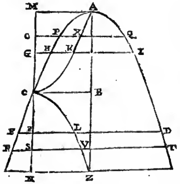
QVARTA CIRCVLI QVADRATVRA.

PROPOSITIO CIII.

SIt AB axis parabolæ CAD, cui æquidiſtet recta MN diuiſa per parabolam in C, ſumptiſq; æqualibus CG, CF; item CO, CS, ponantur per puncta G,F, ita O,S ordinatim ad axem rectę GI, ED; OQ, RT.

Dico rectangula HGI, EFD fore æqualia; item rectangula POQ, RST.

Demonſtratio.



FIat enim GK media inter GH, GI; & OX media inter OP, OQ. item FL, SV mediæ inter EF, FD, & RS, ST. oſtenſum [a] eſt CKX, item CLV eſſe parabolas, & quidem CLV æqualem planè [b] parabolę CAD. concurrat itaque parabola CLV cū axe AB in Z. manifeſtum eſt, ſi ex Z ordinatim ducatur ZN ad axem CN, æqualem eam fore ordinatim ductæ ex C ad axem AB, ſcilicet æqualem CB; quare cùm CLZ, CAD parabolæ eædem ſint, manifeſtum eſt axes AB, CN æquales eſſe. Manifeſtum eſt etiam ex conſtructione. parabolam CKX tranſire per A: nam ex A, ducatur AM parallela GK, tanget [c] ea parabolam CAD, itaque cùm [d] rectangulum HGI ſit ad quadratum AM vt linea CG ad CM, etiam quadratum GK ad MA quadratum erit vt CG ad CM. patet itaque CKX parabolam tranſire per A, & quidem AM vti & GK ordinatim erit poſita ad axem parabolæ CKA cùm ſint ad angulos rectos ductæ ad axem AB, ac proptereà AM æqualis erit BC, & MC æqualis AB, hoc eſt CN. æquales itaque rurſus ſunt parabolæ CKA, CLZ, quare & quadratum GK quadrato FL, & quadratum OX quadrato SV, æquale erit. manifeſtum igitur eſt etiam rectangula HGI, EFD, item POQ, SRT eſſe æqualia. Quod erat demonſtrandum.

a Per 139. parab.

b Per 152. de cylindro, Conoid. &c.

c Per 15. parab.

d Per 44. de parab.

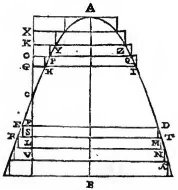
PROPOSITIO CIV.

PArabolę CAD axis ſit AB, quęuis autem diameter GCF parabolam ſecet in C; factis deinde CG, CF inter ſe æqualibus, vti & GO, FS, item OK, SL & ſic deinceps, per puncta G, O, F, S, &c. ponantur ordinatim ad axem OQ, GI, ED, RM, &c. ſecantes parabolam in R,E,H,P, item

item in Q,I,D,T,&c. ex quibus punctis educantur parallelæ ad axem, perficianturq́; rectangula K P, O H, E S, R L, item K Q, O I, F M, S N.

Dico rectangulum O H ad rectangulum E S eſſe vt rectangulum F M, ad rectangulum O I: & rectangulum K P eſſe ad R L, vt rectangulum S N ad K Q rectangulum.

Demonſtratio.



QVoniam CF, C G, item C O, C S æquales ſunt, igitur [a] rectangulum H G I, æquale eſt rectangulo E F D, ac propterea G H eſt ad E F, & F D ad G I, ſed rectangulum O H eſt ad rectangulum E S, vt G H ad E F, & rectangulum F M ad rectangulum O I vt F D ad G I, cùm altitudines eædem ſint ex conſtr. igitur manifeſtum eſt rectangulum O H ad E S, rectangulum eſſe vt rectangulum F M ad O I. Eodem prorſus modo oſtendetur rectangulum K P ad R L, eſſe vt rectangulum S N ad K Q rectangulum. Quę fuerant demonſtranda. [a] Per 103. huius.

PROPOSITIO CV.

IIſdem poſitis:

Dico parallelepipedum quod oritur ex ductu rectanguli O H in ſe, ad id quod oritur ex ductu E S in ſe, eandem habere rationem quam parallelepipedum ex ductu rectanguli F M in ſe ad parallelepipedum ex ductu O I in ſe.

Demonſtratio.

PArallelepipedum ortum ex ductu rectãguli O H in ſe ad parallelepipedum ortum ex ductu rectanguli E S in ſe, eſt vt rectangulum O H ad rectangulum E S, cùm altitudines æquales ſint. Sed [b] eadem quoque reperitur proportio inter baſes parallelepipedorum quę fiunt ex ductu F M rectanguli in ſe, & ex ductu rectanguli G I in ſeipſum. Igitur patet veritas propoſitionis. [b] Per 104. huius.

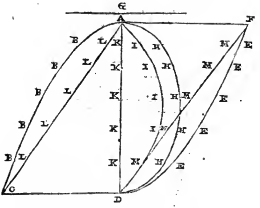
Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur parallelepipedum ex ductu rectanguli K P in ſe ad parallelepipedum ortum ex ductu R L in ſe eſſe vt corpus ortum ex ductu S N in

ſe

ſe ad corpus ortum ex ductu rectanguli KQ in ſe, imò & de omnibus parallelepipedis quorum baſes æqualiter à puncto C diſtant, id eodem modo oſtendetur.

PROPOSITIO CVI.



Iſdem manentibus:
Dico proportionem quæ eſt inter rationem corporis ex ductu OH in ſe ad corpus ex ductu ES in ſe, & rationem corporis ex ductu FM in ſe ad corpus ex ductu OI in ſe, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationem corporis ex ductu plani KP in ſe, ad corpus ex ductu RL in ſe, & rationem corporis orti ex ductu plani SN in ſe, ad corpus ortum ex ductu plani KQ in ſe.

Demonſtratio.

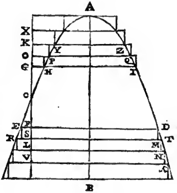
a Per 105. huius. DEmonſtratum eſt a quod ratio quæ eſt inter corpora orta ex ductu OH in ſe, & ES in ſe, eadem ſit cum ratione quæ eſt inter corpora ex ductu FM in ſe, & plani OI in ſeipſum. Similiter oſtenſum eſt quod ratio quæ eſt inter corpora nata ex ductu KP in ſe, & ex ductu RL in ſe, eadem ſit cum ratione quę eſt inter corpora orta ex ductu SN in ſe, & ex ductu KQ in ſe. Igitur cùm vtrobique ſit ratio æqualitatis, manifeſtum eſt quod in propoſitione fuerat aſſertum.

PROPOSITIO CVII.

Iſdem poſitis:
Dico proportionem quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu OH in ſe, ad corpus ortum ex ductu KP in ſe, & rationem corporis orti ex ductu plani ES in ſe ad RL in ſe ductum, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu FM in ſe, ad corpus ortum ex ductu SN in ſe, & rationem corporis orti ex ductu OI in ſe, ad corpus ortum ex ductu plani KQ in ſe.

Demon-

Pro hac demonſtratione vſurpetur figura hîc appoſita, uti & in propoſitionibus paginâ præcedenti poſitis, non verò illa, quæ ibidem per errorem impreſſa eſt.



Demonſtratio.

OStendimus a igitur proportionẽ quæ eſt inter rationẽ corporis orti ex ductu plani O H in ſe, ad corpus ex ductu E S in ſe, & rationẽ corporis orti ex ductu F M in ſe ad id quod oritur ex ductu O I in ſe, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu plani K P in ſe, ad corpus eſt ductu R L in ſe, & rationem corporis nati ex ductu S N plani in ſeipium, ad id quod ex plano K Q in ſe ducto exſurgit. ergo permutãdo b proportio quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu plani O H in ſe, ad E S in ſe ductum, & rationem corporis orti ex ductu K P in ſe ad id quod oritur ex ductu R L in ſe, eadem erit cum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu plani F M in ſe ad O I in ſe, & rationem corporis orti ex ductu S N in ſe, ad id quod ex ductu plani K Q in ſe, exſurgit. Quare c etiam proportio quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu O H in ſe, ad corpus ortum ex ductu K P in ſe, & rationem corporis orti ex ductu E S in ſe ad R L in ſe ductum, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu F M in ſe, ad corpus ortum ex ductu S N in ſe, & rationem corporis orti ex ductu O I in ſe, ad corpus ortum ex ductu plani K Q in ſe. Quod erat demonſtrandum.

a Per 106. huius.
b Per 44. de proport.
c Per 19. de proport.

Corollarium primum.

EOdem planè modo demonſtrabitur quod proportio quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu K P in ſe, ad corpus ortum ex ductu X Y in ſe, & rationem corporis orti ex ductu plani R L in ſe ad α V in ſe ductum, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationem corporis orti ex ductu plani S N in ſe ducti ad id quod oritur ex ductu L λ plani in ſe, & rationem corporis orti ex ductu K Q in ſe ad X Z in ſe ductum.

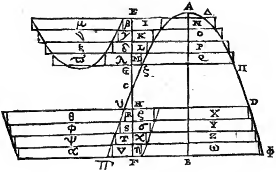
Corollarium ſecundum.

ITem ex demõſtratione conſtat quod proportio quæ eſt inter rationem corporum ortorum ex ductu O H in ſe, & E S in ſe, & rationem corporum ex ductu K P in ſe, & R L in ſe, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationes corporum ex ductu F M in ſe, & O I in ſe, & rationem corporum ortorum ex ductu S N in ſe, & K Q in ſe.

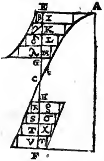
Corollarium tertium.

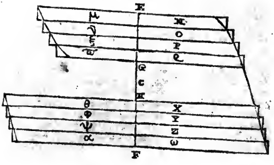
IMò eodem modo oſtendetur proportionem rationum quæ eſt inter quælibet quatuor corpora, eandem eſſe cum proportione rationum quæ eſt inter quælibet quatuor corpora, modò bina corpora primæ ſeriei æquidiſtent, ac bina alia corpora primæ ſeriei à puncto C: & rurſus bina corpora ſecundæ ſeriei æquidiſtent à puncto C, ac bina alia corpora eiuſdem ſeriei.

Figura vniuerſalis pro ſequentibus propoſitionibus.



Figuræ particulares.





Conſtructio Figuræ vniuerſalis pro ſequentibus propoſitionibus.

SIt AB axis parabolæ CAD, cui æquidiſtet diameter EF bifariam diuiſa in C; ſumptiſque CG, CH æqualibus, diuiſiſque GE, HF in quatuor partes æquales, ponantur per puncta diuiſionum ordinatim ad axem, & perficiantur parallelogramma I, K, L, M; item IN, KO, LP, MQ; & rectangula R, S, T, V, item ρX, σY, κZ; ηω. Denique ponatur figura parabolica IKLM ſubalternè in βγδλ, ſimiliter ſubalternè conſtituatur EGQN, in EGϖμ. Tandem figura parabolica HFπυ ſubalternè ponatur in HFηρ, vti & figura HFωX ſubalternè conſtituatur in HFαθ, & intelligantur parallelogramma vbique perfecta.

Conſtructio Figurarum particularium.

VT clariùs in ſequentibus procedamus, transferantur rectangula quæ in ſchemate vniuerſali ſunt inter parabolam CA, diametrum ECF, & parabolas ſubalternè poſitas in ſchema particulare primum, & corpora orta ex ductu rectanguli M in ſe, L in ſe, K in ſe, I in ſe, item corpora orta ex ductu rectangulorum R, S, T, V ſingulorum in ſeipſa, vocentur corpora M, L, K, I, item corpora R, S, T, V. Item corpora quæ naſcentur ex ductu rectanguli M in λ rectangulum, rectanguli L in δ, rectanguli K in γ, rectanguli I in β, vocentur corpora Mλ, Lδ, Kγ, Iβ ſine addito, vti & corpora quæ exſurgent ex ductu rectanguli R in ρ, S in σ, T in κ, V in η, vocentur corpora Rρ, Sσ, Tκ, Vη.

In ſecundum verò ſchema referantur rectangula MQ, LP, KO, IN, item ρX, σY, κZ, ηω ac rectangulo quidem MQ in ſchemate vniuerſali, ſit æquale rectangulum Q, in ſecundo ſchemate particulari: rectangulis verò LP, KO, IN in vniuerſali, æqualia ſint rectangula, P, O, N in ſecundo particulari; item rectangula X, Y, Z, ω æqualia rectangulis ρX, σY, &c. Denique rectangulis ϖλ, ξδ, νγ, μβ; θR, φS, ψT, αV in vniuerſali, æqualia ponantur in particulari ſchemate ϖ, ξ, ν, μ; θ, φ, ψ, α. Ac corpora quidem quę naſcentur ex ductu rectanguli Q in ſe, O in ſe, P in ſe, N in ſe, item ex ductu rectanguli X in ſe; Y in ſe, Z in ſe, ω in ſe, vocentur corpora Q, P, O, N, &c. Item ea quæ exſurgent ex ductu Q in ϖ, ex P in ξ, O in ν, N in μ, &c. vocentur ſine addito corpora Qϖ, Pξ, Oν, Nμ; Xθ, Yφ, Zψ, ωα.

PROPOSITIO CVIII.

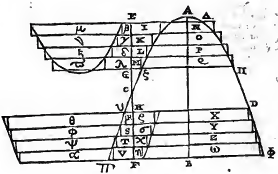
ILlis poſitis:
Dico quod proportio quæ eſt inter rationes corporum Mλ ad Rρ, & Xθ, ad Qϖ, eandem eſſe cum proportione quæ eſt inter rationes corporum Lδ, ad Sσ, & Yφ ad Pξ.

Demonſtratio.

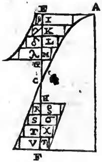
NAm ratio corporis Mλ ad Rρ, compoſita eſt ex ratione rectanguli M ad R, & rectanguli λ ad ρ. Item ratio corporis Xθ ad Qϖ, compoſita eſt ex ratione rectanguli X ad Q, hoc eſt ratione rectanguli [a] M ad R, & ex ratione rectanguli θ ad ϖ, hoc eſt [b] λ ad ρ, Eadem igitur eſt ratio corporis Mλ ad Rρ, & ratio corporis Xθ ad Qϖ. Eodem diſcurſu patet rationem quæ eſt inter corpora Lδ & Sσ, eandem eſſe cum ratione quæ eſt inter corpora Yφ & Pξ. nam rurſus ratio corporis Lδ ad Sσ, compoſita eſt ex ratione rectanguli L ad S, & rectanguli δ ad σ; ratio autem corporis Yφ ad Pξ, ex iiſdem compoſita eſt: componitur enim ex ratione rectanguli Y ad P, [c] hoc eſt rectanguli L ad S, & ex ratione rectanguli φ ad rectangulum ξ, hoc eſt rectanguli δ ad σ. Quare cùm vtrobique rationes eædem ſint, erit proportio quæ eſt inter rationes corporum Mλ, ad Rρ, & Xθ ad Qϖ, eadem cum proportione quæ eſt inter rationes corporum Lδ, ad Sσ, & Yφ ad Pξ. Quod erat demonſtrandum.

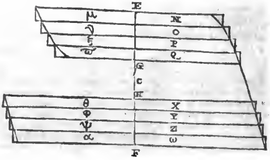
a Per 104. huius.
b Per eand.
c Per eand.

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.





Corollarium.

QVod de ptoportiooibos harum rationum dictum eſt, id etiam in quiboſuis ſubdiuiſionibus intelligi volumus, modò corpora debito modo ſumantur, hoc eſt prout hîc ſumpta ſunt: nimirum aſſerimus, quod proportio, quæ eſt ioter rationes corporum $L\delta$, ad $S\sigma$, & $Y\phi$ ad $P\xi$, eadem ſit cum proportione, quæ eſt inter corpora $K\gamma$ ad $T\kappa$, & $Z\psi$ ad $O\nu$: item eadem eum proportione, quæ eſt inter rationes corporum $I\beta$ ad $V\eta$, & $\omega\alpha$ ad $N\mu$, cùm in his ſit eadem demooſtratio. Idemq́ue in ſequenti propoſitione aduertendum eſt.

PROPOSITIO CIX.

IIſdem poſitis:

Dico quod proportio quæ eſt inter tationes cotporum $M\lambda$ ad $R\rho$, & $L\delta$ ad $S\sigma$, eadem ſit cum proportione quæ eſt intet rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, & $Y\phi$ ad $P\xi$.

Demonſtratio.

DEmooſtratum eſt præcedenti prop. quod proportio quę eſt inter rationes corporum $M\lambda$ ad $R\rho$, & $X\theta$ ad $Q\varpi$, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes corporum $L\delta$ ad $S\sigma$, & $Y\phi$ ad $P\xi$. Igitur permutando [a] etiam proportio æ eſt inter rationes corporum $M\lambda$ ad $R\rho$, & $L\delta$ ad $S\sigma$, eadem erit cum proportione qoę eſt inter rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, & $Y\phi$ ad $P\xi$. a Per 44 de proport.

Corollarium primum.

HAnc etiam proot io Cotollario 107. dictum, ad alias proportiones reliquorum corporum extendi volumus modo ſuprà dicto.

Corollarium ſecundum.

HInc rurſus collige quod [b] proportio quę eſt inter ratiooes corporum $M\lambda$ ad $L\delta$, & $R\rho$ ad $S\sigma$, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes corporum $X\theta$ ad $Y\phi$, & $Q\varpi$ ad $P\xi$. b 59. Pro-port.

PROPOSITIO CX.

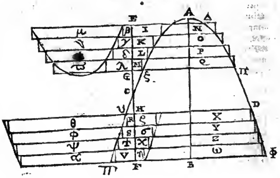
IIſdem poſitis:

Dico quod proportio quæ eſt inter rationes corporum M ad R, & L ad S, ad proportionem quæ eſt intet rationes corporum X ad Q, & Y ad P, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporum $M\lambda$ ad $R\rho$, & $L\delta$ ad $S\sigma$, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, & $Y\phi$ ad $P\xi$.

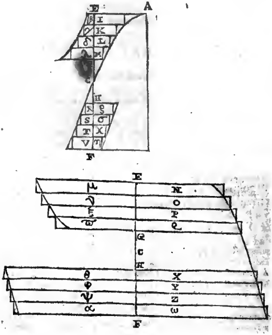
Demonſtratio.

OStenſum eſt [c] quod proportio quæ eſt inter rationes corporum M ad R, & L ad S, eadem ſit cū proportione quę eſt inter rationes corporum X ad Q, & Y ad P. Similiter demonſtratnm eſt [d] qnod proportio qoę eſt ioter rationes corporum $M\lambda$ ad $R\rho$, & $L\delta$ ad $S\sigma$, eadem ſit eum proportione quæ eſt inter rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, & $Y\phi$ ad $P\xi$. Igitur cùm proportiones quæ inter ſe comparantur æquales ſint, conſtat quod proportio qoæ eſt inter rationes corporum M ad R, & L ad S, ad proportionem quę eſt ioter rationes corporum X ad Q & Y ad P, ſit vt proportio quæ eſt inter ratiooes corporom $M\lambda$ ad $R\rho$, & $L\delta$ ad $S\sigma$, eſt ad proportionem, quę eſt inter rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, & $Y\phi$ ad $P\xi$. Quod erat demonſtrandum. c Coroll. 2. prop. 107. huius. d 109. huius.

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.



Corollarium primum.

HIne rectè etiam inferes quod proportio quæ eſt inter rationes corporum M ad L, & R ad S, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum X ad Y, & Q ad P, ſit vt proportio, quæ eſt inter rationes corporum Mλ ad Lδ, & Rϱ ad Sσ, eſt ad proportionem quę eſt inter rationes corporum Xθ ad Yφ, & Qϖ ad Pξ. nam rurſus a proportio quæ eſt inter rationes corporum M ad L, & R ad S, eadem eſt cum proportione quæ eſt inter rationes corporum X ad Y, & Q ad P. Ex altera verò parte oſtenſum eſt b quod proportio quæ eſt inter rationes Mλ ad Lδ, & Rϱ ad Sσ, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes corporum Xθ ad Yφ, & Qϖ ad Pξ. Conſtat igitur veritas Corollarij, quam etiam de duabus ſequentibus propoſitionibus intelligi volumus.

a Per 107. huius.
b Per Corr. 2.109. huius.

Corollarium ſecundum.

EOdem modo oſtendemus quod proportio quæ eſt inter rationes corporum M ad R, & X ad Q, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum L ad S, & Y ad P, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporum Mλ ad Rϱ, & Xθ ad Qϖ, eſt ad proportionem Lδ ad Sσ, & Yφ ad Pξ, ſcilicet per propoſitionem iam poſitam, rationeſque permutando per 44 de proport.

PROPOSITIO CXI.

IIſdem poſitis:
Rurſus dico quod proportio quæ eſt inter rationes corporum M ad R, & K ad T, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum X ad Q, & Z ad O, ſit vt proportio quæ eſt inter rationes corporum Mλ ad Rϱ, & Kγ ad Tϰ, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Xθ ad Qϖ, & Zψ ad Oν.

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt enim c quod proportio quę eſt inter rationes corporum M ad R, & K ad T, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes corporum X ad Q, & Z, ad O. Similiter oſtenſum eſt d quod proportio quæ eſt inter rationes corporum Mλ ad Rϱ, & Kγ ad Tϰ, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes corporum Xθ, ad Qϖ, & Zψ ad Oν. Itaque cùm iterum proportiones quę inter ſe comparantur eædem ſint, conſtat veritas propoſitionis.

c Per Corr. 3.107. huius.
d Corr. 1. prop. 109. huius.

PROPOSITIO CXII.

IIſdem poſitis:
Iterum dico quod proportio quæ eſt inter rationes corporum L ad S, & K ad T, ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Y ad P, & Z ad O, ſit vt proportio, quæ eſt inter rationes corporum Lδ ad Sσ, & Kγ ad Tϰ, eſt ad proportionem, quæ eſt inter rationes corporum Yφ ad Pξ, & Zψ ad Oν.

Demonſtratio.

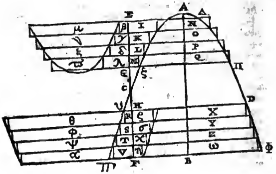
EAdem quæ ſuperior.

Scholion.

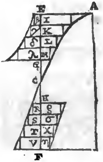
NE longior ſim in iiſdem demonſtrationibus ſemper repetendis, idem intelligi volumus de quibuſuis alijs proportionibus corporum ſubdiuiſorum, modò corpora eo modo ſumantur, prout hic ſumpta ſunt.

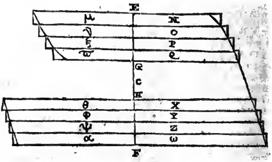
PRO-

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.





PROPOSITIO CXIII.

M	R	X	Q
L	S	Y	P
K	T	Z	O
I	V	ω	N
Mλ	Rρ	Xθ	Qϖ
Lδ	Sσ	Yφ	Pξ
Kγ	Tκ	Zψ	Oν
Iβ	Vη	ωα	Nμ

MAnentibus iiſdem:

Dico quod proportio quæ eſt inter rationem aggregati corporum M,L,K,I, ad aggregatum corporum R, S, T, V, & inter rationem aggregati corporum X,Y,Z,ω, ad aggregatum corporum Q,P, O,N, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter aggregarum corporum Mλ, Lδ, Kγ, Iβ, ad aggregarum corporum Rρ, Sσ, Tκ, Vη, & inter rationem aggregati corporum Xθ, Yφ, Zψ, ωα, ad aggregatum corporũ Qϖ, Pξ, Oν, Nμ.

Demonſtratio.

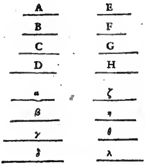
DVplici rurſus viâ hanc propoſitionem demonſtrabimus. Prima erit per propoſ. ſecundam de Conoidibus Archim. Secunda per prop. Lemmaticam 54. huius libri. Primâ itaque viâ ſic demonſtrabimus. Ratio corporum M ad R, ad rationem corporum L ad S,[a] eſt vt ratio corporum X ad Q ad rationem corporum Y ad P. Item eodem modo ratio corporis L ad S ad rationem corporis K ad T, eſt vt ratio corporis Y ad P, eſt ad rationem corporis Z ad O. Deniqoe ratio corporis K ad T ad rationem corporis I ad V, eſt vt ratio corporis Z ad O, eſt ad rationem corporis ω ad N. Atque ſic primam Archimedei Theorematis partem abſoluimus. [a Per Corol. 2. prop. 107. huius.]

Cùm verò oſtenſum ſit[b] quod ratio corporis Mλ ad Rρ, eadem ſit cum ratione corporis Xθ ad Qϖ, demonſtratum verò ſit[c] etiam quod ratio corporis M ad R, eadem ſit cum ratione corporis X ad Q, etiam[d] permutando ratio corporis M ad R, ad rationem corporis Mλ ad Rρ, erit vt ratio corporum X ad Q, eſt ad rationem corporum Xθ ad Qϖ. Eodem modo oſtendetur ratio corporis L ad S, ad rationem corporis Lδ ad Sσ eſſe, vt ratio corpotum Y ad P eſt ad rationem corporum Yφ ad Pξ: item ratio corporis K ad T, ad rationem corporis Kγ ad Tκ, erit vt ratio corporum Z ad O eſt ad rationem corporum Zψ ad Oν. Denique ratio corporum I ad V, ad rationem corporum Iβ ad Vη, erit vt ratio corporum ω ad N, eſt ad rationem corporum ωα ad Nμ. [b Per demonſtratã prop. 108. huius.] [c Per 105. huius.] [d Per 44. proport.]

Igitur cùm hæ rationes omnes ita diſpoſitæ ſint vti quantitates apud Archimedẽ, ſicut ipſe rectè infert quantitates aggregati primi ad omnes aggregati ſecũdi eſſe vt omnes quantitates tertij aggregati ſunt ad omnes quantitates aggregati quarti, ita & nos inferimus omnes rationes corporũ M ad R, L ad S, K ad T, I ad V, (hoc eſt rationẽ aggregati corporum M, L, K, I ad aggregatum corporum R, S, T, V) eſſe ad omnes rationes corporum X ad Q, Y ad P, Z ad O, ω ad N (hoc eſt ad rationem aggregati corporum X, Y, Z, ω ad aggregatum corporum Q, P, O, N) vt omnes rationes cor-

porum $M\lambda$ ad $R\varrho$, $L\delta$ ad $S\sigma$, $K\gamma$ ad $T\varkappa$, $I\beta$ ad $V\eta$ (hoc eſt vt ratio aggregati corporum $M\lambda$, $L\delta$, $K\gamma$, $I\beta$, ad aggregatum corporum $R\varrho$, $S\sigma$, $T\varkappa$, $V\eta$) ſunt ad omnes rationes corporum $X\theta$ ad $Q\varpi$, $Y\varphi$ ad $P\xi$, $Z\psi$ ad $O\nu$, $\alpha\omega$ ad $N\mu$, hoc eſt ad rationem aggregati corporum $X\theta$, $Y\varphi$, $Z\psi$, $\omega\alpha$, ad aggregatum corporum $Q\varpi$, $P\xi$, $O\nu$, $N\omega$. Quod erat demonſtrandum.

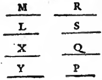
Scholion.



NE quis verò miretur nos hîc à rationibus ad rationes argumentari, cùm Archimedes à quantitatibus ad quantitates argumentum formet, oſtendemus Archimedis conſtructionem etiam in rationibus conſiſtere. Sic ipſe conſtruit. Sit quãtitas A *ad* B, *vt quantitas* E *ad* F, *quantitas verò* B *ad* C, *vt quantitas* F *ad* G, *denique quantitas* C *ad* D, *vt quantitas* G *ad* H. *Item quantitas* A *ad* α, *vt quantitas* E *ad* ζ; *quantitas verò* B *ad* β, *vt quantitas* F *ad* η, *item quantitas* C *ad* γ, *vt quantitas* G *ad* θ; *tandem quantitas* D *ad* δ, *vt quantitas* H *ad* λ. *Infert Archimedes omnes quantitates* A, B, C, D, *eſſe ad omnes quantitates* E, F, G, H, *vt ſunt quantitates* α, β, γ, δ *ad quantitates* ζ, η, θ, λ.

Iam verò à rationibus ad rationes quantitatum argumentabimur in his ipſis quantitatibus, vt ſuperiùs fecimus. Cùm quantitas A *ad* B, *ſit vt quantitas* E *ad* F, *igitur ratio quantitatum* A *ad* B, *eadem eſt cum ratione quantitatum* E *ad* F, *& ratio quantitatum* B *ad* C, *eadem cum ratione quantitatum* F *ad* G, *tandem ratio quantitatum* C *ad* D, *eadem erit cum ratione quantitatum* G *ad* H.

Cum verò Archimedes fecerit quantitatem A *ad* α, *vt quantitas* E *eſt ad* ζ, *etiam ratio quantitatum* A *ad* α, *eadem erit cum ratione quantitatum* E *ad* ζ. *item ratio quantitatum* B *ad* β, *eadem erit cum ratione quantitatum* F *ad* η *& ratio quantitatum* C *ad* γ, *eadem cum ratione quantitatum* G *ad* θ; *denique ratio quantitatum* D *ad* δ, *eadem erit cum ratione quantitatum* H *ad* λ. *Igitur ratio omnium quantitatum* A, B, C, D *ad omnes quantitates* E, F, G, H, *eadem eſt cum ratione quantitatum* α, β, γ, δ *ad omnes quantitates* ζ, η, θ, λ: *ſiue quod in idem recidit, prout Archimedes inferebat omnes quantitates* A, B, C, D, *ſunt ad omnes quantitates* E, F, G, H, *vt omnes quantitates* α, β, γ, δ, *ad omnes quantitates* ζ, η, θ, λ. *Differentia verò tantùm eſt in priori noſtro diſcurſu, quod omnes rationes inter duos terminos poſuerimus; atque ſicut Archimedes dicere potuiſſet vt iam oſtendimus ratio* A *ad* B, *eadem eſt cum ratione* E *ad* F, *ita nos in ſuperiori diſcurſu diximus, ratio corporis* M *ad* R, *ad rationem corporis* L *ad* S, *eſt ſicut ratio corporis* X *ad* Q, *ad rationem corporis* Y *ad* P, *rationes autem eſſe ſimiles aut eaſdem in idem recidit. Et ſic ſi rationum* M *ad* R, *&* L *ad* S, *ſtatuantur eſſe denominatores* A *&* B: *item rationum* X *ad* Q, *&* Y *ad* P, *denominatores ſtatuantur* E *&* F, *& ſic de cæteris, apparebit nos, quando dicimus rationem corporum* M *ad* R, *ad rationem corporum* L *ad* S, *eſſe vt ratio corporum* X *ad* Q, *eſt ad rationem corporum* Y *ad* P, *nihil aliud efferre quàm quod ratio* A *ad* B, *ſit eadem cum ratione* E *ad* F, *ſiue vt Archimedes effert, quod quantitas* A *ad* B, *ſit vt quantitas* E *ad* F. *Itaque ſi aliarum rationum denominatores ſtatuantur quantitates* C, D, G, H, *&c. apparebit noſtrum diſcurſum cum Archimedæo ad amuſſim congruere.*



Alter

Alter demonſtratur viâ ſecundâ.

M	R	X	Q
L	S	Y	P
K	T	Z	O
I	V	ω	N
Mλ	Rρ	Xθ	Qϖ
Lδ	Sσ	Yφ	Pξ
Kγ	Tκ	Zψ	Oν
Iβ	Vη	ωα	Nμ

PRoportio quæ eſt inter rationes corporum M ad R & X ad Q, [a] eadem eſt cum proportione corporum L ad S, & Y ad P. Prætereà proportio, quæ eſt inter rationes corporum M ad R, & X ad Q, [b] eadem eſt cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum K ad T, & Z ad O: prætereà proportio, quæ eſt inter rationes corporum M ad R, & X ad Q, eadem eſt cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum I ad V, & ω ad N. Atque ita proportio quæ eſt inter rationes corporum M ad R, & X ad Q, comparata eſt cum omnibus alijs, cum quibus conferri poteſt, ita vt ſemper antecedentis locum obtineat. Vt igitur diſcurſum proſequamur, aſſumemus proximè ſequentes terminos, qui vicem antecedentis obtineant.

a Per 106. huius.
b Per eandem.

Proportio itaque quę eſt inter rationes corporum L ad S, & Y ad P, eadem eſt cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum K ad T, & Z ad O, item eadem cum proportione quę eſt inter rationes corporum I ad V, & ω ad N. Denique eadem cum proportione quæ eſt inter rationes corporum M ad R, & X ad Q; vti patet ex demonſtratis prop. 106. huius. Atque ita contulimus proportionem, quæ eſt inter rationes corporum L ad S, & Y ad P, cum reliquis proportionibus, dando illi ſemper locum antecedentis. Idem ergo in alijs præſtemus.

Rurſus proportio quæ eſt inter rationes corporum K ad T, & Z ad O, eadem eſt cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum I ad V, & ω ad N. item eadem cum proportione, quæ eſt inter rationes M ad R, & X ad Q; & rurſus eadem cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum L ad S, & Y ad P. Tandem proportio quæ eſt inter rationes corporum I ad V, & ω ad N, eadem eſt cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum M ad R, & X ad Q: item eadem cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum L ad S, & Y ad P, & denique eadem cum proportione, quæ eſt inter rationes corporum K ad T, & Z ad O.

His ita concluſis infero ex vi [c] Lemmaticæ propoſitionis quod proportio quæ eſt inter rationem aggregati corporũ M, L, K, I, ad aggregatũ corporũ R, S, T, V, & rationem aggregati corporum X, Y, Z, ω, ad aggregatum corporum Q, P, O, N, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes partium iam enumeratarum quæ antecedentium vices obtinebant; & rationes partium quæ conſequentium loco ponebantur.

c Per 45. huius.

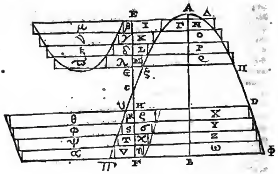
Quia verò per eundem diſcurſum circa quatuor alia aggregata quorum primum complectitur corpora Mλ, Lδ, Kγ, Iβ, ſecundum corpora Rρ, Sσ, Tκ, Vη, tertium Xθ, Yφ, Zψ, ωα; quartum denique Qϖ, Pξ, Oν, Nμ, eodem modo argumentari poſſumus, licebit etiam inferre, quod proportio quæ eſt inter rationem aggregati primi ad ſecundum aggregatum, ad rationem aggregati tertij ad aggregatum quartum, ſit eadem cum proportione quæ eſt inter rationes partium aggregatorum quæ antecedentes conſtituebant, & rationes partium aggregatorum quę conſequentium ſupplebant vices.

Quia verò demonſtratum eſt [d] quod proportio quæ eſt inter rationes corporum M

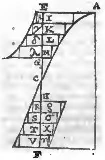
d Per 110. huius.

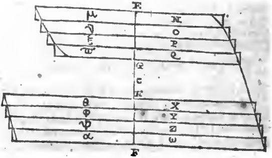
NNN 2 ad R,

Figura vniuerſalis.



Figuræ particulares.





ad R, & L ad S, ſit ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum X ad Q, & Y ad P, vt proportio, quæ eſt inter rationes corporum Mλ ad Rρ, & Lδ ad Sσ, eſt ad proportionem quæ eſt inter rationes corporum Xθ ad Qϖ, & Yφ ad Pξ; atque ita[a] conſequenter de reliquis, & hoc quidem in omni ſubdiuiſione diametrorum parabolæ: infero per Coroll. propoſitionis Lemmaticæ ſuprà citatæ, quod proportio quæ eſt inter rationem aggregati corporum M, L, K, I, ad aggregatum corporum R, S, T, V, & inter rationem aggregati corporum X, Y, Z, ω, ad aggregatum corporum Q, P, O, N, eadem ſit cum proportione quæ eſt inter rationes aggregati corporum Mλ, Lδ, Kγ, Iβ ad aggregatum corporum Rρ, Sσ, Tκ, Vη, & rationem aggregati corporum Xθ, Yφ, Zψ, ωα, ad aggregatum corporum Qϖ, Pξ, Oν, Nμ. Quod fuit demonſtrandum.

[a] Per 111. & 112. huius.

PROPOSITIO CXIV.

MAnente eadem figurâ.

Dico quod ratio corporis orti ex ductu parabolici ſegmenti EGζΓ in ſe ipſum, ad corpus quod exſurgit ex figurâ parabolicâ υHFπ in ſe ductâ, ſit ad rationem corporis orti ex figura parabolica HFΦD ducta in ſeipſam, ad corpus quod reſultat ex ductu figuræ EGΠΔ in ſeipſam, vt ratio corporis ex ductu figuræ EGζΓ in ſe ducta ſubalternè, ad corpus ortum ex ductu figuræ υHFπ ductæ in ſe ſubalternè, eſt ad rationem corporis nati ex ductu figuræ HFΦD in ſe ſubalternè, ad corpus quod exſurgit ex figurâ EGΠΔ ductâ in ſe ſubalternè.

Demonſtratio.

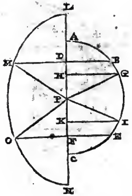
PRæcedenti demonſtratione oſtenſum eſt, quod ratio inter omnia parallelepipeda M, L, K, I, & omnia parallelepipeda R, S, T, V ad rationem inter corpora X, Y, Z, ω & corpora Q, P, O, N ſit vt ratio inter corpora Mλ, Lδ, Kγ, Iβ, & corpora Rρ, Sσ, Tκ, Vη, eſt ad rationem corporum Xθ, Yφ, Zψ, ωα ad corpora Qϖ, Pξ, Oν, Nμ. & hoc quidem in quâuis inſcriptione figurarum per ſubdiuiſionem linearum EG, HF in infinitum intelligendum eſt, ex vi diſcurſus in demonſtratione poſiti. Cùm igitur continuatis ſemper diuiſionibus auferatur[b] ſemper plus dimidio reſidui corporum illorum quibus parallelepipeda inſcribuntur; ac propterea cùm omnia corpora ſimul ſumpta exhauriant corpora quibus inſcribuntur, manifeſtum eſt rationem plani parabolici EGξΓ in ſe ducti, ad planum parabolicum υHFπ in ſe ductum eſſe ad rationem plani parabolici HFΦD in ſe ducti, ad planum parabolicum EGΠΔ ductum in ſe, vt ratio primorum corporum in ſe ſubalternè ductorum, eſt ad rationem ſecundorum corporum in ſe ſubalternè ductorum, cùm hæc ipſa corpora ſint, quibus ea parallelepipeda circumſcripta fuerant aut inſcripta. Hæc porrò corpora, ſimiliter atque in ſecunda & tertia quadratura præſtitum à nobis eſt, ad corpora cylindrica ipſis æqualia reducentur. Reſtat vt propoſitiones iam aliquot hîc ſubiungam ex quibus manifeſtior ratio circuli ad rectilineum eruatur.

[b] Per 42. & 43. duct.

PROPOSITIO CXV.

IN circulo ABC conſtituantur ordinatim ad diametrum AC rectæ BD, EF æqualiter ſemotæ à centro P: ſumpto deinde arcu GI commenſurabili cum BE ponantur ordinatim GH, IK æquales.

Oporteat autem LMN ellipſim aſſignare, ad quam circulus ABC talem habeat rationem, quam GHKI circuli ſegmentum, ad ellipſeos ſegmentum, incluſum parallelis BM & EO; æqualiter à P centro communi diſtantibus.



Conſtructio & demonſtratio.

Fiat vt PH ad PA, ita PD ad PI, vel PN: & deſcribatur quæcunq; ellipſis LMN; cuius axis maior ſit LN. Dico factum quod requiritur. Ductis enim PM, PO, & GP, PI: erit ſector GPI ad ſuum circulum ABC, vt ſector ellipticus MPO eſt ad ſuã ellipſim LMN: ac proinde ſegmentum GHKI ad circulum ABC, vt ſegmentum DMOF ad ellipſim LMN. Quod fuerat requiſitum.

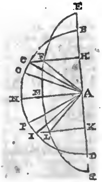
PROPOSITIO CXVI.

Sit A centrum circuli BCD & ellipſeos EFG: & ponantur ordinatim ad axem communem rectæ CH, IK, æqualiter à centro remotæ, ſitque ſector AOP commenſurabilis ſectori CAI.

Dico ſi ſit vt EG ad BD, ita NA ad MA, & ſector OAP ad circulum BND eam rationem habeat, quam ſector FAL ad ellipſim EMG; quod ſectores FAL, OAI æquales inter ſe ſint.

Demonſtratio.

a 191. ellipſ.



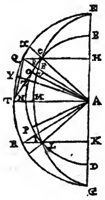
Svnt enim ª ellipſis & circulus inter ſe vt triangula maxima inſcripta MEA, NBA ſemicirculo vel ſemiellipſi. Quare cùm æqualia ſint triangula illa his figuris inſcripta ex eo quod circa communem angulum latera habeant per hypotheſim reciproca, etiam figuræ ipſæ æquales erunt ac proinde etiam ſectores FAL, OAP ęquales ſunt, qui ad totas figuras eamdem ſortiuntur rationem. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO CXVII.

Iiſdem poſitis ſi ellipſis tranſeat per puncta C & I circuli BCD. Dico quod ſector FALMF minor ſit ſectore CAINC.

Demon-

Demonſtratio.



QVoniam EG, axis ellipſeos ponitur maior diametro BD. igitur rectangulum EHG ad EAG rectangulum maiorem habebit rationem quàm rectangulum BHD ad BAD rectangulum; vnde quadratum FH ad MA, quadrarum maiorem habet rationem, quàm quadratum FH ad NA quadratum. minor igitur eſt AM quàm ſit AN; vnde & ſector FMLAF minor eſt ſectore CAINC. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXVIII.

IIſdem poſitis: Quod ſi ellipſis EQRG, circulo non occurrat, & AQ, AR iungantur:

Dico ſectorem QAR maiorem eſſe ſectore CAI.

Demonſtratio.

PRoducta AN in T, ducatur CT, QT. erit igitur triangulum AQT æquale TCA triangulo, adeoque & QST æquale FSA triangulo. eſt autem triangulum AFS maius ſectore FAV. Igitur etiam triangulum QST maius eſt ſectore eodem FAV: ſed etiam triangulum SAT maius eſt ſectore VAN. Igitur triangulum QAT maius eſt ſectore FAN, & à fortiori totus ſector QATYQ maior ſectore FAN. Quare, & ſector QAR maior eſt ſectore CAI: oſtenſum enim eſt dimidium vnius, alterius dimidio eſſe maius.

PROPOSITIO CXIX.

IIſdem poſitis:

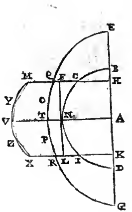
Dico quantitatem ellipticâ lineâ QTR & circulari CNI interceptam, eſſe conuexam.

Demonſtratio.

QVoniam arcus CNI commenſurabilis eſt arcui ONP: inueniatur menſura quæ vtrumque commenſuret (menſura autem de quâ loquor non linearis eſt ſed ſuperficies alicuius ſegmenti quod aliquoties ſumptum adæquat ſegmentum arcus circularis & ſegmentum arcus elliptici, ſecundùm ea quæ libro de ellipſi explicata ſunt) ſitque illa ſegmentum arcus CV, producta deinde AC in X, diuidatur ſector QAR per ſegmentum QX, erit enim QX menſura quæ commenſurabit ſegmentum, ſectoris QAR quoniam ſegmentum arcus VC commenſurat FNI ſegmentum, cumque nota ſit ratio ſegmenti CV ad XQ ſegmentum, erit quoque nota ratio ſegmenti CN ad ſegmentum QT: eſt verò ſegmentum QT oſtenſum maius ſegmento CN: ſit igitur ſector CAV tertia pars verbi gratiâ ſectoris CAN, & fiat VZ æqualis CV, & ducatur AZY. erunt igitur ſegmenta QY, YT maiora quàm ſint ſegmenta CV, VZ, ZN, ablatis igitur tribus illis ſegmentis à ſegmentis duobus QY & YT remanebit adhuc aliqua pars conuexa ipſius ſectoris QAT. Quod fuit demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO CXX.



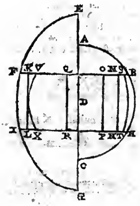
MAnentibus iiſdem. Ponatut figuræ HCNIK æqualis FMVXL, vt contineat ellipricam ſuperficiem QTR vt ſit commune ſpatium QFLR, ſegmento MFLX.

Dico ſpatium QMVXR eſſe concauum.

Demonſtratio.

OStenſum enim eſt ſegmentum QTR maius eſſe ſegmento circuli CNI vel MVX, igitur ſi diuiſa ſit quantitas MVX in quatuor videlicet ſegmenta MY, YV, VZ, ZX, æqualia & tollantur à quantitate elliptica verbi gratia QO, OT, TP illis æqualia reſiduum erit PR concauum. Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXI.



HAbeat ABC circulus centrum D commune cum ellipſi EFG, & BF, HI ponantur ordinatim ad axem EG, æquidiſtantes à centro D; ſit autem vt KFIL, ſegmenrum ellipſeos ad ſegmentum circuli BMNH, ita BOPH circuli ſegmentum ad ſegmentum ellipſeos QFIR.

Oporteat autem quatuor aſſignare quantitates proportionales inter ſe, quarum tres ſint conuexæ, quarta verò concaua.

Conſtructio & demonſtratio.

QVoniã ex præced. propoſit. ellipſis EFG, vel contrahi vel diduci poteſt ea ratione, vt ſegmentum FI maius eſſe poſsit vel minus ſegmento arcus circuli BH: ſupponatur ſegmentum ellipticum FKLI minus eſſe ſegmento circulari MBHN, vnde ſuper rectâ MN inſcribatur ſegmentum MSTN æquale ſegmento KFIL. Fiet itaque pars alia SBHT reſidua, quâ differat ſegmentum BMNH à ſegmento incluſo. ſimiliter idem fiat de ſegmento circulari BOPH, (quod etiam ſegmẽto elliptico QFIR inſcribi poterit, cùm ponantur proportionalia eſſe ſegmenta KFIL, BMNH ſegmentis BOPH, QFIR ſupponaturque KFIL, minus ſegmento MBNH. ſit ergo exceſſus figura VXIF, erit igitur vt MSTN ad reſiduum SBHT, ita QVXR ad reſiduum VFIX. Oſtenſum verò eſt SBHT eſſe concauum & VFIX conuexum. Igitur MSTN eſt ad MBHN, vt QVXR eſt ad QFIR: & diuidendo MSTN eſt ad SBHT, vt QVXR, eſt ad VFIX, igitur permutando SMNT conuexum eſt ad conuexum QVXR, ſicut eſt concauum BSTH ad conuexum

Digitized by Google

conuexum VFIX. Igitur quatuor quantitates exhibuimus proportionales, inter quas tres conuexæ ſunt & quarta concaua. Quod fuerat imperatum.

Corollarium.

Cætera perficere poteris, neque enim vlteriùs cenſeo procedendum; cùm ex poſitis ſufficienter vnuſquiſque, qui ſtatum quæſtionis notum habet, expediet quæ deſiderantur.

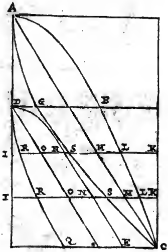
PARS TERTIA.

Quadratura Hyperbolæ.

PROPOSITIO CXXII.

Conſtitutæ ſint duæ parabolæ ABC, DNE ad eundem axem AD, quarum vertices ſint A & D: ductaque CK quę æquidiſtet AD, ponātur AC, DO quæ inter ſe ſint parallelæ. Denique ſint ordinatim ad axem AD collocatę rectæ KI, quæ ſint diametri parabolarum AGC, DRQ.

Dico IS, IM, IK & ſimiliter IR, IO, IK eſſe proportionales lineas.



Demonſtratio.

Inuenies illam libro de parabolâ propoſitione 67.

PROPOSITIO CXXIII.

Iiſdem poſitis:

Dico IM, IL, IK & IO, IN, IK eſſe continuè proportionales lineas.

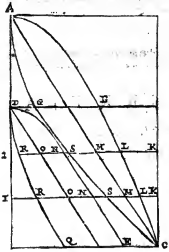
Demonſtratio.

Lege illam libro de parabolâ propoſitione 42.

PROPOSITIO CXXIV.

Iiſdem poſitis:

Dico rectangula SIR, MIO, KIK eſſe proportionalia.



Demonſtratio.

CVm ſint proportionales quantitates IR, IO, IK & IS, IM, IK [a]. Igitur rectangula ex illis reſultantia erunt proportionalia per propoſitionem 58. libri de progreſſionibus.

a 122. huius.

PROPOSITIO CXXV.

IIſdem manentibus:

Dico ſimiliter rectangula MIO, LIN, KIK eſſe proportionalia.

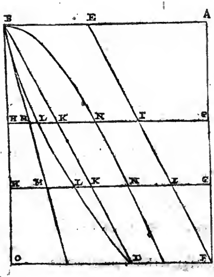
Demonſtratio.

COincidit cum præcedentis propoſitionis demonſtratione: cum enim [b] ſint IM, IL, IK, item IO, IN, IK proportionales, etiam rectangula MIO, LIN, KIK proportionalia [c] erunt.

b 23. huius.

c 58. Progreſ.

PROPOSITIO CXXVI.



IN parallelogrammo ABC ſint parallelæ poſitæ BD, FE. Deindè rectæ GH æquidiſtantes AB. Fiant autem rectangulis IHK æqualia rectangula GHL.

Dico BLL eſſe ad eandem parabolam.

Demonſtratio.

FIant rectangulis IKH æqualia rectangula GHM; & quadratis KH æqualia rectangula GHML. Erunt puncta BL, L ad parabolam [d], ſed hæc puncta L, L, ſunt eadem cum punctis L, L, in hypotheſi determinatis: Nam quia rectangula IKH, cum quadratis KH æquantur rectangulis GHM cum rectangulis

d Per 67. parab.

ſtangulis G H, M L, etiam per 1.2.elem. rectangula I H K æqualia erunt rectangulis G H L. Patet ergo propoſitum.

PROPOSITIO CXXVII.

Iſdem poſitis: ſint quadrata H N rectangulis G H L æqualia.
Dico B N N eſſe ad eandem hyperbolam cuius diameter erit B C.

Demonſtratiq.

Oſtenſum eſt [a] quod lineæ quæ ſunt mediæ inter lineas I H & H K, terminentur in hyperbolâ quæ habet B C diametrum, rectangulis autem G H L æqualia ſunt rectangula I H K ex hypotheſi, vt videre eſt præcedenti propoſitione. Igitur etiam H N, lineæ quæ mediæ ſunt inter latera rectanguli G H L erunt ad hyperbolam cuius diameter B C. Quod fuit demonſtrandum. a 191. Hyperb.

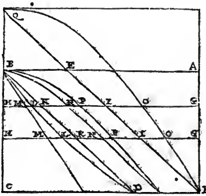
PROPOSITIO CXXVIII.

Iſdem manentibus:
Dico quadratum G H rectangulum G H N & rectangulum G H L, eſſe proportionales quantitates.

Demonſtratio.

Proportionales enim ſunt per hypotheſim præcedentis lineæ G H, N H, & L H. Igitur etiam [b] proportionales ſunt quantitates, quadratum G H, rectangulum G H N & G H L rectangulum. b 1. huius.

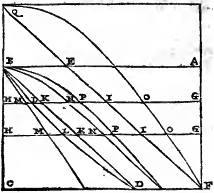
PROPOSITIO CXXIX.



Coniungantur hypotheſes 122. 125. & 127.
Dico rectangulo O H P æquale eſſe rectangulum G H N.

Demonſtratio.

Quadratum G H, rectangulum O H P, & rectangulum I H K ſunt [c] proportionalia; item proportionalia ſunt [d] quadratum G H, rectangulum G H N, & re- c 115. huius. d 118. huius.



ctangulum GHL. Cùm igitur vtriuſque ſeriei terminus primus ſit idem, nempe quadratum GH,& inſuper ex hypotheſi 126.huius extrema rectangula IHK,GHL ſint paria,etiam media OHP,GHN æqualia erunt.Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

HInc patet ſi OHP rectangulis æqualia fiant rectangula GHN, puncta N eſſe ad hyperbolam.

PROPOSITIO CXXX.

IIſdem poſitis:
Dico cylindrum conſtantem ſemihyperbola NN, & altitudine HG æquari magnitudini ſolidæ quæ fit ex parabolis parallelis OH, PH in ſe inuicem ductis.

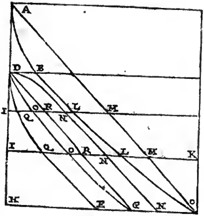
Demonſtratio.

CVm enim per præcedentem rectangulum OHP æquetur ſemper rectangulo GHN; ergo per quadrageſimam quintam libri de ductu plani in planum, ſemicylindrus hyperbolicus qui producitur ex ſemihyperbola NH in altitudinem HG æqualis eſt corpori, quod fit ex parabola OH in parabolam ſibi parallelam HP. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXXXI.

SInt denuo parabolæ ABC, DEQ, quas contingat AD, in vtriuſque verticee: poſitiſq́; AC, DR quæ inter ſe æquidiſtent & deſcriptâ hyperbolâ DNN, cuius IN ordinatim poſitæ ad axem DH, poſſint rectangula MIR: fiant quadratis NI æqualia KIO rectangula.
Dico DOO eſſe parabolam.

Demonſtratio.



PRopoſitione 126. demonſtratum eſt, quod ſi fiant rectangulis MIR æqualia rectangula KIO, quod DOG, ſit parabola. ſed quadrata NI æquantur ex hypotheſi rectangulis MIR. ergo etiam ſi quadratis NI fiant rectangula KIO æqualia, erit DOG parabola. Quod erat demonſtrandum.

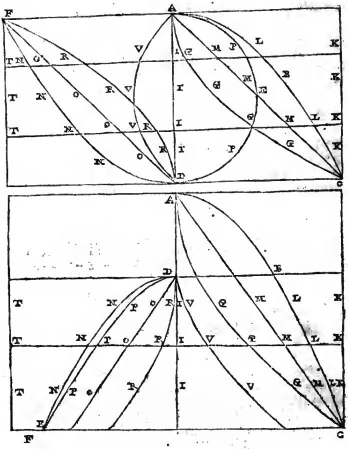
PROPOSITIO CXXXII.

Iiſdem poſitis:
Dico quadrato IO æquari rectangulum QIL.

Demonſtratio.

QVadratum KI, rectangulum MIR, rectangulū LIQ ſunt [a] proportionalia; ſed rectangulo MIR ex hypotheſi præcedentis æquale eſt quadratum NI, hoc eſt ex hypotheſi præcedentis rectangulum KIO. Tria igitur hæc, quadratum KI, rectangulum KIO, & rectangulum LIQ proportionalia ſunt. Sed quoniam rectangulo KIO æquale eſt quadratum NI, etiam quadrata KI, NI, IO ſunt proportionalia. Quare cûm in duabus his ſeriebus terminus primus ſit communis, & medius, inſuper terminus rectangulum KIO, æqualis ſit medio, nempe quadrato NI, etiam tertius tertio pareſit, hoc eſt rectangulum KIO quadrato OI. Quod erat demonſtrandum. [a] 124. huius.

Symbolizatio quadraturæ circuli cum hyperbolæ quadraturâ.



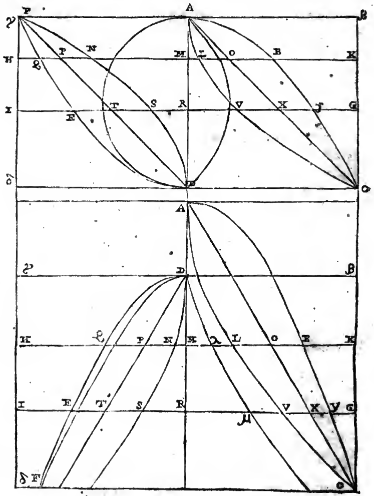
Nimis elegans viſa mihi eſt ſymbolizatio inter proprietates circuli & hyperbolæ, quàm vt eam ſuppreſſam voluerim, aut ſilentio præteritam: quidquid enim ad circuli quadraturam neceſſarium fuit id omne in hyperbolæ quadraturâ ita ad amuſsim ſeſe offert vt ijſdem prorſus characteribus eademq́ diſcurrendi methodo vtramque abſoluere poſsis, modo diſponantur debitâ ratione, quæ requiruntur ad diſcurſum formandum.

dum. Ponantur enim duo cylindri quorum alter baſi circulari inſiſtat,
ſcilicet cylindrus ex altitudine AD ſeu KI, & baſi ſemicirculari PI,
alter autem baſi ſemihyperbolica IP, & altitudine KI, quos oporteat
ad magnitudines ſolidas reducere quæ vel parallelepipeda ſint vel cubi.
Primus labor in circulari cylindro fuit eum reducere ad aliud corpus, æ-
quale quidem ſed quod nihil circulare contineret; ſic erit prima induſtria
ſcopus vt idem præſtemus de cylindro hyperbolico. Oſtenſum itaque[a] eſt
poſitâ in figurâ, conſtructione quadraturæ primæ circuli cylindrum baſi a 51. huius.
circulari PI & altitudine KI, æquari corpori quod fit ex parabolis LI,
IN ſubalternè conſtitutis in ſe ductis. Ita quoque demonſtrauimus
poſitâ propoſitionum iam in hac quadraturâ præmiſſarum conſtructio- b Per 130. huius.
ne cylindrum ex baſi hyperbolica IP, & altitudine KI æqualem eſſe ma-
gnitudini ſolidæ quæ fit ex parabolis parallelis LI, IN in ſe inuicem ductis:
nam in hac figura parabola DNN refert parabolam BPP in figurâ pro-
poſitionis 130. huius: hyperbola verò DPP deſignat hyperbolam BNN
in figurâ prædicta, neque enim eſt alia diuerſitas huius figuræ ab ea, quâ
vſi ſumus propoſitione 130. huius, quam quod vna parabolarum DN
cum hyperbola DPP, ad aliam partem tranſlata ſit.

Secundò vti in circuli quadratura demonſtratum fuit[c] KI, LI, MI: c Prop. 27. huius.
item TI, NI, OI, proportionales eſſe; ita quoque in hac oſtenſum eſt, [d] ſi d Prop. 123. huius.
eædem litteræ alphabeti aſſumantur. Deinde ſicut in quadratura circuli
oſtenſum eſt[e] KI, MI, GI, & TI, OI, RI proportionales eſſe; ita quo- e Prop. 26. huius.
que [f] in hyperbola. Vlterius vti oſtenſum eſt [g] in quadratura circuli KI, f Prop. 122. huius.
PI, VI eſſe proportionales, ita quoque in hyperbola KI, PI, & VI [h] con- g Per prop. 41. huius.
tinuant eandem rationem. Atque hæc omnia ex demonſtratis cognoſcere h Per hyp.
poteris. Præterea ſicuti in circuli [i] quadratura oſtenſum eſt, quadra- prop. 127. huius.
tum IV ſiue quantitatem IV in ſe ductam æquari magnitudini, quæ fit i Prop. 42. huius.
ex ductu plani GI in planum IR, ita quoque demonſtrabimus, [k] hyper- k Prop. 143. huius.
bolæ id conuenire, ſcilicet VI ſuperficiem parabolicam in ſe ductam, æqua-
le ſolidum exhibere cum magnitudine, quæ oritur ex ductu ſuperficiei GI
in ſuperficiem IR. Imò verò quæ adhuc ſequentur, ſi libuerit nonnihil
reflectere, perfectiſſimè etiam ſymbolizare cognoſces ſecundùm omnia,
quæ neceſſaria requiruntur ad reductionem cylindri hyperbolici ad cubum
vel parallelepipedum. quod hoc loco indicandum volui, vt occaſionem
Lectori præberem curioſiùs ea quæ ſequentur cum demonſtrationibus cir-
cularis cylindri conferendi. mirabiliter enim reficere nata eſt vſque adeò
vniuerſalis ſymbolizatio. tranſlatus igitur eſt cylindrus hyperbolicus
habens baſim ſemihyperbolam IP, & altitudinem KI ad ſolidum, quod
naſcitur ex duabus parabolis LI, IN in ſe inuicem ductis, ſicut etiam de
cylindro circulari factum eſt. proſequemur itaque reliquas proprietates

quæ

quas quadraturæ circuli aptauimus vt ex iis ipſam hyperbolam ad rectangulum reducamus aut quadratum.



PRO:

PROPOSITIO CXXXIII.

COnſtruantur duo ſcemata, vnum quod circulari cylindro ſubſeruiat, alterum, quod cylindro hyperbolico. Conſtructio verò vtriuſque hoc pacto fiat. In vno duæ æquales parabolæ conſtituantur ſubalternè poſitę ad communem axem, in altero verò loco parabolarum ſubalternè poſitarum fiant parabolæ parallelæ inter ſe ſicut libro de parabola dictum eſt. ſintq́; illæ parabolæ in vtroque ſcemate ABC, DEF, quarum axis communis ſit AD. Deinde axibus æquidiſtantes ponantur CG, HI, quæ ab axibus diſtent æquali interuallo. fiant prætereà GI, KH ordinatim ad axem AD & ducantur AC, DT conſtituentes æquales angulos cum axe AD. Denique conſtruantur parabolæ DNS, ALC quarum vertices ſint A & D, & contingant axem in iiſdem punctis.

Dico rectangula LMN, OMP, KMH eſſe in continuâ proportione in vtroque ſcemate.

Demonſtratio.

OStenſum enim [a] LM, OM, KM, item MN, MP, MH eſſe proportionales lineas. Igitur per demonſtrata libro de progreſſionibus propoſitione 58. etiam rectangula LMN, OMP, KMH proportionalia ſunt. [a] *Per 122. huius.*

PROPOSITIO CXXXIV.

IIſdem manentibus:

Dico rectangula OMP, BMQ, KMH eſſe proportionalia.

Demonſtratio.

DEmonſtrauimus propoſitione 29. de quadratura circuli hanc ipſam propoſitionem; ſed præcedentibus quoque immediatis [b] oſtenſum eſt lineas OM, BM, KM, & MP, MQ, MH proportionales eſſe in ſcemate hyperbolico. Igitur per ea quæ libro de progreſſionibus ſunt demonſtrata [c] etiam rectangula OMP, BMQ, KMH proportionalia ſunt. [b] *123. huius.* [c] *Prop 58.*

PROPOSITIO CXXXV.

IIſdem denuo manentibus:

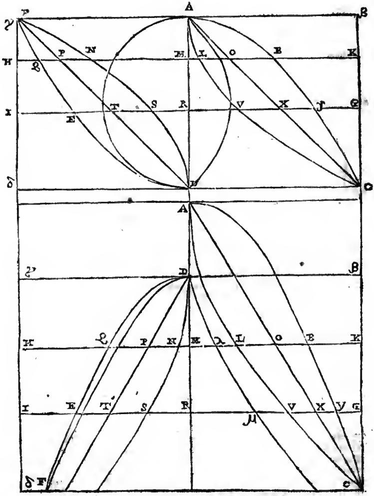
Dico parallelepipeda quæ ſuper baſibus rectangulis LM, RS, OM, RT & KM, RI conſtruuntur habentia communem altitudinem MR, eſſe inter ſe proportionalia, vti etiam ſunt parallelepipeda, ſuper rectangulis OM, RT; BM, RE, & KM, RI. ſub eadem altitudine rectæ MR.

Demonſtratio.

QVoniam demonſtratum iam [d] eſt LM, OM, KM, & rectas RS, RT, RI proportinnales eſſe. Igitur etiam rectangula proportionalia ſunt quæ conſtruuntur ex LM, in RS, OM in RT & KM, in RI. ſunt autem parallelepipeda communem habentia altitudinem inter ſe vt baſes. quare cùm baſes perhibeantur proportionales, etiam parallelepipeda proportionalia ſunt, quorum illæ baſes ſunt. Eodem modo oſtenditur parallelepipeda habentia baſes rectangula OM, RT, BM, RE, & KM, RI & communem altitudinem MR proportionalia eſſe, conſtat itaque veritas propoſitionis. [d] *Per 122. huius.*

PROPOSITIO CXXXVI.

Iiſdem permanentibus:
Dico rectangulum LMN ad VRS rectangulum duplicatam habere rationem eius quam habet rectangulũ OMP ad rectangulũ XRT.



Demonſtratio.

OStenſum eſt ſuprà [a] tam rectangula LMN, OLP, KMH quàm rectangula VRS, XRT, GRI eandem continuare rationem. quare cùm extrema rectangula KMH, GRI ſint æqualia, erit ratio rectanguli LMN ad VRS, rectangulum duplicata [b] rationis, quam habet rectangulum OMP ad XRT rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

a 124. huius.
b 9. huius.

PROPOSITIO CXXXVII.

IIſdem manentibus:
Dico rectangulum OMP ad XRT, duplicatam rationem habere eius quam habet rectangulum BMQ ad YRE.

Demonſtratio.

OStenſum eſt [c] tam rectangula OMP, BMQ, KMH, quàm rectangula XRT, YRE & GRI in eadem eſſe proportione. quare cùm rectangula poſtrema KMH, GRI interſe ſint æqualia, erit [d] ratio rectanguli OMP ad XRT, rectangulum duplicata rationis rectanguli BMQ ad YRE rectangulum.

c 125. huius.
d 9. huius.

PROPOSITIO CXXXVIII.

MAnentibus denuo iiſdem:
Dico rectangulum LMN ad rectangulum VRS quadruplicatam eius continere rationem, quam habet rectangulum BMQ ad YRE rectangulum.

Demonſtratio.

REctangulum LMN ad VRS rectangulum, duplicatam [e] habet eius rationem, quam habet rectangulum OMP ad XRT rectangulum. ſed OMP rectangulum ad rectangulum XRT habet [f] duplicatam eius quam rectangulum BMQ ad YRE rectangulum. ergo LMN rectangulum ad VRS quadruplicatam habet eius rationem quam rectangulum BMQ ad YRE. Quod fuit demonſtrandum.

e 136 huius.
f 137. huius.

PROPOSITIO CXXXIX.

POſitis iiſdem:
Dico rationem rectanguli LMN ad rectangulum VRS, toties continere per multiplicationem rationem rectanguli OMP ad XRT rectangulum, quoties hæc eadem ratio OMP ad XRT continet per multiplicationem rationem rectanguli BMQ ad YRE.

Demonſtratio.

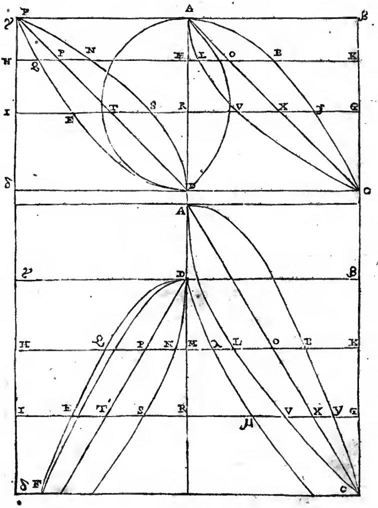
EX præcedentibus eſt manifeſta: nam oſtenſum eſt [g] rationem rectanguli LMN ad VRS duplicatam eſſe eius, quam habet rectangulum OMP ad XRT, ac proinde prior ratio ſecũdam bis continet per multiplicationẽ. Similiter eſt demonſtratũ [h] rectangulum OMP ad XRT, duplicatam habere rationem eius quam rectangulum BMQ ad YRE rectangulum & conſequenter bis continet per multiplicationem prior ratio ſecundam. Quare patet rationem rectanguli LMN ad VRS, toties continere per multiplicationem rationem rectanguli OMP ad XRT, quoties hæc continet rationem rectanguli BMQ ad YRE rectangulum.

g 136. huius.
h 137. huius.

PROPOSITIO CXL.

Iſdem manentibus:

Dico parallelepipedum conſtans baſi rectangulâ L M N, & altitudine M R ad parallelepipedum ex baſi V R S eademque altitudine M R quadruplicatam habere rationem eius quam continet parallelepi-



pedum ex baſi rectanguli B M Q, & altitudine M R ad parallelepipedum ſub baſi rectanguli Y R E & communi altitudine M R.

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt [a] rectangulum L M N ad V R S rectangulum, quadruplicatam eius habere rationem, quam continet rectangulum B M Q ad Y R E rectangulum. ſunt autem parallelepipeda ſub hiſce baſibus & communi altitudine M R inter ſe vt ipſæmet baſes. Igitur patet propoſitionis veritas. a 138. huius.

PROPOSITIO CXLI.

EAdem figurâ manente:

Dico rationem parallelepipedi, quod fit ex baſi rectangulâ L M N, ad parallelepipedum ex baſi V R S continere toties rationem parallelepipedi ſuper baſi O M P per multiplicationem ad parallelepipedum ſuper baſi rectanguli X R T, quoties ratio hæc per multiplicationem continet rationem parallelepipedi ſuper baſi rectangulâ B M Q ad parallelepipedum, quod fit ſuper baſi Y R E rectangulâ, modò eadem altitudo omnibus parallelepipedis inſeruiat.

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt [b] rationem rectanguli L M N ad rectangulum V R S, toties continere per multiplicationem rationem rectanguli O M P ad X R T, quoties hæc ratio continet rationem B M Q rectanguli ad rectangulum Y R E, parallelepipeda autem, de quibus agimus, talem ſortiuntur inter ſe rationem, quam baſes rectangulares ſuper quibus erecta ſunt, quoniam altitudinibus conueniunt ex hypotheſi. patet igitur veritas aſſertionis. b 139. huius.

PROPOSITIO CXLII.

EX ſcematibus vniuerſalibus quæ intercipiuntur parallelis $\beta\gamma$, C δ conſtituantur ordines ſex figurarum, quarum ternæ inſeruiant hyperbolæ, aliæ verò circulo. Prima verò figura parabolarum conuexarum diuiſa ſit parallelis quæ exhibeant rectangula quaterna A B C D, & E F G H. Secunda autem figura in quâ ſolæ rectæ lineæ apparent, ſecta ſit parallelis iiſdem formantibus rectangula I K L M & N O P Q. Tertia denique in qua cernuntur parabolæ concauæ ſecta ſit iiſdem parallelis, quæ conſtituant rectangula R S T V & X Y Z.

Dico itaque rationem duorum parallelepipedorum quæ fiunt ex R in X rectangulum, & ex rectangulo S in Y ad duo parallelepipeda orta ex ductu rectangulorum T in Z & V in &, toties continere rationem parallelepipedorum ex I in N, & ex rectangulo K in O, ad parallelepipeda ex ductu rectanguli L in P, & M in Q rectangulum, quoties hæc eadem ratio parallelepipedorum, continet rationem parallelepipedorum quæ gignuntur ex ductu planorum A in E & B in F, ad parallelepipeda quæ fiunt ex rectangulis C in G, & D in H.

 Demon-

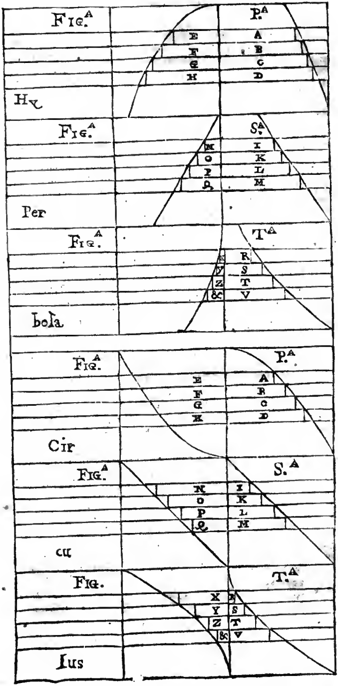


Fig.A
P.A
E
F
G
H
A
B
C
D
Hy
Fig.A
S.A
N
O
P
Q
I
K
L
M
Per
Fig.A
T.A
X
Y
Z
&
R
S
T
V
bola
Fig.A
P.A
E
F
G
H
A
B
C
D
Cir
Fig.A
S.A
N
O
P
Q
I
K
L
M
cu
Fig.
T.A
X
Y
Z
&
R
S
T
V
lus

Demonſtratio.

RAtio parallelepipedorum ex R in X, & S in Y, ad parallelepipeda ex T in Z & V in &, eadem eſt [a] cum ratione parallelepipedi ex R in X ad T in Z, & R in X ad V in &, vlteriùs ex ratione parallelepipedi ex S in Y ad parallelepipeda ex T in Z, & V in &, per propoſitionem octauam huius libri. Simili modo ratio parallelepipedorum ex ductu I in N, & K in O, ad parallelepipeda ex ductu plani L in P, & M in Q, eſt eadem [b] cum ratione parallelepipedi ex I in N, ad parallelepipeda ex L in P, & M in Q, ſimul cum ratione parallelepipedi ex K in O, ad L in P, & M in Q. Denique ratio parallelepipedorum ex ductu A in E, & B in F ad parallelepipeda ex ductu C in G, & D in H, eſt eadem cum ratione parallelepipedi ex ductu A in E ad parallelepipeda ex C in G, & D in H, ſimul cum ratione parallelepipedi ex B in F, ad parallelepipeda quę fiunt ex ductu C in G & D in H.

[a] 8. huius
[b] Per antec.

Sed ratio parallelepipedi ex R in X, ad T in Z, toties continet rationem parallelepipedi ex I in N, ad L in P, quoties hæc continet rationem parallelepipedi ex A in E, ad C in G, quod eodem prorſus modo oſtenditur quo illud in quadraturâ circuli propoſitionibus 37. & 38. & harum Corollario oſtenſum fuit; ſunt enim omnia ad hoc præſtandum in hâc etiam quadraturâ præmiſſa. Simili modo ratio parallelepipedi ex R in X ad parallelepipedū ex V in &, toties continet rationē parallelepipedi ex I in N, ad M in Q, quoties hæc continet rationem parallelepipedi ex A in E, ad D in H. Atque eodem modo de ratione parallelepipedi ex ductu S in Y ad T in Z, & S in Y ad V in &, oſtenditur, quod toties contineat rationem parallelepipedi ex K in O ad L in P, & K in O ad M in Q, quoties hæc eadem continet rationem parallelepipedi, quod fit ex ductu B in F, ad C in G, & B in F, ad id quod reſultat ex ductu D in H. Igitur patet quod ratio duorum parallelepipedorum ex R in X, & S in Y, ad duo parallelepipeda ex T in Z, & V in &, toties contineant rationem parallelepipedorum quæ oriuntur ex ductu I in N, & K in O ad parallelepipeda quæ fiunt ex ductu L in P, & M in Q, quoties hæc ipſa ratio continet rationem parallelepipedorum quæ gignuntur ex ductu plani A in E, & B in F, ad parallelepipeda, quæ fiunt ex ductu C in G, & D in H. Quod fuit demonſtrandum.

Corollarium.

QVæ dicta ſunt præcedenti propoſitione de quatuor parallelepipedis ex planis A B C D in plana E F G H ductis, & reliquis; etiam ſunt intelligenda de quauis ſubdiuiſione rectangulorum eorundem per parallelas in partes æquales ad formanda parallelepipeda, prout in propoſitione requiſita fuerunt; de quibus ſemper fiet eadem illatio & conſequentia, quæ facta iam eſt, cùm demonſtrationis diſcurſus ſit vniuerſalis, eiuſdemque fundamenta ſemper occurrant iteranda. quare cùm illæ ſubdiuiſiones nihil noui inferendum adducant ab eo, quod iam demonſtratum fuit, ſed meram eorum repetitionem quæ præmiſſa ſunt, moleſtam intelligentibus contineant, hinc propoſitionem præcedentem de quacunque ſubdiuiſione demonſtratam liberè aſſumemus.

PROPOSITIO CXLIII.

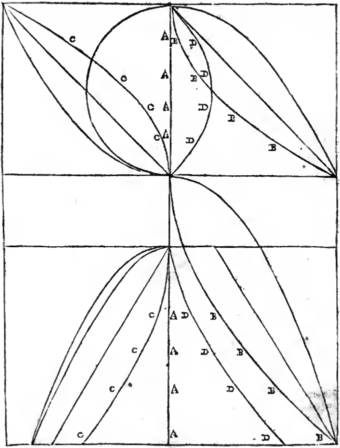
IIſdem manentibus:

Dico rationem ſolidi quod oritur ex ductu concauæ parabolæ R S in parabolam concauam X Y ad ſolidum ex ductu concaui parabolici T V in parabolicum Z &, toties continere rationem ſolidi, quod fit ex ductu trapezij I K in N O ad corpus ex ductu trapezij L M in P Q, quoties hæc ipſa continet rationem ſolidi ex ductu parabolę conuexæ A B in E F parabolam ad corpus ortum ex ductu parabolæ conuexę C D in G H.

Demon-

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt præcedenti propoſitione eiuſq; Corollario, quod ratio medietatis figurarum inſcriptarum tertio ſchemati ad alteram medietatem figurarum inſcriptarum, toties contineat rationem medietatis figuratum ſecundo ſchemati inſcriptarum ad alteram ſuam medietatem, quoties hæc ipſa ratio continet rationē medietatis figurarum primo ſchemati inſcriptarum ad ſuam reſiduam medietatem; & quia hoc ipſum ſemper fieri poteſt, igitur per propoſitionem vniuerſalē libri de ductu plani in planum, quadrageſimam ſcilicet ſextam, etiam ratio ſolidi ex R S parabolico in X Y parabolicum, ad ſolidum ex patabolico concauo T V in Z &, toties continei rationem ſolidi ex trapezio I K in N O trapezium, quoties hæc eadem ratio continebit rationem ſolidi ex ductu parabolici conucxi A B in E F, ad ſolidum cx ductu parabolici C D in conuexum patabolicum G H. Quod fuit demonſtrandum.



PROPOSITIO CXLIV.

REſumatur figura ſimilis illi quam propoſirione 133. huius expoſuimus & inrer A C, A B ponanrur mediæ proporrionales A D iuxta renorem propoſitionis 131. huius libri, erit parabola D D.

Dico figuram parabolieam A D ductam in ſe, æquari figuræ A B, ductæ in A C.

Demonſtratio.

CVm enim ex hypotheſi A B, A D, A C ſint in continuâ, ergo vt patet ex propoſitione vniuerſali quadrageſimâ quintâ libri de ductu plani in plaoum, quaotitas A D in ſe ducta ſolidum producet, quod æquetur magnitudioi ſolidæ, quæ conficitur ex duarum ſuperficierum B A & A C mutuo inter ſe ductu. Quod erat demooſtraodum.

Corollarium.

POrtò corpus ortum ex ductu figuræ parabolicæ B A in figuram parabolicam A C ad parallelepipedum reductum eſſe patet, cùm ſolidum quod naſcitur ex ductu parabolæ A D in ſe, quodque corpori iſti in propoſitione oſtenſum eſt æquale, ad parallelepipedum reduxerimus. Nam D A in ſe ductum eſt iouolucrum ſolidi quod remanet ex cylindro parabolico poſt ablatam vngulam, eſt aurem & cylindrus parabolicus a & vngula b cubata. ergo & ſolidum illud reſiduum cubatum eſt. Quare cùm illud ſolidum reſiduum cum ſuo iouolucro conficiat priſma tectilioeum, ipſum quoque inuoluerum erit cubatum. ſed D A in ſe ductum eſt inuolucrum illius reſidui. Ergo D A ductum io ſe eſt cubatum. Quæ verò de totis illis ſuperficiebus in ſe vel in ſe mutuo ductis demonſtrata ſunt, eadem etiam non diſſimili ratione de illarum partibus à parallelis lineis D B A C, C A B D interceptis, demonſtrantur. a Per 81. de cylind. b 99. de cylindr.

PROPOSITIO CXLV.

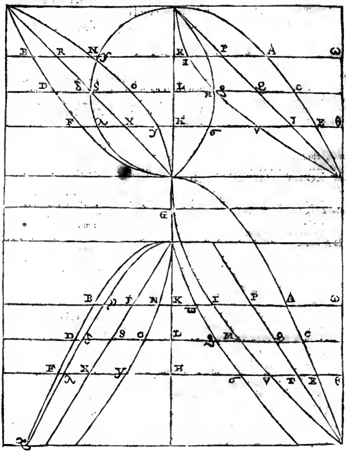
REſumptâ hypotheſi priori in ſeemate conſtituantur A B, C D, E F ad angulos rectos ad communem axem G H, occurrentes ſectionibus parabolicis in I, M, V; N, O, Y; B, D, F; & hyperbolæ in γ, δ, λ; & ſubtenſis P T, R X, in P, Q, T; R, S, X. Vide figuram pag. 1111.

Dico rationem ſolidi, quod oritur ex ductu I K L M, in K L O N ad ſolidũ ex ductu ſuperficiei M L H V in ſuperficiem L O Y H notam eſſe: inſuper noram eſſe rationem ſolidi ex ductu plani K P Q L in K R S L ad ſolidum productum ex ductu L Q T H in planum L S X H.

Demonſtratio.

OStenſum eſt c cui parallelepipedo æquetur corpus ex ductu motuo planorum I K L M io K L O N, quemadmodum etiam de corpore ex ductu M L H V in ſuperficiem L O Y H. Inſuper oſteoſum eſt d cui parallelepipedo æquetur ſolidum ex planis K P Q L & K R S L in ſe mutuo ductis, & eodem modo cui æquale ſit ſolidum ex ſuperficiebus L Q T H & L S X H inter ſe ductis. Quare, cùm nota ſit ratio parallelopipedorum inter ſe, nota quoque erit ratio corporum, de quibus agit propoſitio. Quod erat oſtendendum. c Per Coroll. 144. huius. d Ex 5. de duct.

PROPOSITIO CXLVI.



Iidem poſitis:
Dico rationem ſolidi ex ductu plani AKLC in planum KBDL ad ſolidum ex ductu CLHE in planum LDFH, notam habere rationem.

Demon.

Demonſtratio.

OStenſum eſt [a] notam eſſe rationẽ ſolidi quod oritur ex ductu IKLM in KLON ad ſolidum ex ductu ſuperficiei MLHV in ſuperficiem LOYH. Simili modo demonſtratum eſt, [b] notam eſſe rationem ſolidi ex ductu plani KPQL in KRSL ad ſolidum productum ex ductu LQTH in planum LSXH. Demonſtratum verò eſt, [c] rationem corporis orti ex ductu KIML in KNOL ad corpus productum ex ductu plani MLHV in planum LOYH, toties continere rationem corporis orti ex ductu plani KPQL in KRSL ad ſolidum, quod fit ex ductu QLHT in planum LSXH, quoties hæc ipſa ratio continet rationem ſolidi, quod oritur ex ductu plani AKLC in planum KBDL, ad corpus factũ ex ductu ſuperficiei CLHE in ſuperficiem LDFH. Quocirca cùm notæ ſint rationes, quæ ſunt inter duo prima corpora, & duo ſecunda, etiam nota erit ratio, quæ eſt inter duo tertia. Quod erat demonſtrandum.

a 145. huius.
b Ibid.
c 145. huius.

PROPOSITIO CXLVII.

IIſdem manentibus: fiant rectangulis AKB, CLD, EHF, &c. æqualia rectangula $\omega K\gamma$, $\eta L\delta$, $\theta H\lambda$, &c. erit quidem $\gamma\delta\lambda Z$ hyperbola per Corollarium prop. 129. huius.

Dico inſuper ſuperficiem $K\gamma\delta L$ ad ſuperficiem $L\delta\lambda H$ notam habere rationem.

Demonſtratio.

DEmonſtratum eſt [d] corpori ex ductu plani AKLC in planum KBDL ad corpus ortum ex ductu plani CLHE in ſuperficiem LDFH notam habere rationem. ſed etiam demonſtratum eſt [e] corpori ex ductu AKLC in planum KBDL, æquale eſſe ſolidum ex baſi hyperbolicâ $K\gamma\delta L$, & altitudine ωK; & ſolidum ex baſi hyperbolicâ $L\delta\lambda H$, & altitudine ηL, æquale eſſe ſolido ex ductu plani CLHE in planum LDFH. Igitur etiam inter duo ſolida hæc, quæ baſes habent hyperbolicas $K\gamma\delta L$, & $L\delta\lambda H$, & communem altitudinem, ratio nota erit; ac proinde etiam inter ipſas baſes erit nota ratio, cùm hæc corpora demonſtrata ſint eam habere rationem, quam ipſæ baſes continent. Quod erat propoſitum.

d 146. huius.
e 130. huius.

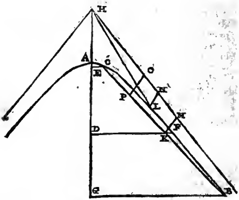
PROPOSITIO CXLVIII.

SIt hyperbolæ ACB axis AG, ex quo aſſumptis GD, DE æqualibus inter ſe, & conſtitutis ordinatim BG, FD, EC ponantur BF, FC ſubtenſæ arcuum BF, FC.

Dico ſegmentum BF minus eſſe ſegmento FC.

Digitized by Google

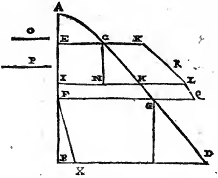
Demonſtratio.



a 19. hyperb. DVctâ enim BC ponatur eius diameter HLK[a], quæ diuidet biſariam rectā BC in puncto K in quo FD occurrit EB. quare punctum L in quo diameter ſecat hyperbolam, eſt inter CE, DF ordinatim poſitas ad axem HC, cùm prius diameter debeat occurrere ſectioni, quàm ordinatim poſitis intra hyperbolam. Ductis igitur CL, LB, erunt[b] ſegmenta CL, LB inter ſe æqualia, eſt autem LB ſegmentum maius ſegmento FB, ergo etiam ſegmentum CL maius eſt ſegmento FB, ac proinde ſegmentum CF multò maius erit FB ſegmento. Quod fuit demonſtrandũ.

b 196. hyperb.

PROPOSITIO CXLIX.



OPorteat tandem hyperbolę rectilineum æquale exhibere.

Con-

Conſtructio & demonſtratio.

SIt hyperbole ACDB, cuius axis ſit AB. Ducantur ad axem ordinatim rectæ
CE, GF. DB, quæ æquales axeos partes EF, FB intercipiant, quoniam verò
nota [a] eſt proportio ſegmenti CEFG ad ſegmentum GFBD, ſit ea O ad P, & a 147. huius.
producantur FG, EC, in K & Q, vt CE, GF, ſint ad KE, QF, vt O ad P.
Tum per A, K, Q deſcribatur hyberbola, cuius axis ſit AB: erit igitur [b] tam hy- b 175. hyperb.
perbole AQF ad hyperbolem AGF, vt QF ad GF, hoc eſt vt P ad O; & hy-
perbole AKE ad hyperbolem ACE, vt KE ad CE, hoc eſt, vt P ad O. Quare
etiam reſiduum ſegmentum KEFQ erit ad ſegmentum reſiduum CEFG, vt P, ad
O, hoc eſt vt ſegmentum GFBD ad idem ſegmentum CEFG. ſegmenta igitur
KEFQ, GFBD æqualia ſunt. Ducantur deinde ſubtenſæ KQ, CG, GD. ſe-
gmentum CG maius eſt [c] ſegmento GD, ſed ſegmentum KQ maius eſt ſegmento c 148. huius.
CG, vti facilè demonſtrabitur ex 175. libri de hyperbolâ. Ergo ſegmentum KQ
multò maius eſt ſegmento GD. Abſcindatur igitur ex ſegmento maiori KQ ſe-
gmentum KR æquale ſegmento GD. erit ergo figura hyperbolica quæ arcu QR
& ſubtenſis RK, QK continetur, exceſſus ſegmenti KQ ſupra ſegmentum GD.
Iam verò quia ſegmenta KEFQ, GFBD oſtendi eſſe æqualia, quo exceſſu ſe-
gmentum KQ ſuperat ſegmentum GD, eodem à trapezio GDBF ſuperatur tra-
pezium KQFE. exhibeatur ille per elementa, ſitque triangulum FXB. Erit ergo
figura hyperbolica contenta arcu QR & rectis RK, QK æqualis triangulo XFB.
ducatur demum ſubtenſa QR, & rectangulo RKQ, auferatur ex triangulo XFD
pars æqualis, rectilineum reſiduum æquabitur reſiduo ſegmento hyperbolico QR.
quod ſufficit ad hyperbolæ quadraturam.

FINIS.

EPILOGVS
AD
LECTOREM.

HAbes, amice Lector, conatus noſtros, qui ſi tibi arridẽt, vtere & fruere; ſin minùs, per me licet illis vt demas vel addas, prout ad Matheſeos culturam opportunum iudicaris, quæ verè abyſſum ſcientiarum complectitur, quod nõ ignorauit, qui Deum Opt. Max. omnia opera ſua in pondere, numero & menſura perfeciſſe diuino oraculo enuntiauit. Scaphulam concinnare tentaui, quâ vaſti Oceani noua littora legerem, Tu Argonauticam para, vt noſtræ imbecillitati opem præſtes, quâ fretus alto te credas Pelago quod ex harum lucubrationum lectione tibi patere non inficiaberis. Comminiſci debui noua quidem elementa, non ita tamen, quin ea communis Geometriæ principijs ſancirem vel Archimedeæ doctrinæ conformia efficerem. Memineris rogo ſi quæ minùs placent, ea non ita explodere, vt poſteris animos tollas aliquid audendi, quod ad Geometriæ nomen cõferre eis videretur. Ordinem & Methodum rerum quas hîc inuenies non ita exactam reperies, quam res poſtulat: ſed rerum copia rarò concinnitatem illam admittit, quam rerum dignitas exigit. Et ſecundę cogitationes maturæ magis ſunt, quæ ad incudem malè tornata reddere ſolent. Reſiduus liber fuit quem hiſce adiungere decreueram, qui materiam proſequeretur ductuum planorum in plana ſed in orbem; eum, ſi vita comes fuerit, in aliam occaſionẽ reſeruamus. omiſſæ ſunt quoque omnes ſpeculationes quæ aliâ viâ quàm quæ proportionalitates implicat, circuli & hyperbolæ tetragoniſmos exhibere poſſent, quarum accuratiorem tractatum in aliud quoque tempus differimus, boni interim conſule quæ amicorum importunitas & Superiorum imperium publici juris fieri voluerunt. Cedant autem hæc omnia

Ad Maiorem Dei Gloriam.

ERRA-

ERRATA.

Libro Primo de lineis.

pagina	linea		lege
1		34 tertij	35 tertij
2		Sexti	tertij
2	penult.	secundam	Secundùm
3		36 Sexti	37 Sexti
4		34 tertij	35 tertij
4	6	GF	GE
10	2	CB	CD
21	5	CB	CD
24	1	CB	CD
25	24	ZB	ZP
24	51	MK ad NL	NL ad MK
31	5. à fine	ABS	BAK
35		in prop. 52. vbi eſt B debet eſſe C & contra.	
57	16	CD	CG

Ad propoſitionem 84. libri primi ponatur ſequens conſtructio.

Data ſit ratio E ad F, & fiat rectangulum aliquod GIK quod ad rectangulum LIM eandem habeat rationem cum ratione E ad F, hoc facto ponatur ex I, recta IS, orthogona ad GM diuidatur KG biſariam in O erigaturque OT parallela IS. Deinde fiat vt rectangulum KIG ad quadratum IO, ita linea IP ad PS, ducta deinde ST quæ æquidiſtet IG & biſecta LM in V ponatur VX parallela PS. Denique fiat vt linea IP ad PS, ita rectangulum LIM ad quadratum aliud, ponaturque [illegible] huius quadrati medium inter IV vel SX & rectam SR & ex P, per punctum, R ducatur PR. Dico TZ lineam eſſe diuiſam vt poſtulatur diuidi AB. Demonſtratio huius pendet à parabolâ vt ipſa figura docet.

Libro Secundo.

pag.	linea		lege
62		in fig. Coroll.	F pro B.
78	2	trium	duarum
112		omiſſum eſt H inter G & 3 in figura	
114		in figura inter B & H habetur K pro E.	
116	4	C	G.
116		ommiſſum eſt C inter E & K in figura	
118	6	KB	HB
118	penult.	allatis	ablatis
119	3. à fine	AK	BK
127	1	NR	NO
134	1	B	V
140	4	omittendum eſt per.	
142	penult.	NK	MK
149	multis	AF	AG
154	4	fieri	ferlei
159	14	Xβ	αβ
161	9 à fine	AL	AF
162	penult.	AB	HB
165	8. à fine	AO	HO

Libro Tertio.

pag.	linea		lege
171	5	FGH	GFH
172	vltima	HL	HI
176	46	linem	lineam
176	53	HI	H
183	5. à fine	PH	LH
187	8	DA	BA
187	16. à fine	AB	AE
190	9	omittendum eſt B.	
199	3	DB, DE	AB, AE
199	2	per EE	per EXDD.

Libro Tertio.

pag.	linea		lege
202	2	AD, FC	ADFC
211	8	DB	DB.
211	2	ADC	AGC
211		in figura ponatur F loco E & contra	
212	10	GC	FC
213	7	AD	AC
215	6	triplicata	duplicata
217	1	IAF	AF
221	antepen.	EF	DF.
224		in figura F pro E & contra.	
232	12. à fine	ſie vt	ſuntque
233	2	AI	HI
233	21	AG	BG.
236	18	omitte L.	
239	2	MK	NK.
239	2	E	M.
239	20. à fine	ABC	ACB
239	10 à fine	FLH	FLG.
239	penult.	angulo	angulus

Libro Quarto.

pag.	linea.		lege
245	7. à fine	PM, BM	PME.AIK
247	5. à fine	BC	BE
248	14 à fine	ducantur	producatur
249	25	BA	HB.
250	4	BM	DM.
250	10	B	G
251	15	deleatur F	G.
257	3. à fine	EH	ED
259	3	AOB	AQB
259	21. à fine	EG.	AC
262	7. à fine	DEC, DEA	DEC, GEC
263	16. à fine	KC	HC
266	13	FG	FB.
267	1	GBL	GBI.
267	5	EG	FG.
270	23	AH	AC
271	6. à fine	GFB	GFD.
272	8. à fine	DC	DF
273	5	lineæ deleatur	
274	8. à fine	FEI	HEI
277	15	LM	EF
278	9. à fine	EC	EG
279	9	DHG, BHC	DHE, GHC
279	9	CH, HE	CH, HG.
281	13. à fine	EHK ad LHE	IHK ad LMN
286	3	CD	CB.
287	5	FG	EG.
287	6	CK	GK
287	26	CD	AD
288	18	maior	minor
290	10	FF	EF
291	3	AC	AD
294	24 à fine	EF, GH	AB, CD
295	13	GHF	AE
295	14	BC	FC
296	12	diameter	diametru
305	11	LHM	LEM
309	17. à fine	ECD	BGD
310	3. à fine	DHE	GHE.
311	3	AHD	AHE
313	23	FI	FE
316	19	DBBE, EFFE	DBDE, EFFD.
318	6. à fine	D	G.

ERRATA.

pag.	linea		lege
310	13	HP	HN
324	7	AGK	AGC
327	5	occurrant	occurrat
328	3.a fine	AB	ADC
329	24 a fin.	FG	FC
329	17 & 2.	deleatur DA	
330	5 a fine	cuius axis, ſupple, AC.	
335	8	BE	AI
335	13.a fine	dele EF.	
336	8	BC	BG
338	17	EL	FL
338	1. Cor.	ABD	ABC
339	17	ſitte	ſine
344	3	C.	O
346	6	ADF	DF
346	6. a fine	deleatur tam	
347	9	E	I
349	4	FG ad FB	FB ad FG.
351	8	KFQ	KNQ.
351	14	BEC	BED

Libro Quinto.

pag.	linea		lege
359	7.a f. & 5	BH ad BE	DH ad DE.
363	4. a fine	BD	AD
364	1	AF	AE
365	7	dele quadrati	
369	3	CEI	CBI
370	15	EBA	EBF
373	4	AC	BC
379	6	BF	BE
		& 1.Corol.	FB lege CB.
385	8	IAK	AIK.
385	5	DML ad IAK	AIK ad DML
397		in figura eſt G.	loco F & contra.
418	4	TSX	TSY
435		in figura eſt E.	loco F & contra.
438	2	C.	G.
440	8.a fine	FDB	FDG.
444	2.Cor	AF & FB	BF & FD
		& in 3. AF	BF
448	2	ſupple æqualis	
449	17.a fine	AC	AG

454. in propoſ. a 15. diviſam in CEID. lege C & D. & paulò poſt quadratum AEC lege AC.
454. 3. a fine biſectis in LELN lege in L & N.
454. penultima NK deleatur
454. ex G duæ normales ad AB lege ex G. duæ normales
455. linea 3. parallelam ad KB. lege AB.

pag.	linea		lege
454	12.a fine	GPM.	GPN.
459	14	B.	H
464	11	FE	FC
467	12	DF	DB
		& 20.AC	BC
471	1	BCH æqualis K.	BCG æqualis H
472	9. a fine	ABC	AC
482	19.a fine	AF	BF
483	5.a fine	AG	BG
484	13	AD	BD
487	18	ſupple ellipſis ad	ellipſim FBG.
494	3	AD,AE,AF,AG	AE,AF,AG,AC
500	9	DK,RQ	KQ,LR
505	3	FE	BE
506	5	D	A
508		vbi eſt E.	intellige D.
521	9	NSQ	NRQ.

Libro Sexto.

pag.	linea		lege
528	7	AB.	BC & contra.
535	10.a fin.	rectanguli	rectangulum
536	18	SB.	SV
536		in figura eſt G. loco A & E. loco F.	

pag.	linea.		lege
537	8 a fine	FI	FL
546	9.a fine	CG,FH	GF,HI.
547	16.a fine	DE,DH	ME,MH.
553	18	BIF	BIE
555	8	&	eum
557		Q	N.
560	2.a fine	KB.	KL
561	8	EB.	EC
565	19	ED	CD
576	7. a fine	EH	EG.
580	10	BF	IC
585		in fig. eſt D pro B.	
586	17	LE	LI
596	5. a fine	FGHC adde	NOFG
601	13.a fine	PG.	PQ
607	21	EC	EF
607	3.a fine	linea ſupple NA	
613	12	MC	MQ
616	2	BC	AC
618	15.a fine	FAH	KAH
618	10.	Dele ratio	
625	15	BR	PR
626	16.a fine	ZQR	ZIR
629	1	AGE	AIR
629	4	GHI	FLI
631	11.a fine	FK	GK
634	12	BF	BD
637	16	HC	HE
640	25	DH	EH
641	12.a fine	GG	GI
643	20	PN	PP
646	21	SK	IK
649	17.a fine	FE	FG
649	2	HL ad HL	HG ad HG
657	11.a fine	IB.	BC
657	10	ICC	CC
661	8.a fine	parabola ſupple quæ	
666		RQ	RG.
668	4	KK	HK
668	6	PHKH	PHK
668	12.a fine	RIQ	RXG.
669	3.a fine	GD	GB.
670	11.a fine	PHKA	PHKH.
674		in figura E pro F	
682	2	ſit	ſic
683	18	&	ex
683	10.a fine	AK,AL	AB,AH
684	15.a fine	LAMQ	LAM
685	24.a fin.	ſpira	ſupple AC
686	1	GEGC	GEQC
686	2.a fine	ABE	ABK

Libro Septimo.

pag.	linea		lege
706	16.a fine	diſtinctionem	definitionem
707	25.	ipſius	ipſis
710	2	PM	PMG.
710		in figura N	loco μ nec Z bene
713	5	GNA	GNH
719	3.a fine	ductum	ſupple in
724	8	in ſe	ſupple eſt
725	13. a fine	TR	OR
726	14	circulus	circulum
726	16	ſuperficem	ſuperficiem
729	8	STV	PQR
729	21	corpos	corporis
731	13. a fine	incipiendo ab ita, dele vſque ad affectionem.	
733		Propoſitiones 40. & 41. ponuntur eodem numero quo priores.	
734	9.a fine	BKA	RKA
735	1.a fine	altitudinibus	altitudinis
736	4. Sch.	ZY	ZV
737	15.a fine	HPB	HBB
739	10.a fine	KK	KF
741	9.a fine	AHI	GHI.

ERRATA.

pag.	linea		lege
745	1	BAG	BAD.
746	pr.54.	L	G.
753	7	DA	BAL
755	5.a fine	continentes	contingentes
759	15	DP	DB.
765	10	GHF	GH
765	4	AC	AG.
768	21	LB	CB
772	pr.101	K	B
772	2.a fin.	BK	DK
774		in figur. N loco H	ſuo autem loco N non habetur
775	1	fore	ferè
776	10.a fin.	ſint	ſunt
778	13	HIF	HI
786	19	FNP.	HNI·
788	5.& 3.a fi.	LA	GA
788	4	LD	GA
789	17.a fine	MM	PQ
789	8.a fine	NI	NILI
793	4.a fine	CD	DI
794	13.a fine	HB	HG.
842	2.a fine	dele BL	
843	7.a fine	lineæ	lineis
856	1	bifariam	trifariam
859	9.a fine	HO	HK.
859	8.a fine	HO	HK.

Libro Octauo.

pag.	linea		lege
892	6	CD	DC
900	15	A ad B.	dele ad B.
906.	17	K.	G.
908	2.à fine	AE	AB.
909	1	A	B
923	17	GB	FC
926	18	CD	D
934	9.a fin.	D·	DI
941	6	E	C

Libro Nono.

pag.	linea		lege
955	3.a fine	18	17
959	3.a fine	FG	FB.
964	10	DBF	DBFCM
964	3.a fine	G	F
991	10	ſubtenſa	ſubtenſâ.

Libro Decimo.

pag.	linea		lege
1109	7.a fine	KCL	KL.
1112	4	BSQ	PSQ
1115	6	PQS	QPS
1119		lin. vt ſecũdi ad ſecundũ vltimâ	In duplicatâ ratione ſecundi ad ſecundũ.
1125	14	ZRRZ	ZQQZ
1127	4.a fine	TPH	FPH
1130	5	ζC	εC
1139	15	dele vnum N§	
1171	16	vt, quod poſitum eſt ante, ad ſecundum, ponatur ante tertium.	
1173	4.a fine	R, L	R, S
1180	9	CM	CB
1185	6.a fine,	in ſe ductis	ſupple nota ſit.
1186	5.a fine	SRT	RST
1187	7	&	vt
1189	7.a fine	eandem eſſe	eadem ſit.
1191	14.a fin.	idem corrige.	

A01 1462480

Digitized by Google